

**EXERCÍCIOS DE ESTÁTICA DAS
ESTRUTURAS**

Souza, João Carlos Antunes de Oliveira e

DEDALUS - Acervo - EESC



31100108413

ILA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

Doação
C.A.A.S.O. - SEÇÃO DE VENDAS

EXERCÍCIOS DE ESTÁTICA DAS ESTRUTURAS

ENG.º JOÃO CARLOS ANTUNES DE O. E SOUZA

ENG.ª HELENA M. C. CARMO ANTUNES



SÃO CARLOS
OUTUBRO DE 1971

INTRODUÇÃO

Esta publicação tem a finalidade de apresentar uma série de problemas resolvidos relativos ao assunto tratado durante o semestre obrigatório da disciplina "Estática das Estruturas" na Escola de Engenharia de São Carlos.

São apresentados problemas relativos ao cálculo de deslocamentos em estruturas isostáticas, ao cálculo de estruturas hiperestáticas, e ao traçado de linhas de influência de esforços em estruturas isostáticas.

Na parte relativa ao cálculo de estruturas hiperestáticas foram resolvidos alguns dos tipos de estruturas lineares mais frequentes pelos processos dos esforços, dos deslocamentos e pelo processo de Cross.

As últimas páginas da publicação são constituídas por tabelas utilizadas na solução dos exercícios.

Í N D I C E

- EXERCÍCIO 1 - Deslocamentos em Estruturas Isostáticas -
Treliza Isostática
- EXERCÍCIO 2 - Deslocamentos em Estruturas Isostáticas -
Pórtico Triarticulado
- EXERCÍCIO 3 - Processo dos Esforços - Treliza Hiperestática
- EXERCÍCIO 4 - Processo dos Esforços - Viga Contínua
- EXERCÍCIO 5 - Processo dos Esforços - Pórtico Hiperestático
- EXERCÍCIO 6 - Processo dos Esforços - Grêlha
- EXERCÍCIO 7 - Processo dos Esforços - Viga Balcão
- EXERCÍCIO 8 - Processo dos Esforços - Viga Atirantada
-
- EXERCÍCIO 9 - Arco Atirantado - Propriedades Geométricas
Dadas em Diversas Seções
- EXERCÍCIO 10 - Arco Atirantado - $J \cos \alpha = \text{Constante}$, Eixo Para
bólico
- EXERCÍCIO 11 - Arco Atirantado - Eixo Circular e $J = \text{Constante}$
- EXERCÍCIO 12 - Arco Atirantado - Formado por Trechos Retos
- EXERCÍCIO 13 - Arco Biengastado - Propriedades Geométricas
Dadas em Diversas Seções
- EXERCÍCIO 14 - Arco Biengastado - $J \cos \alpha = \text{Constante}$, Eixo Para
bólico
- EXERCÍCIO 15 - Arco Biengastado - Eixo Circular e $J = \text{Constante}$
- EXERCÍCIO 16 - Arco Biengastado - Formado por Trechos Retos
-
- EXERCÍCIO 17 - Método de Cross - Viga Contínua
- EXERCÍCIO 18 - Método de Cross - Pórtico Indeslocável
- EXERCÍCIO 19 - Método de Cross - Pórtico Deslocável
- EXERCÍCIO 20 - Método de Cross - Viga Vierendell
- EXERCÍCIO 21 - Método de Cross - Pórtico Deslocável
- EXERCÍCIO 22 - Método de Cross - Pórtico com Grau de Deslocabi
lidade Negativo
- EXERCÍCIO 23 - Processo dos Deslocamentos - Treliza Hiperestática
- EXERCÍCIO 24 - Processo dos Deslocamentos - Viga Contínua

- EXERCÍCIO 25 - Processo dos Deslocamentos - Pórtico Hiperestático
- EXERCÍCIO 26 - Processo dos Deslocamentos - Grêlha
- EXERCÍCIO 27 - Linhas de Influência de Estruturas Isostáticas - Viga Gerber
- EXERCÍCIO 28 - Linhas de Influência de Estruturas Isostáticas - Treliça
- EXERCÍCIO 29 - Linhas de Influência de Estruturas Isostáticas - Arco Triarticulado
- EXERCÍCIO 30 - Linhas de Influência de Estruturas Isostáticas - Pórtico Triarticulado.

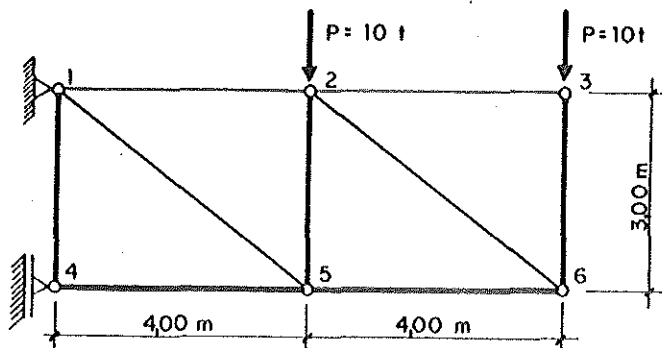
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 - M.C. STAMATO - "Deslocamentos em Estruturas Lineares" - EESC-USP - 1970 - 1.^a edição
 - 2 - F. SCHIEL - "Introdução à Resistência dos Materiais" - 3 fascículos - EESC-USP- 1969- 1.^a edição
 - 3 - M.C. STAMATO - "Introdução ao Processo de Cross" - EESC-USP - 1971 - 3.^a edição.
-

EXERCÍCIO 1 - Cálculo de Deslocamentos em Estruturas Isostáticas

1 - Enunciado e dados

Na treliça isostática da figura tôdas as barras são do mesmo material. As barras verticais e as do banço inferior têm secção transversal com área de 10 cm^2 e as restantes, área de 5 cm^2 .



$$E = 2100 \text{ t/cm}^2$$

$$\alpha = 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

Para o carregamento da figura calcular:

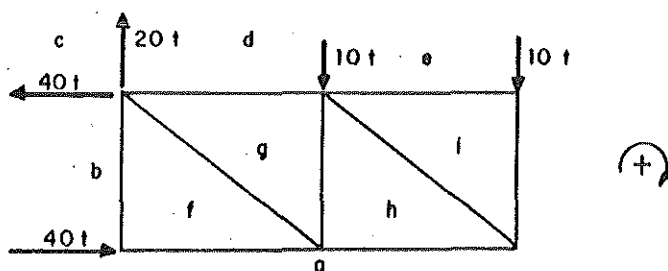
- O deslocamento vertical (flecha) do nó 6, para baixo
- O deslocamento relativo entre os nós 3 e 5 no sentido de aproximar os dois nós
- O giro da barra 2-3 no sentido horário
- O giro relativo entre as barras 1-2 e 2-3 no sentido de se ter convexidade para baixo

Calcular também o deslocamento vertical do nó 6, para baixo, devido a:

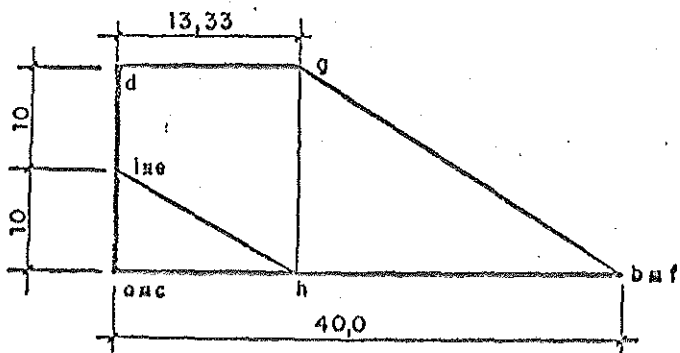
- Acréscimo de temperatura de $\Delta\theta = 30^\circ\text{C}$ nas barras do banço superior
- Um defeito de fabricação supondo que a barra 4-5 tenha sido construída com 4,05 m e a barra 3-6 com 3,02 m

2 - Problema(o) - Estado de deslocamentos correspondente ao carregamento dado

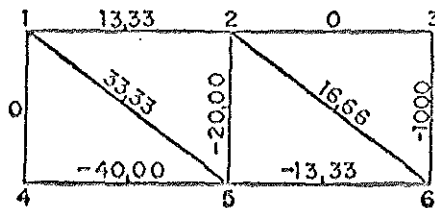
2-1 - Cargas na estrutura e numeração dos campos



2-2 - Plano Cremona

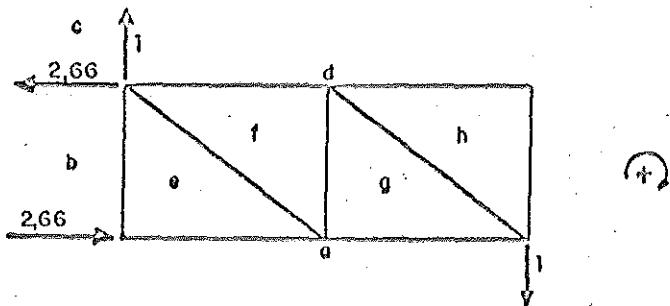


2-3 - Esforços $N_{oi}(t)$

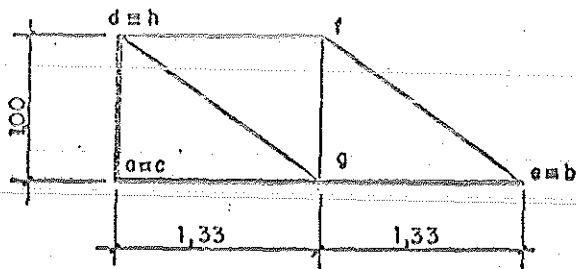


3 - Problema (1) - Esforços no estado de carregamento conveniente para cálculo de deslocamento vertical do nó 6

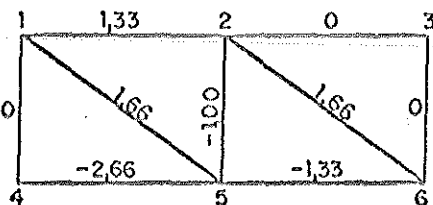
3-1 - Cargas na estrutura e numeração dos campos



3-2 - Plano Cremona



3-3 - Esforços N_{li}



3-4 - Deslocamento do ítem(a)

Pelo PTV:

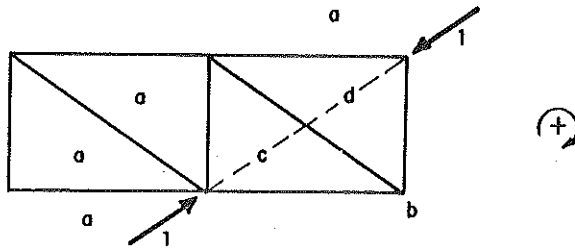
$$1 \cdot \delta_{v6} = \sum_i N_{li} \cdot \frac{N_{oi} \cdot l_i}{E_i \cdot S_i} = \frac{l_c}{E_c \cdot S_c} \cdot \sum_i \frac{l_i}{l_c} \cdot \frac{E_c}{E_i} \cdot \frac{S_c}{S_i} \cdot N_{oi} \cdot N_{li}$$

Da tabela 1, coluna 18

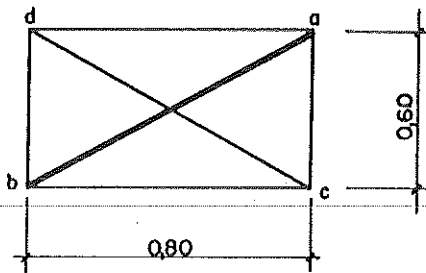
$$\delta_{v6} = 0,019 \cdot 380,95 = 7,23 \text{ cm}$$

4 - Problema(2) - Estado de carregamento conveniente para cálculo do deslocamento relativo entre os nós 3 e 5

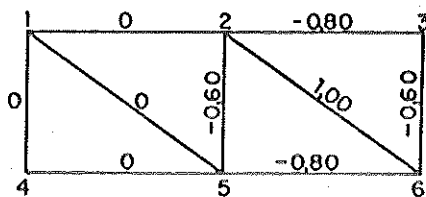
4-1 - Cargas na estrutura e numeração dos campos



4-2 - Plano Cremona



4-3 - Esforços N_{2i}



4-4 - Deslocamento do ítem (b)

Pelo PTV:

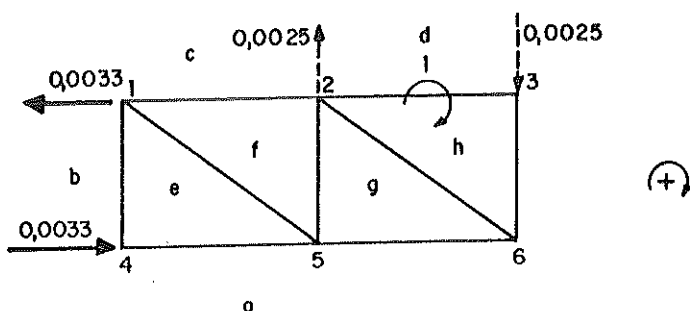
$$1 \cdot \delta_{3-5} = \sum_i N_{2i} \cdot \frac{N_{oi} \cdot l_i}{E_i \cdot S_i} = \frac{l_c}{E_c \cdot S_c} \cdot \sum_i \frac{l_i}{l_c} \cdot \frac{E_c}{E_i} \cdot \frac{S_c}{S_i} \cdot N_{oi} \cdot N_{2i}$$

Da tabela 1, coluna 19

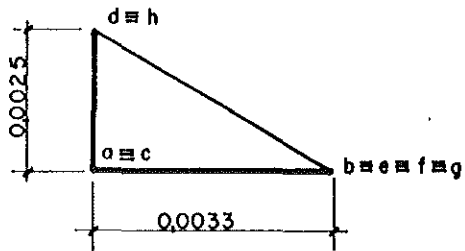
$$\delta_{3-5} = 0,019 \cdot 65,75 = 1,25 \text{ cm}$$

5 - Problema (3) - Estado de carregamento conveniente para cálculo do giro horário da barra 2-3

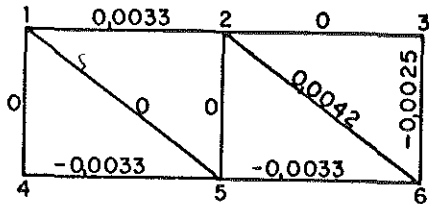
5-1 - Carga (unidades: t e cm) e numeração dos campos



5-2 - Plano Cremona



5-3 - Esforços N_{3i}



5-4 - Deslocamento do ítem(c)

Pelo PTV:

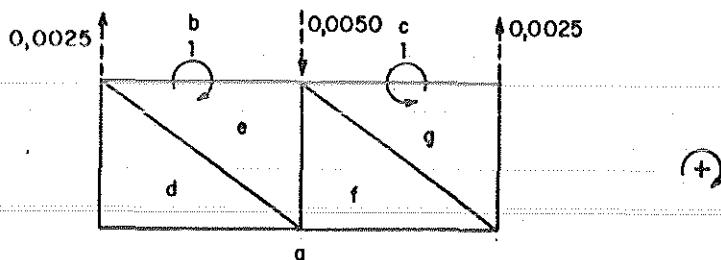
$$1 \cdot \phi_{2-3} = \sum_i N_{3i} \cdot \frac{N_{oi} \ell_i}{E_i S_i} = \frac{\ell_c}{E_c S_c} \cdot \sum_i \frac{\ell_i}{\ell_c} \cdot \frac{E_c}{E_i} \cdot \frac{S_c}{S_i} \cdot N_{oi} \cdot N_{3i}$$

Da tabela 1, coluna 20:

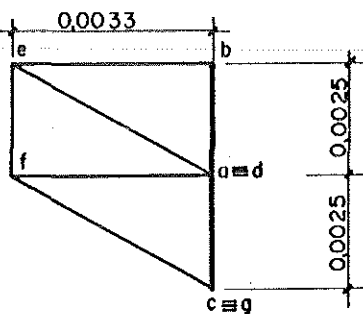
$$\phi_{2-3} = 0,019 \cdot 0,459 = 0,00875 \text{ rd}$$

6 - Problema (4) - Estado de carregamento conveniente para cálculo do giro relativo entre as barras 1-2 e 2-3

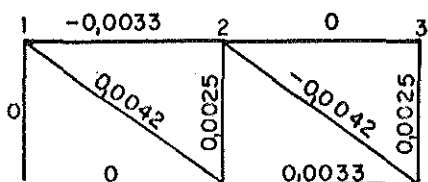
6-1 - Cargas (unidades: t e cm) e numeração dos campos



6-2 - Plano Cremona



6-3 - Esforços N_{4i}



6-4 - Deslocamento do ítem(d)

Pelo PTV:

$$1 \cdot \phi_{1-2/2-3} = \sum_i N_{4i} \cdot \frac{N_{oi} \ell_i}{E_i S_i} = \frac{\ell_c}{E_c S_c} \cdot \sum_i \frac{\ell_i}{\ell_c} \cdot \frac{E_c}{E_i} \cdot \frac{S_c}{S_i} \cdot N_{oi} \cdot N_{4i}$$

Da tabela 1, coluna 21:

$$\phi_{1-2/2-3} = 0,019 \cdot 0,061 = 0,00115 \text{ rd}$$

7 - Problema (5) - Estado de deslocamentos correspondente à variação de temperatura definida no ítem(e)

7-1 - Acréscimo de comprimento nas barras (cm)

$$\Delta \ell_{12} = \Delta \ell_{23} = \ell_{12} \cdot \alpha \cdot \Delta \theta = 400 \cdot 10^{-5} \cdot 30 = 0,12 \text{ cm}$$

7-2 - Deslocamento do ítem(e)

Pelo PTV:

$$1 \cdot \delta_{6\theta} = \sum_i N_{1i} \cdot \Delta \ell_{5i}$$

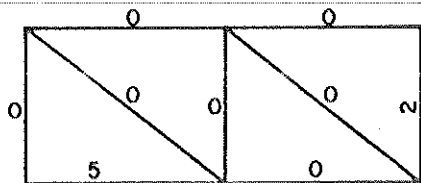
Da tabela 1, coluna 22:

$$\delta_{6\theta} = 0,16 \text{ cm}$$

8 - Problema (6) - Estado de deslocamento correspondente ao defeito de fabricação definido no ítem(f)

8-1 - Acréscimos nos comprimentos das barras (cm)

$$\Delta \ell_{14} = 405 - 400 = 5 \text{ cm} \quad \Delta \ell_{36} = 302 - 300 = 2 \text{ cm}$$



8-2 - Deslocamento do ítem(f)

Pelo PTV:

$$1 \cdot \delta_{6d} = \sum_i N_{1i} \cdot \Delta \ell_{6i}$$

Da tabela 1, coluna 23:

$$\delta_{6d} = -13,33 \text{ cm}$$

TABELA 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	barra	l_i/l_c	E_c/E_i	s_c/s_i	⑤ ④ ③	N_{oi}	N_{1i}	N_{2i}	N_{3i}	N_{4i}	Δl_{5i}	Δl_{6i}
b. sup.	1.2	1	1	2	2	13,33	1,33	0	0,0033	-0,0033	0,12	0
	2.3	1	1	2	2	0	0	-0,8	0	0	0,12	0
b. inf.	4.5	1	1	1	1	-40,00	-2,66	0	-0,0033	0	0	5
	5.6	1	1	1	1	-13,33	-1,33	-0,8	-0,0033	0,0033	0	0
mont.	1.4	0,75	1	1	0,75	0	0	0	0	0	0	0
	2.5	0,75	1	1	0,75	-20,00	-1,00	-0,6	0	-0,0025	0	0
	3.6	0,75	1	1	0,75	-10,00	0	-0,6	-0,0025	0,0025	0	2
diag.	1.5	1,25	1	2	2,50	33,33	1,66	0	0	0,0042	0	0
	2.6	1,25	1	2	2,50	16,66	1,66	1,0	0,0042	-0,0042	0	0
	Σ											

TABELA 1 (continuação)

1	2	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
	barra	$N_{oi} \cdot N_{1i}$	$N_{oi} \cdot N_{2i}$	$N_{oi} \cdot N_{3i}$	$N_{oi} \cdot N_{4i}$	$\textcircled{6} \cdot \textcircled{14}$	$\textcircled{6} \cdot \textcircled{15}$	$\textcircled{6} \cdot \textcircled{16}$	$\textcircled{6} \cdot \textcircled{17}$	$\textcircled{8} \cdot \textcircled{12}$	$\textcircled{8} \cdot \textcircled{13}$
b. sup.	1.2	17,65	0	0,044	-0,044	35,30	0	0,088	-0,088	0,16	0
	2.3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b. inf.	4.5	106,00	0	0,133	0	106,00	0	0,133	0	0	-13,33
	5.6	17,65	10,65	0,044	-0,044	17,65	10,65	0,044	-0,044	0	0
mont.	1.4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2.5	20,00	12,00	0	0,050	15,00	9,00	0	0,037	0	0
	3.6	0	6,00	0,025	-0,025	0	4,50	0,019	-0,019	0	0
diag.	1.5	55,40	0	0	0,140	138,00	0	0	0,350	0	0
	2.6	27,60	16,66	0,070	-0,070	69,00	41,60	0,175	-0,175	0	0
	Σ					380,95	65,75	0,459	0,061	0,16	-13,33

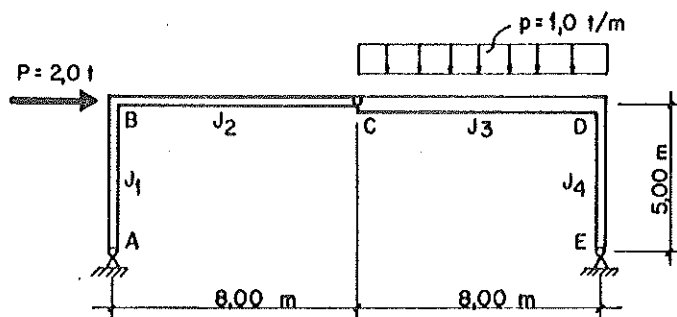
$$\begin{aligned} l_c &= 400 \text{ cm} \\ E_c &= E = 2100 \text{ t/cm}^2 \\ S_c &= 10 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\frac{l_c}{E_c S_c} = \frac{400}{2100 \cdot 10} = 0,019 \text{ cm/t}$$

EXERCÍCIO 2 - Deslocamento em Estruturas Isostáticas

1 - Enunciado e dados

A estrutura isostática da figura é executada em aço:



$$J_1 = 40\,000 \text{ cm}^4$$

$$J_2 = 20\,000 \text{ cm}^4$$

$$J_3 = 60\,000 \text{ cm}^4$$

$$J_4 = 60\,000 \text{ cm}^4$$

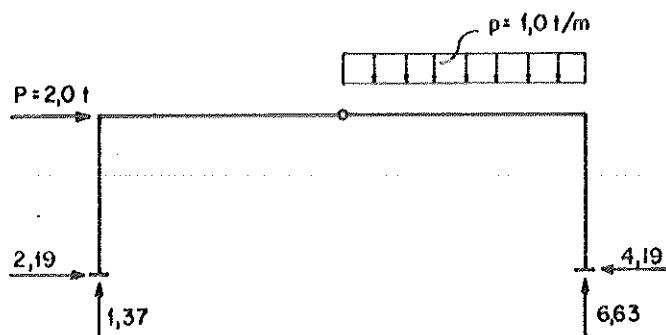
$$E = 2\,100 \text{ t/cm}^2$$

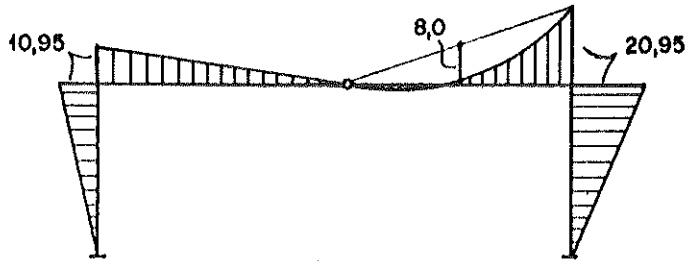
Calcular:

- O deslocamento vertical, para baixo, do ponto C
- O giro relativo, no sentido de produzir convexidade em baixo, entre as extremidades das duas barras que concorrem na articulação C
- O giro horário do nó B

2 - Problema(o) - Estado de deslocamento correspondente ao carregamento dado

2-1 - Cargas na estrutura

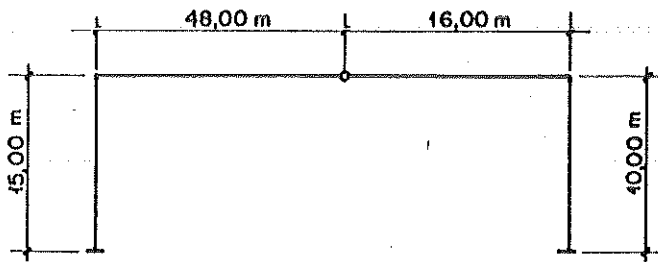


2-2 - Momentos fletores M_o (tm)3 - Comprimentos fictícios l'

$$l' = \frac{E_c J_c}{E J} \cdot l$$

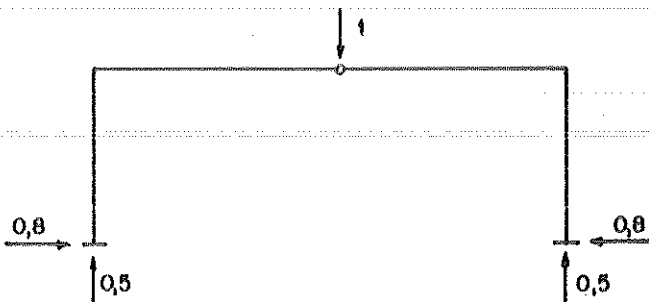
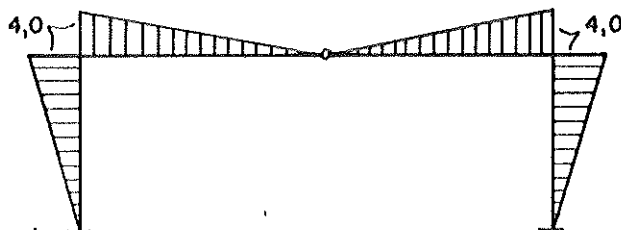
$$J_c = 120\,000 \text{ cm}^4$$

$$E_c = 2\,100 \text{ t/cm}^2$$



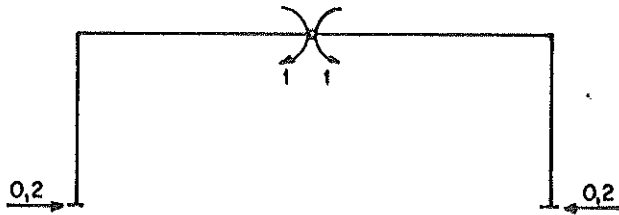
4 - Problema(1) - Estado de carregamento conveniente para cálculo do deslocamento vertical do nó C

4-1 - Cargas na estrutura

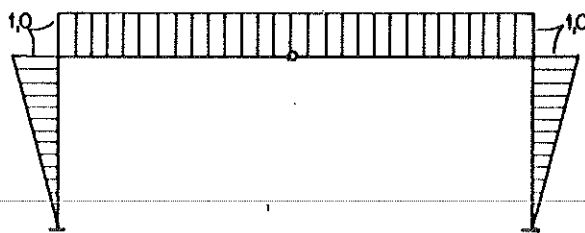
4-2 - Momentos fletores M_1 (m)

5 - Problema(2) - Estado de carregamento conveniente para cálculo do giro relativo em C.

5-1 - Cargas na estrutura

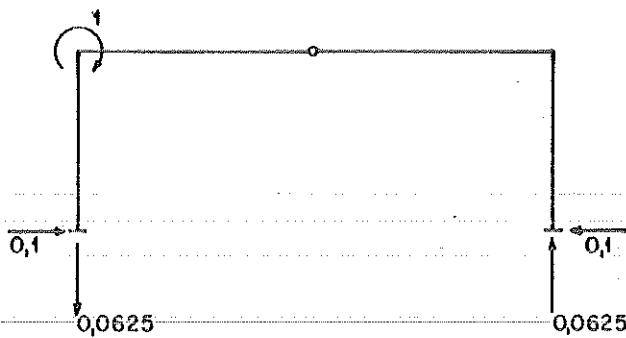


5-2 - Momentos fletores M_2

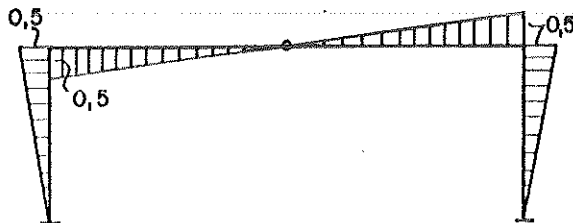


6 - Problema(3) - Estado de carregamento conveniente para cálculo do giro horário do nó B.

6-1 - Cargas na estrutura



6-2 - Momentos fletores M_3



7 - Cálculo dos deslocamentos

7-1 - Expressão geral para o problema:

$$\delta_{ij} = \int_{est} M_i \frac{M_j ds}{EJ} = \frac{1}{E_c J_c} \int_{est} \frac{E_c J_c}{EJ} M_i M_j ds = \frac{1}{E_c J_c} \int_{est} M_i M_j ds'$$

$$\delta_{ij} = \sum_k \int_0^{\ell'_k} M_{ik} M_{jk} ds' \text{ para todos os trechos } k \text{ considerados,}$$

sendo essas integrais de produtos de funções calculadas com a tabela A1 do anexo.

7-2 - Deslocamento vertical do ponto C.

$$E_c J_c \delta_{10} = \sum_k \int_0^{\ell'_k} M_{ok} M_{1k} ds'$$

$$E_c J_c \delta_{10} = 15,0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4,0 \cdot 10,95 + 48,0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4,0 \cdot 10,95 + 16,0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4,0 \cdot 20,95 - 16,0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4,0 \cdot 8,0 + 10,0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4,0 \cdot 20,95 = 1474$$

$$\delta_{10} = \frac{1474}{2100 \cdot 120000 \cdot 10^{-4}} = \frac{1474}{25200} = 0,0585 \text{ m}$$

7-3 - Giro relativo em C

$$E_c J_c \delta_{20} = \sum_k \int_0^{\ell'_k} M_{ok} M_{2k} ds'$$

$$E_c J_c \delta_{20} = 15,0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1,0 \cdot 10,95 + 48,0 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,0 \cdot 10,95 + 16,0 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,0 \cdot 20,95 - 16,0 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,0 \cdot 8,0 + 10,0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 20,95 \cdot 1,0 = 469,5$$

$$\delta_{20} = \frac{469,5}{25200} = 0,01862 \text{ rd}$$

7-4 - Giro horário do nó B

$$E_c J_c \delta_{30} = \sum_k \int_0^{\ell'_k} M_{ok} M_{3k} ds'$$

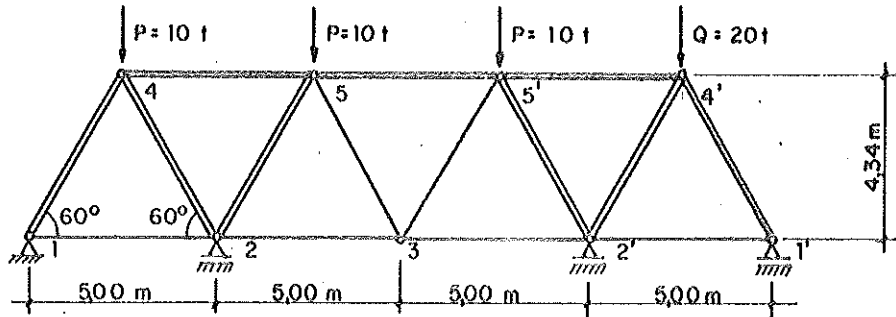
$$E_c J_c \delta_{30} = 15,0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,5 \cdot 10,95 - 48,0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,5 \cdot 10,95 + 16,0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,5 \cdot 20,95 - 16,0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,5 \cdot 8,0 + 10,0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,5 \cdot 20,95 = 9,3$$

$$\delta_{30} = \frac{9,3}{25200} = 0,000369 \text{ rd}$$

EXERCÍCIO 3 - Processo dos esforços

1 - Enunciado e dados

Determinar os esforços na treliça da figura, submetida ao carregamento dado. As barras desenhadas em traço duplo tem área de seção transversal igual a 30 cm^2 e as demais 5 cm^2 . Todas as barras são do mesmo material



2 - Verificação do grau de indeterminação geométrica e estática

nº de barras: $b = 20$

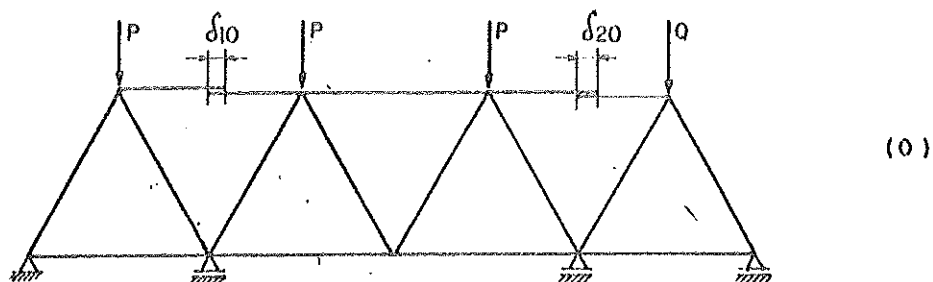
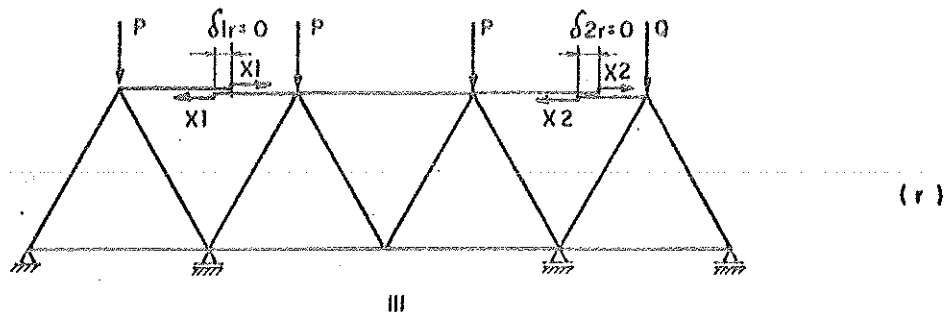
nº de nós: $n = 9$

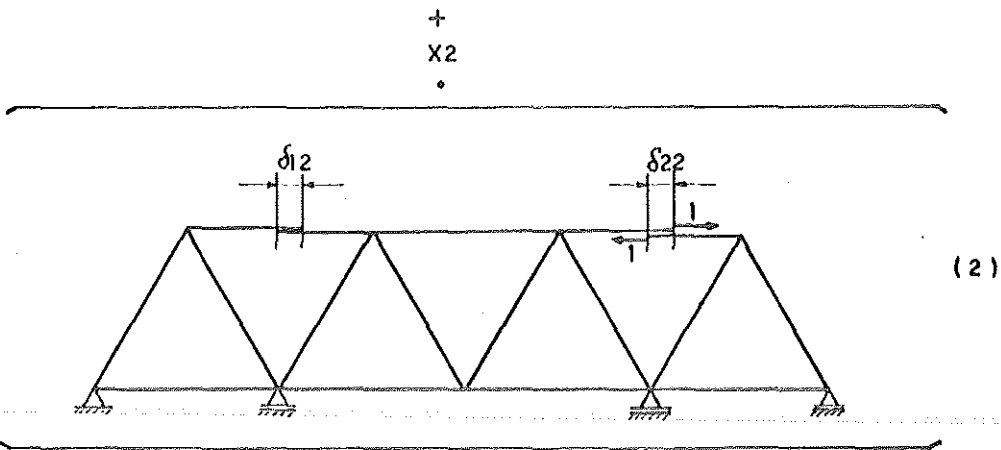
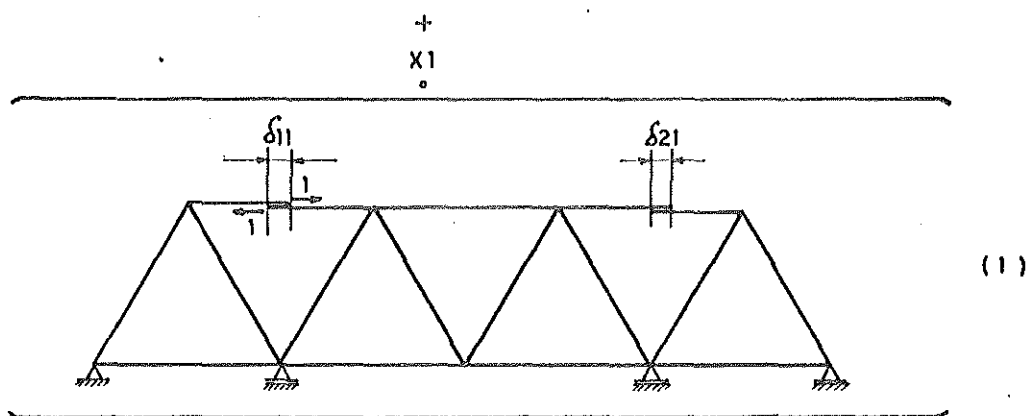
$$\therefore b > 2n ; b = 2n + r ; r = 2$$

A estrutura tem grau de hiperestaticidade 2.

3 - Esquema de solução

Retirando tantos vínculos quantos necessários para transformar a estrutura dada numa estrutura isostática e substituindo-os pelos esforços incógnitos correspondentes (escolher esses esforços cuidadosamente no sentido de se obter uma estrutura básica tão simples quanto possível) temos:





$$(r) = (o) + X1 \cdot (1) + X2 \cdot (2)$$

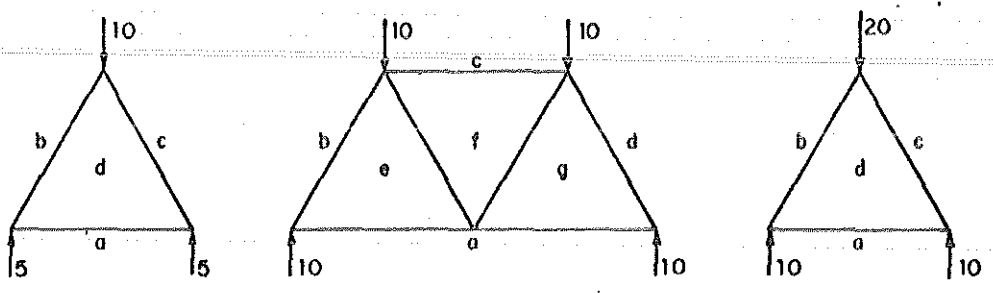
4 - Equações de compatibilidade de deslocamentos

$$\delta_{1r} = \delta_{10} + X1 \cdot \delta_{11} + X2 \cdot \delta_{12} = 0$$

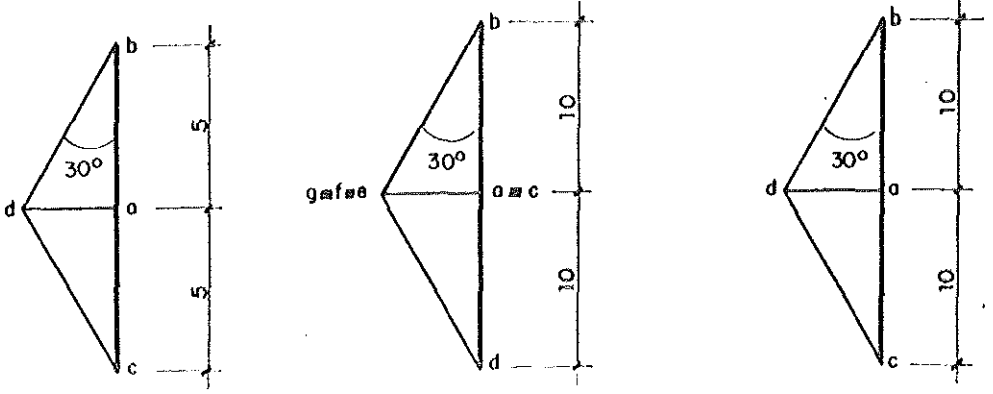
$$\delta_{2r} = \delta_{20} + X1 \cdot \delta_{21} + X2 \cdot \delta_{22} = 0$$

5 - Problema(o) - Estado de deslocamentos correspondentes às cargas externas.

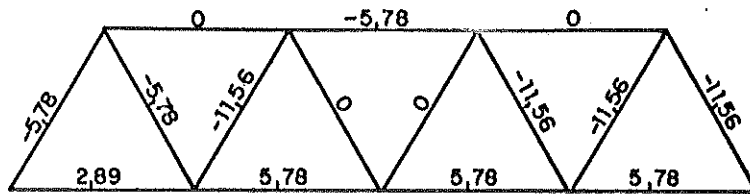
5-1 - Cargas aplicadas e numeração dos campos



5-2 - Plano Cremona

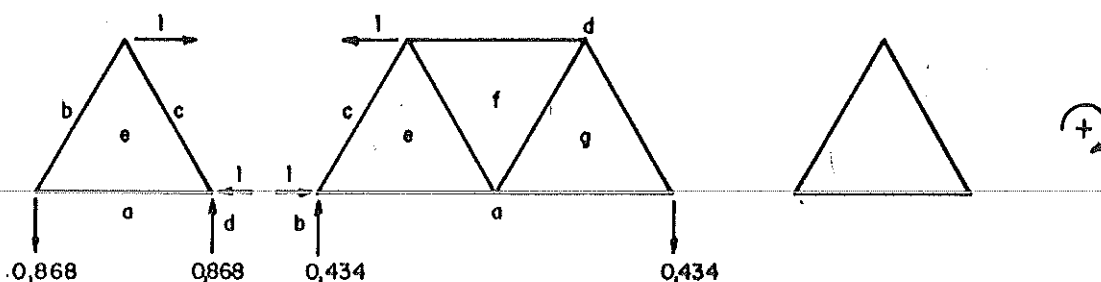


5-3 - Esforços N_{oi}

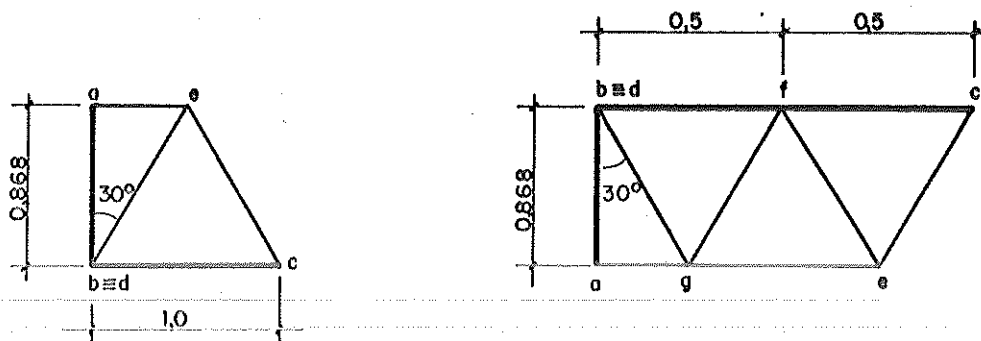


6 - Problema (1) - Estado de deslocamento (ou de carregamento) correspondente a um esforço unitário aplicado na direção da incôgnita X_1 .

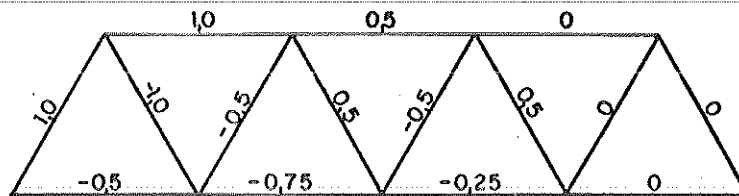
6-1 - Cargas aplicadas e numeração dos campos



6-2 - Plano Cremona

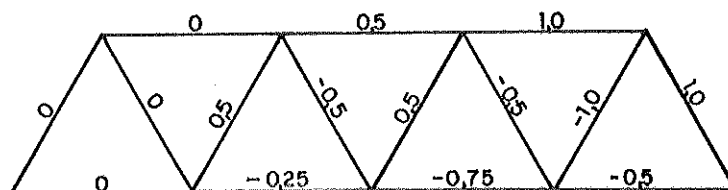


6-3 - Esforços N_{1i}



7 - Problema (2) - Estado de deslocamento (ou de carregamento) correspondente a um esforço unitário aplicado na direção da incôgnita X_2 . Por simetria em relação ao problema (1) temos:

7-1 - Esforços N_{2i}



8 - Cálculo dos deslocamentos

8-1 - Expressão geral para o problema

Sendo j correspondente ao estado de carregamento com esforço unitário aplicado na direção da incógnita X_j , e k correspondente ao problema (k),

$$j = 1, 2$$

$$k = 0, 1, 2$$

temos, pelo PTV:

$$\delta_{jk} = \frac{\ell_c}{E_c S_c} \sum_i \frac{\ell_i}{\ell_c} \cdot \frac{S_c}{S_i} \cdot \frac{E_c}{E_i} \cdot N_{ji} \cdot N_{ki}$$

8-2 - Valores numéricos dos deslocamentos.

Da tabela 3, colunas 14, 15, 16, 17 temos, respectivamente:

$$\frac{E_c S_c}{\ell_c} \delta_{10} = -24,55$$

$$\frac{E_c S_c}{\ell_c} \delta_{20} = -28,87$$

$$\frac{E_c S_c}{\ell_c} \delta_{11} = \frac{E_c S_c}{\ell_c} \delta_{22} = -0,62$$

$$\frac{E_c S_c}{\ell_c} \delta_{12} = \frac{E_c S_c}{\ell_c} \delta_{21} = 7,79$$

9 - Solução do sistema de equações

Multiplicando tôdas as equações do ítem 4 por $\frac{E_c S_c}{\ell_c}$ e substituindo os valores do ítem 8-2 temos:

$$7,79.X1 - 0,62.X2 = 24,55$$

$$-0,62.X1 + 7,79.X2 = 28,87$$

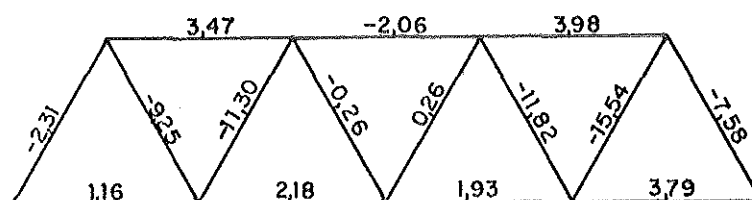
cuja solução é:

$$X1 = 3,47 \text{ t}$$

$$X2 = 3,98 \text{ t}$$

10 - Superposição de efeitos:

$$N_{ri} = N_{oi} + X1.N_{1i} + X2.N_{2i}$$



(t)

TABELA 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
tipo	barra	$\frac{\ell_i}{\ell_c}$	$\frac{S_c}{S_i}$	$\frac{E_i}{E_c}$	$\textcircled{3} \textcircled{4} \textcircled{5}$	N_{oi}	N_{li}	N_{2i}	$\textcircled{7} \cdot \textcircled{8}$	$\textcircled{7} \cdot \textcircled{9}$	$\textcircled{8} \cdot \textcircled{9}$	$\textcircled{8} \cdot \textcircled{8}$	$\textcircled{6} \cdot \textcircled{10}$	$\textcircled{6} \cdot \textcircled{11}$	$\textcircled{6} \cdot \textcircled{12}$	$\textcircled{6} \cdot \textcircled{13}$	$X1 \cdot N_{1i}$	$X2 \cdot N_{2i}$	N_{ri}
b. sup.	4 -5	1	1	1	1	0	1,00	0	0	0	0	1,00	0	0	0	1,00	3,47	0	3,47
	5 -5'	1	1	1	1	- 5,78	0,50	0,50	-2,89	- 2,89	0,250	0,25	- 2,89	- 2,89	0,250	0,25	1,73	1,99	- 2,06
	5' -4'	1	1	1	1	0	0	1,00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3,98	3,98
b. inf.	1 -2	1	3	1	3	2,89	-0,50	0	-1,45	0	0	0,25	- 4,33	0	0	0,75	-1,73	0	1,16
	2 -3	1	3	1	3	5,78	-0,75	-0,25	-4,33	- 1,45	0,188	0,56	-13,00	- 4,33	0,565	1,60	-2,60	-1,00	2,18
	3 -2'	1	3	1	3	5,78	-0,25	-0,75	-1,45	- 4,33	0,188	0,06	- 4,33	-13,00	0,565	0,19	-0,86	-2,99	1,93
	2' -1'	1	3	1	3	5,78	0	-0,50	0	- 2,89	0	0	0	- 8,65	0	0	0	-1,99	3,79
diagonais	1 -4	1	1	1	1	- 5,78	1,00	0	-5,78	0	0	1,00	- 5,78	0	0	1,00	3,47	0	- 2,31
	4 -2	1	1	1	1	- 5,78	-1,00	0	5,78	0	0	1,00	5,78	0	0	1,00	-3,47	0	- 9,25
	2 -5	1	1	1	1	-11,56	-0,50	0,50	5,78	- 5,78	-0,250	0,25	5,78	- 5,78	-0,250	0,25	-1,73	1,99	-11,30
	5 -3	1	3	1	3	0	0,50	-0,50	0	0	-0,250	0,25	0	0	-0,750	0,75	1,73	-1,99	- 0,26
	3 -5'	1	3	1	3	0	-0,50	0,50	0	0	-0,250	0,25	0	0	-0,750	0,75	-1,73	1,99	0,26
	5' -2'	1	1	1	1	-11,56	0,50	-0,50	-5,78	5,78	-0,250	0,25	- 5,78	5,78	-0,250	0,25	1,73	-1,99	-11,82
	2' -4'	1	1	1	1	-11,56	0	-1,00	0	11,56	0	0	0	11,56	0	0	0	-3,98	-15,54
	4' -1'	1	1	1	1	-11,56	0	1,00	0	-11,56	0	0	0	-11,56	0	0	0	3,98	- 7,58
Σ													-24,55	-28,87	-0,62	7,79			

$\ell_c = 500 \text{ cm}$

$S_c = 30 \text{ cm}^2$

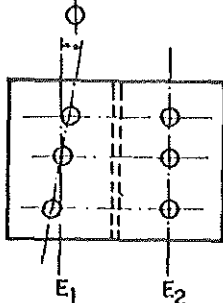
$E_i = E_c = \text{constante}$

EXERCÍCIO 4 - Processo dos esforços

1 - Enunciado e dados

Na viga contínua da figura, construída com três trechos de perfil metálico I18" x 6" x 0,629, cada um com 10 metros de comprimento, ligados por cobrejuntas, calcular:

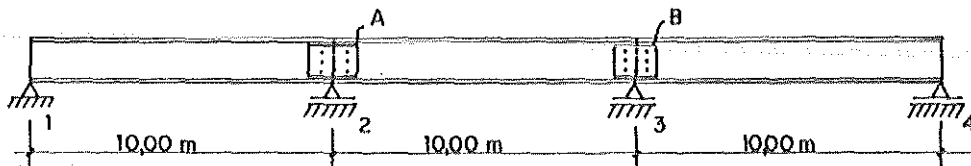
a) O efeito de falta de ajuste, supondo que a cobrejunta A tenha sido construída com o seguinte defeito:



$$\phi = 0,01 \text{ rd}$$

E1, E2 - alinhamento previsto para os rebites

b) O efeito de uma variação de temperatura tal que faça com que o banzo superior esteja com $\Delta t = 20^\circ\text{C}$ a mais de temperatura do que o banzo inferior.



Características do perfil I 18" x 6" x 0,629

$$h = 457,2 \text{ mm}$$

$$J = 36\,500 \text{ cm}^4$$

$$W = 1\,600 \text{ cm}^3$$

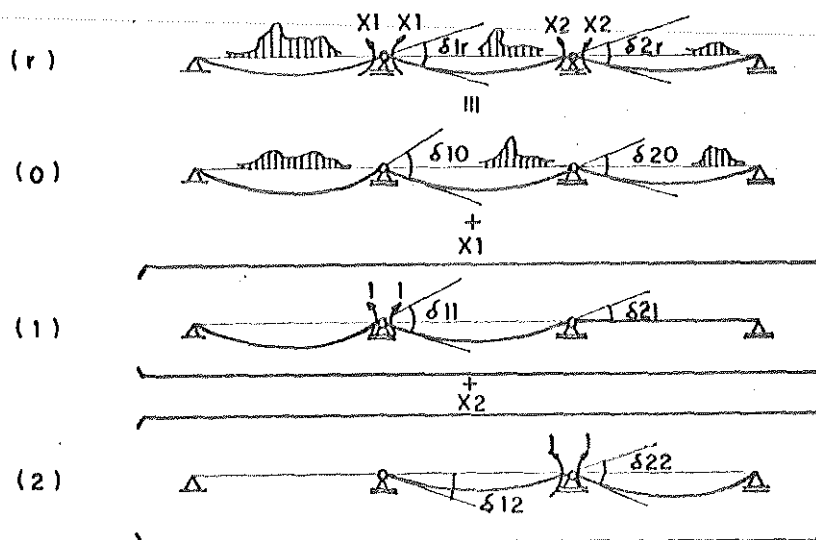
$$S = 123 \text{ cm}^2$$

Características do aço

$$E = 2100 \text{ t/cm}^2$$

$$\alpha = 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$$

2 - Esquema de solução



$$(r) = (o) + X1 \cdot (1) + X2 \cdot (2)$$

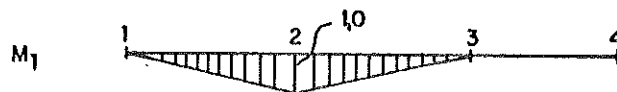
3 - Equações de compatibilidade de deslocamentos

$$\delta_{1r} = \delta_{10} + X1 \cdot \delta_{11} + X2 \cdot \delta_{12}$$

$$\delta_{2r} = \delta_{20} + X1 \cdot \delta_{21} + X2 \cdot \delta_{22}$$

4 - Esforços nos estados de carregamento (1) e (2) convenientes para determinar os deslocamentos nas direções das incógnitas $X1$ e $X2$, respectivamente, quando a eles são impostos os deslocamentos dos problemas (o), (1) e (2)

4-1 - Problema(1) - Esforços



4-2 - Problema(2) - Esforços



5 - Problema(r) - Estado de deslocamentos

5-1 - Item(a) - Falta de ajuste

$$\delta_{1r}^a = -\phi = -0,01 \text{ rd}$$

$$\delta_{2r}^a = 0$$

5-2 - Item(b) - Temperatura

$$\delta_{1r}^b = 0$$

$$\delta_{2r}^b = 0$$

6 - Problema(o) - Estado de deslocamentos

6-1 - Item(a) - Falta de ajuste

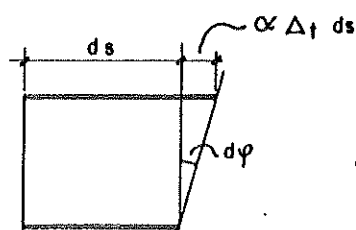
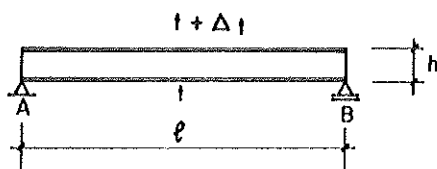
$$\delta_{10}^a = 0$$

$$\delta_{20}^a = 0$$

6-2 - Item(b) - Temperatura

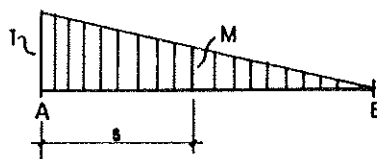
A estrutura básica consiste de três vigas biapoçadas em suas extremidades. Para se calcular δ_{10}^b e δ_{20}^b basta compor convenientemente os giros de extremidade dessas vigas.

6-2-1 - Estado de deslocamentos na viga biapoçada



$$d\phi = \frac{\alpha \Delta t ds}{h}$$

6-2-2 Estado de carregamento conveniente para calcular o giro da extremidade A



$$M = 1 - \frac{s}{l}$$

6-2-3 - Cálculo do giro

Impondo os deslocamentos do ítem 6-2-1 ao estado de carregamento do ítem 6-2-2 temos:

$$\delta = \int_{\text{estr}} M d\phi = \int_0^l \left(1 - \frac{s}{l}\right) \frac{\alpha \Delta t}{h} ds = \frac{\alpha \Delta t}{h} \left[s - \frac{s^2}{2l} \right]_0^l = \frac{\alpha \Delta t l}{2h}$$

6-2-4 - Deslocamentos segundo as direções de X1 e X2 no problema(o)

$$\delta_{10}^b = -2 \cdot \delta = -2 \frac{\alpha \Delta t l}{2h} = \frac{-10^{-5} \cdot 20 \cdot 10}{0,4572} = -4,36 \cdot 10^{-3} \text{ rd}$$

$$\delta_{20}^b = -2 \cdot \delta = -4,36 \cdot 10^{-3} \text{ rd}$$

7 - Problema(1) - Estado de deslocamentos

$$\delta_{11} = \int_{\text{estr}} M_1 \cdot \frac{M_1 ds}{EJ} = 2 \cdot \frac{1}{EJ} \cdot 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1,0^2 = \frac{6,66}{7665} = 0,87 \cdot 10^{-3} \text{ rd}$$

$$EJ = 2100 \cdot 36500 = 7,665 \cdot 10^7 \text{ tcm}^2 = 7665 \text{ tm}^2$$

$$\delta_{21} = \int_{\text{estr}} M_2 \cdot \frac{M_1 ds}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot 10 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1,0^2 = 0,22 \cdot 10^{-3} \text{ rd}$$

8 - Problema(2) - Estado de deslocamentos

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 0,22 \cdot 10^{-3} \text{ rd}$$

$$\delta_{22} = \delta_{11} = 0,87 \cdot 10^{-3} \text{ rd}$$

9 - Solução do sistema de equações de compatibilidade:

9-1 - Item(a) - Falta de ajuste

$$-0,01 = 0 + X1 \cdot 0,87 \cdot 10^{-3} + X2 \cdot 0,22 \cdot 10^{-3}$$

$$0 = 0 + X1 \cdot 0,22 \cdot 10^{-3} + X2 \cdot 0,87 \cdot 10^{-3}$$

que tem como solução:

$$X1 = -12,26 \text{ tm}$$

$$X2 = 3,11 \text{ tm}$$

9-2 - Item(b) - Temperatura

$$0 = -4,36 \cdot 10^{-3} + X1 \cdot 0,87 \cdot 10^{-3} + X2 \cdot 0,22 \cdot 10^{-3}$$

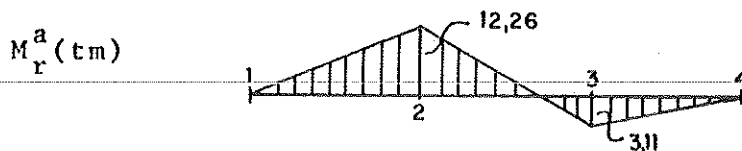
$$0 = -4,36 \cdot 10^{-3} + X1 \cdot 0,22 \cdot 10^{-3} + X2 \cdot 0,87 \cdot 10^{-3}$$

que tem como solução:

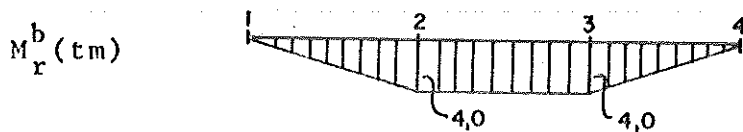
$$X1 = X2 = 4,0 \text{ tm}$$

10 - Superposição de efeitos; momentos fletores

10-1 - Item(a) - Falta de ajuste



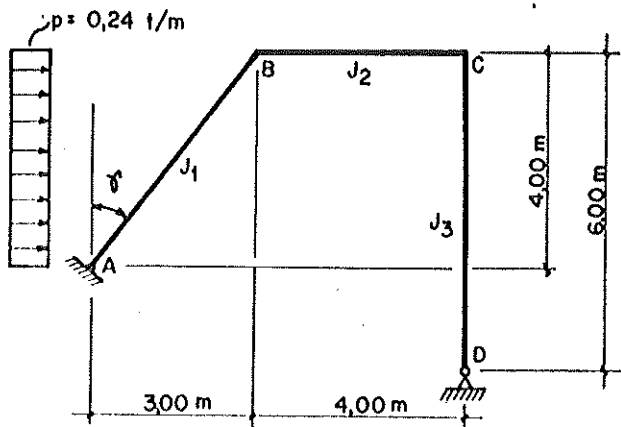
10-2 - Item(b) - Temperatura



EXERCÍCIO 5 - Processo dos esforços

1 - Enunciado e dados

Determinar os diagramas de momento fletor para o pórtico da figura:



$$E = 2100 \text{ t/cm}^2$$

$$J_1 = 10000 \text{ cm}^4$$

$$J_2 = 15000 \text{ cm}^4$$

$$J_3 = 20000 \text{ cm}^4$$

$$\text{sen } \gamma = 0,6$$

$$\text{cos } \gamma = 0,8$$

2 - Verificação da determinação geométrica e estática

nº de chapas: $c = 1$

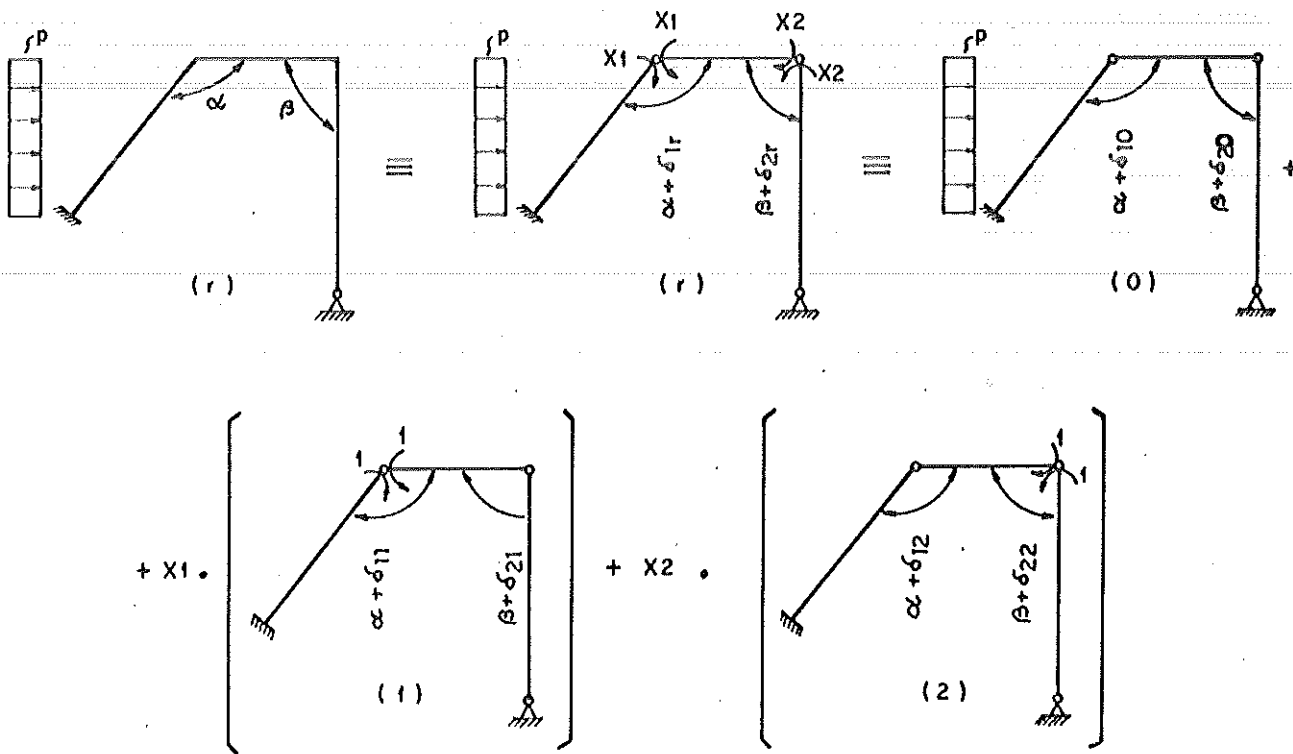
nº de barras: $b = 5$

$\therefore b > 3c ; b = 3c + r ; r = 2$

A estrutura tem grau de hiperestaticidade 2

3 - Esquema de solução:

Retirando 2 vínculos para transformar a estrutura dada em uma estrutura isostática e substituindo pelos esforços correspondentes, temos:



$$(r) = (o) + X_1.(1) + X_2.(2)$$

4 - Equações de compatibilidade de deslocamentos

$$\delta_{1r} = \delta_{10} + X_1.\delta_{11} + X_2.\delta_{12} = 0$$

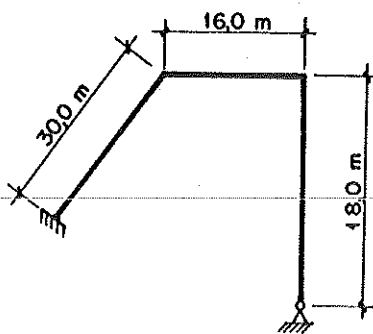
$$\delta_{2r} = \delta_{20} + X_1.\delta_{21} + X_2.\delta_{22} = 0$$

5 - Comprimentos fictícios

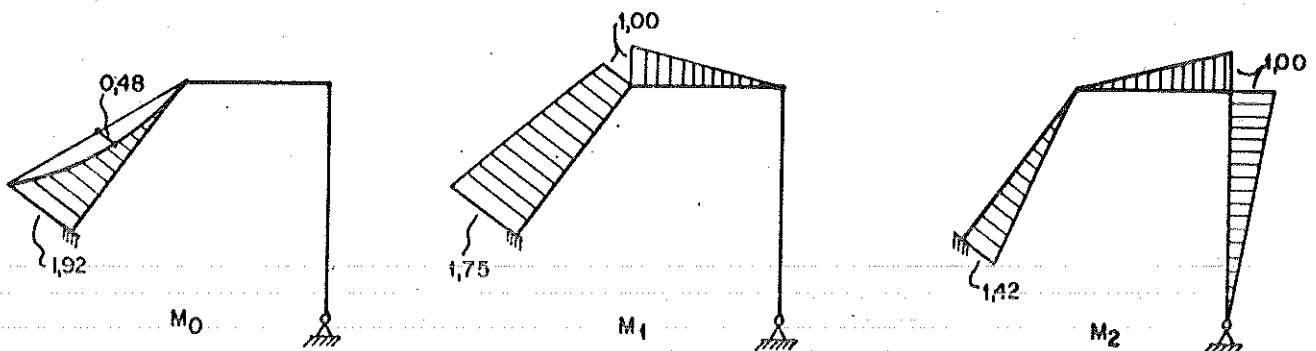
$$\ell' = \ell \frac{E_c J_c}{E J}$$

$$E_c = \text{constante} = 2100 \text{ t/cm}^2$$

$$J_c = 60000 \text{ cm}^4$$



6 - Esforços (momentos fletores) nos problemas (o), (1) e (2); tm:



7 - Cálculo dos deslocamentos

7-1 - Expressão geral

$$\delta_{ij} = \int_{\text{estr}} M_i \frac{M_j ds}{EJ} = \frac{1}{E_c J_c} \int_{\text{estr}} \frac{E_c J_c}{E J} M_i M_j ds = \frac{1}{E_c J_c} \int_{\text{estr}} M_i M_j ds'$$

$$\delta_{ij} = \sum_k \int_0^{\ell'_k} M_{ik} M_{jk} ds' \text{ para todos os trechos } k, \text{ considerados.}$$

7-2 - Utilizando a tabela A1 do anexo, correspondente às integrais de produtos de funções temos:

$$E_c J_c \delta_{10} = 30,0 \cdot \frac{1}{12} \cdot (3 \cdot 1,75 + 1,0) \cdot 1,92 = 30,0$$

$$E_c J_c \delta_{20} = -30,0 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1,42 \cdot 1,92 = -20,5$$

$$E_c J_c \delta_{11} = 30,0 \cdot \frac{1}{3} \cdot (1,0^2 + 1,75^2 + 1,0 \cdot 1,75) + 16,0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1,0^2 =$$

$$= 63,43$$

$$E_c J_c \delta_{21} = -30,0 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1,42(2 \cdot 1,75 + 1,00) + 16,0 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1,0 \cdot 1,0 =$$

$$= -29,30$$

$$E_c J_c \delta_{22} = 30,0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1,42^2 + 16,0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1,0^2 + 18,0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1,0^2 =$$

$$= 31,5$$

$$E_c J_c \delta_{12} = E_c J_c \delta_{21} \text{ pelo Teorema da Reciprocidade}$$

8 - Solução do sistema de equações

Multiplicando tôdas as equações do ítem (4) pelo fator $E_c J_c$ e substituindo os valores do ítem (7) temos:

$$63,43 \cdot X_1 - 29,3 \cdot X_2 = -30,0$$

$$-29,3 \cdot X_1 + 31,5 \cdot X_2 = 20,5$$

cuja solução é:

$$X_1 = -0,305$$

$$X_2 = 0,370$$

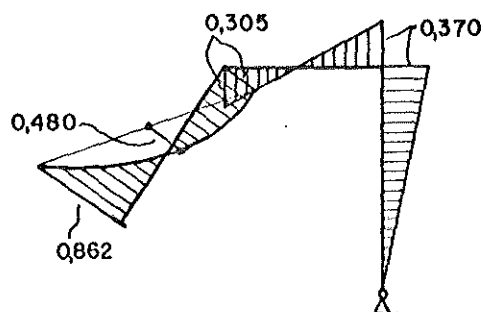
9 - Superposição de efeitos

$$M_r = M_o + X_1 \cdot M_1 + X_2 \cdot M_2$$

Convencionando positivos os momentos que provocam tração no lado de fora do pórtico:

	M_{AB}	$M_{BA} = M_{BC}$	$M_{CB} = M_{CD}$
(1)	1,750	1,000	0
(2)	-1,420	0	1,000
(o)	1,920	0	0
X1.(1)	-0,533	-0,305	0
X2.(2)	-0,525	0	0,370
(r)	0,862	-0,305	0,370

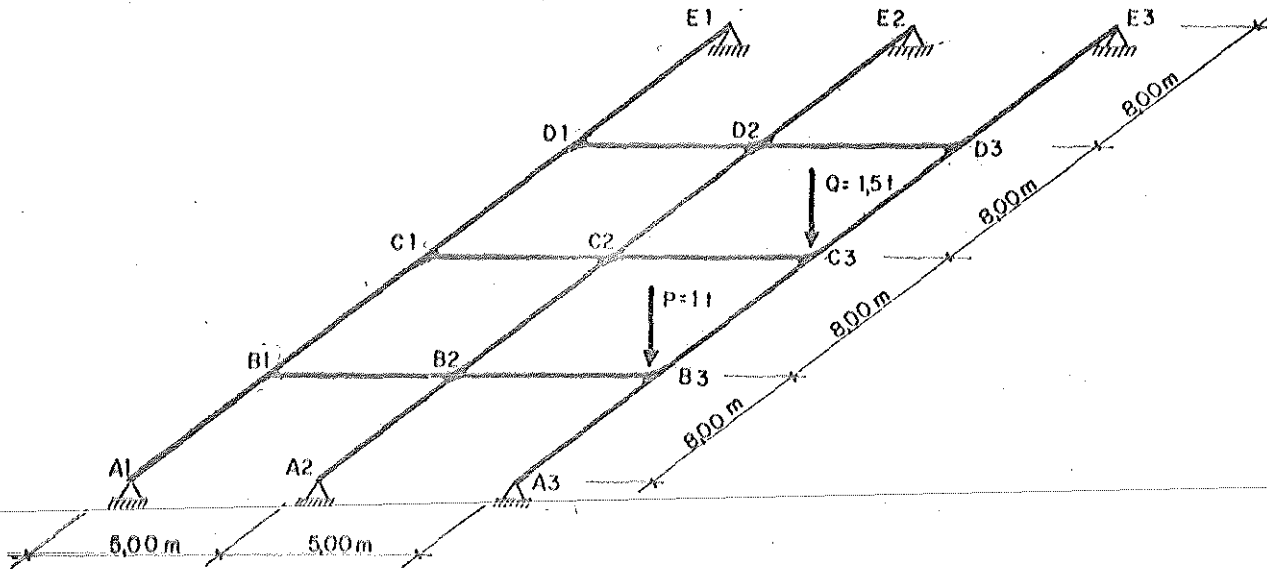
10 - Diagrama de momentos fletores (tm)



EXERCÍCIO 6 - Processo dos Esforços

1 - Enunciado e dados

Determinar o diagrama de momento fletor na grêlha da figura. Admitir que as vinculações tanto externas como internas dos elementos retilíneos da estrutura são transmitam esforço vertical



Momentos de inércia das longarinas:

$$J_1 = 0,045 \text{ m}^4$$

Momentos de inércia das transversinas

$$J_2 = 0,015 \text{ m}^4$$

2 = Verificação do grau de determinação estática da estrutura dentro das hipóteses feitas para este problema.

Para esse tipo de estrutura pode-se pensar numa regra para determinar o grau de hiperestaticidade; isole-se as vigas, ou chapas, componentes da estrutura. Cada uma dessas chapas exige dois vínculos para ser determinada; assim nesse problema pode-se pensar em seis chapas, as longarinas 1, 2 e 3 e as transversinas D, B, C. Temos então:

$$e = 6$$

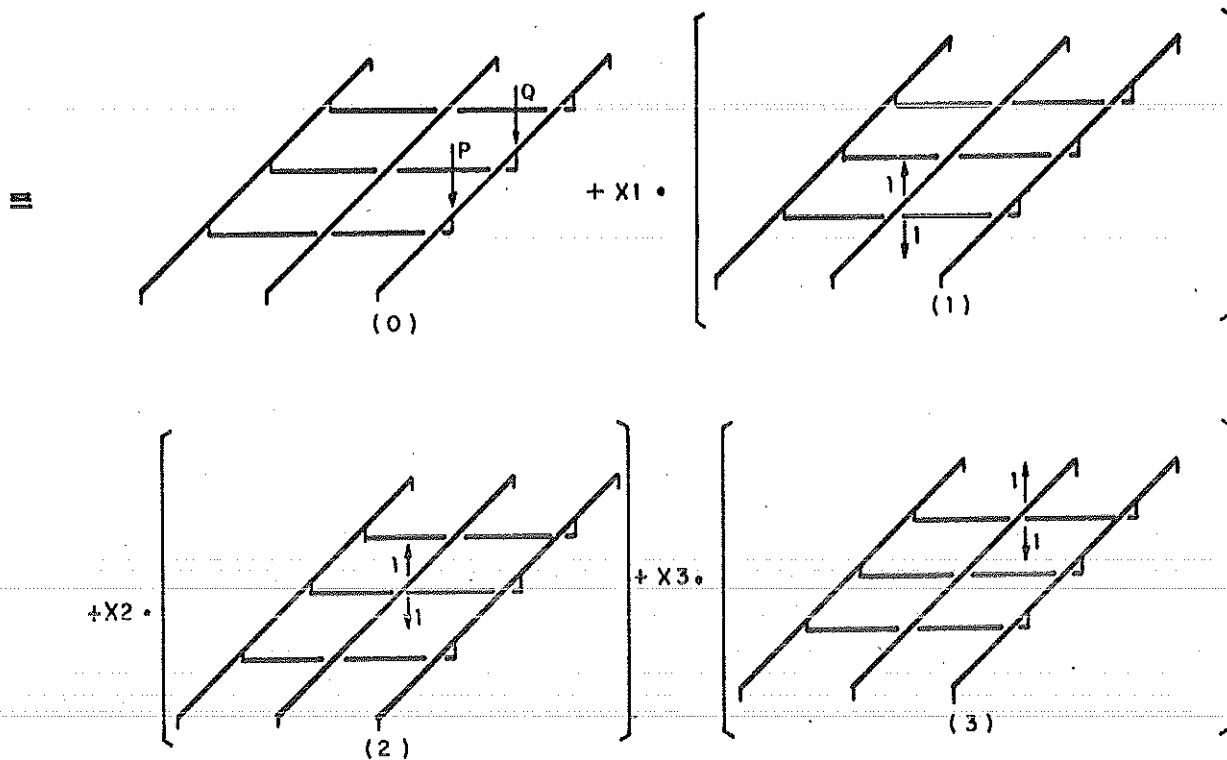
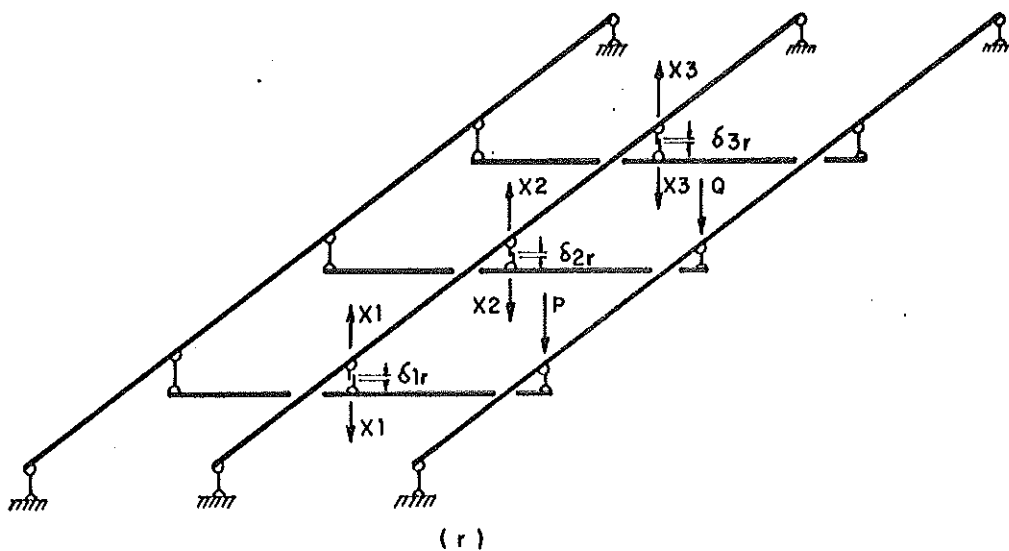
Contando os vínculos externos num apoio como correspondendo uma barra a cada chapa que converge a esse apoio, temos:

$$b = 15$$

$$b > 2e ; b = 2e + r ; r = 3$$

A estrutura é três vezes hiperestática

3 - Esquema de solução

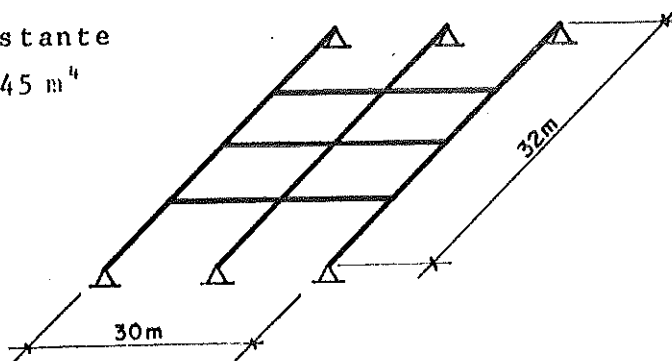


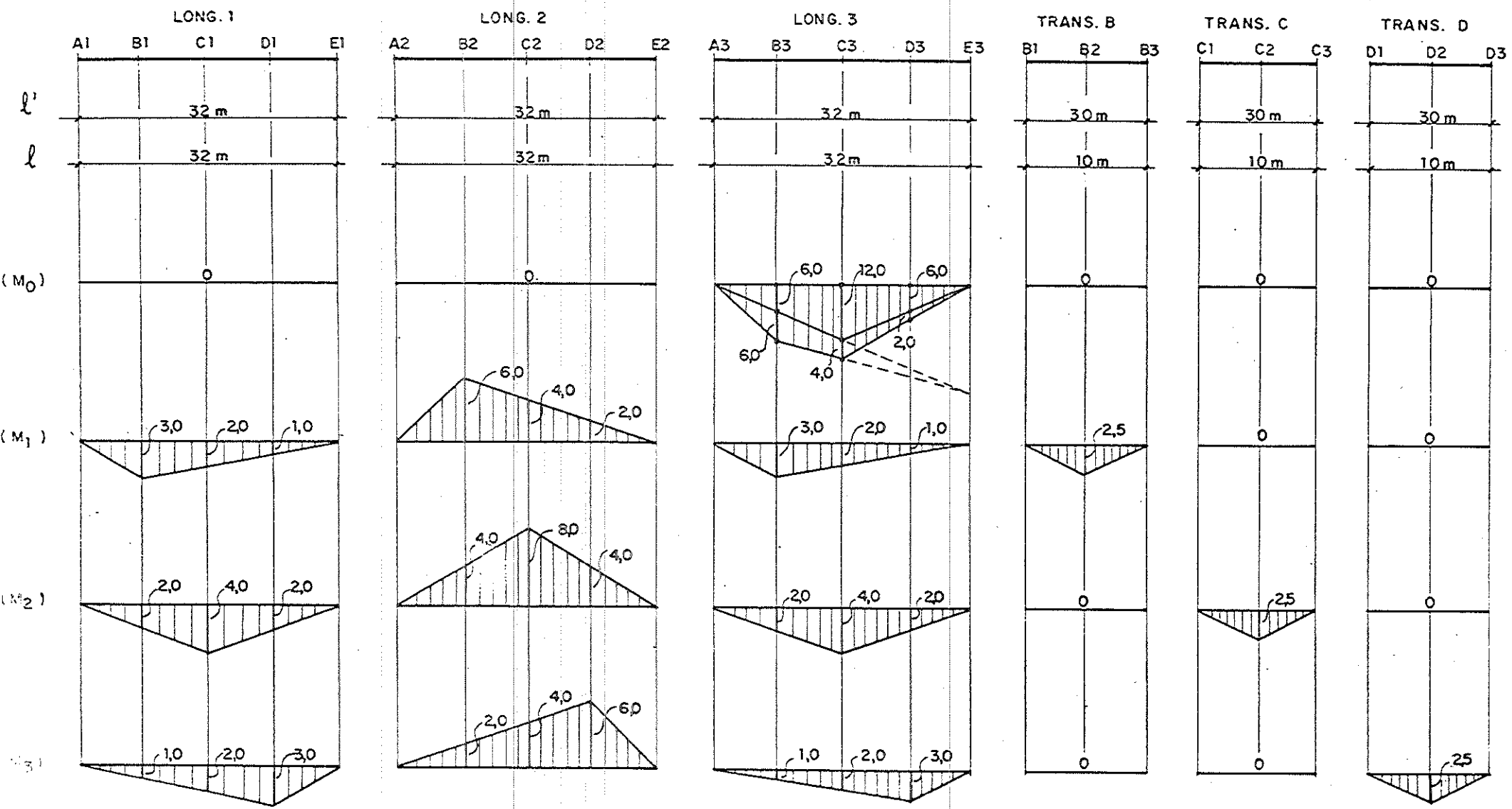
4 - Comprimentos fictícios

$$l' = l \frac{E_c J_c}{E J}$$

$E_c = \text{constante}$

$J_c = 0,045 \text{ m}^4$





5 - Esforços nos problemas (0), (1), (2), (3) - em

6 - Cálculo de deslocamentos

Utilizando a tabela A2 do anexo

$$E_c J_c \delta_{10} = 0,306 \cdot 12,0 \cdot 3,0 \cdot 32,0 + 0,333 \cdot 3,0 \cdot 6,0 \cdot 32,0 = 544$$

$$E_c J_c \delta_{20} = 0,333 \cdot 12,0 \cdot 4,0 \cdot 32,0 + 0,306 \cdot 6,0 \cdot 4,0 \cdot 32,0 = 746$$

$$E_c J_c \delta_{30} = 0,306 \cdot 3,0 \cdot 12,0 \cdot 32,0 + 0,259 \cdot 3,0 \cdot 6,0 \cdot 32,0 = 501$$

$$E_c J_c \delta_{11} = 32,0 \cdot 0,333(2 \cdot 3,0^2 + 6,0^2) + 30,0 \cdot 2,5 \cdot 2,5 \cdot 0,333 = 638,5$$

$$E_c J_c \delta_{21} = 32,0 \cdot 0,306 \cdot 3,0 \cdot 4,0 \cdot (2,0 + 2 \cdot 2,0) = 705$$

$$E_c J_c \delta_{31} = 32,0 \cdot 0,259 \cdot 3,0 \cdot 3,0 \cdot (2,0 + 2 \cdot 2,0) = 448$$

$$E_c J_c \delta_{12} = E_c J_c \delta_{21} = 705$$

$$E_c J_c \delta_{22} = 32,0 \cdot 0,333 \cdot (2 \cdot 4,0^2 + 8,0^2) + 30,0 \cdot 2,5 \cdot 2,5 \cdot 0,333 = 1085,5$$

$$E_c J_c \delta_{32} = E_c J_c \delta_{12} = 705$$

$$E_c J_c \delta_{13} = E_c J_c \delta_{31} = 448$$

$$E_c J_c \delta_{23} = E_c J_c \delta_{32} = 705$$

$$E_c J_c \delta_{33} = E_c J_c \delta_{11} = 638,5$$

7 - Equações de compatibilidade de deslocamento

$$\delta_{1r} = \delta_{10} + X1 \cdot \delta_{11} + X2 \cdot \delta_{12} + X3 \cdot \delta_{13} = 0$$

$$\delta_{2r} = \delta_{20} + X1 \cdot \delta_{21} + X2 \cdot \delta_{22} + X3 \cdot \delta_{23} = 0$$

$$\delta_{3r} = \delta_{30} + X1 \cdot \delta_{31} + X2 \cdot \delta_{32} + X3 \cdot \delta_{33} = 0$$

8 - Solução do sistema de equações:

Multiplicando as equações do item (7) por $E_c J_c$ e substituindo os valores do item (6) temos o sistema:

$$638,5 \cdot X1 + 705,0 \cdot X2 + 448,0 \cdot X3 = -544$$

$$705,0 \cdot X1 + 1085,5 \cdot X2 + 705,0 \cdot X3 = -746$$

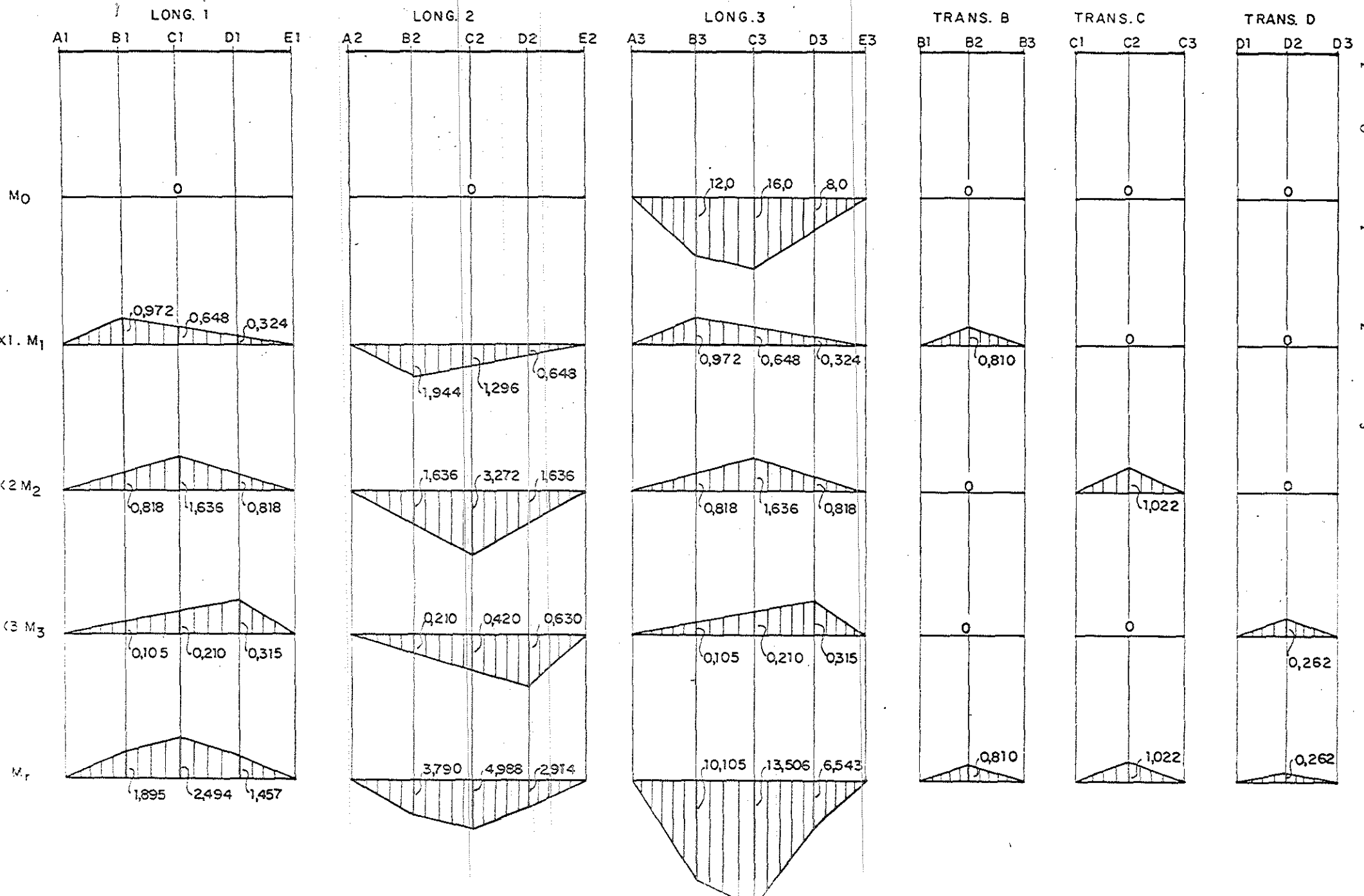
$$448,0 \cdot X1 + 705,0 \cdot X2 + 638,5 \cdot X3 = -501$$

cuja solução é

$$X1 = -0,324$$

$$X2 = -0,409$$

$$X3 = -0,105$$

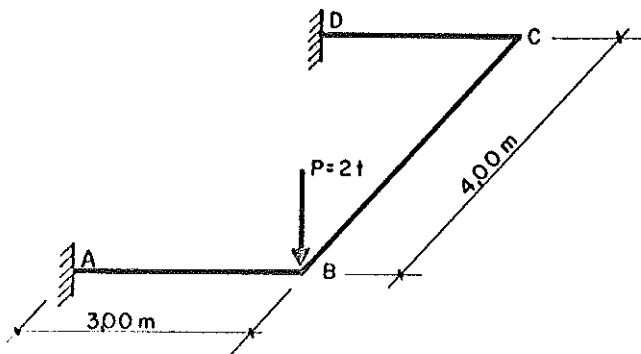


9 - Superposição de efeitos em $M_r = M_0 + X_1 \cdot M_1 + X_2 \cdot M_2 + X_3 \cdot M_3$

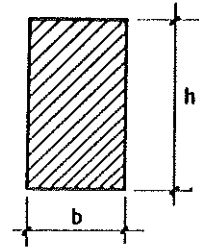
EXERCÍCIO 7 - Processo dos Esforços

1 - Enunciado e dados

Determinar o diagrama de momento fletor e momento torçor para o carregamento da figura.



seção transversal constante



$$b = 22 \text{ cm}$$

$$h = 50 \text{ cm}$$

$$E = 210 \text{ t/cm}^2 \text{ (módulo de elasticidade)}$$

$$\nu = 0,10 \text{ (coeficiente de Poisson)}$$

2 - Características da seção

2-1 - Módulo de elasticidade transversal

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = \frac{210}{2(1 + 0,1)} = 95,5 \text{ t/cm}^2$$

2-2 - Momento de inércia da seção

$$J = \frac{bh^3}{12} = \frac{22 \cdot 50^3}{12} = 230000 \text{ cm}^4$$

2-3 - Momento de Inércia contra a torção

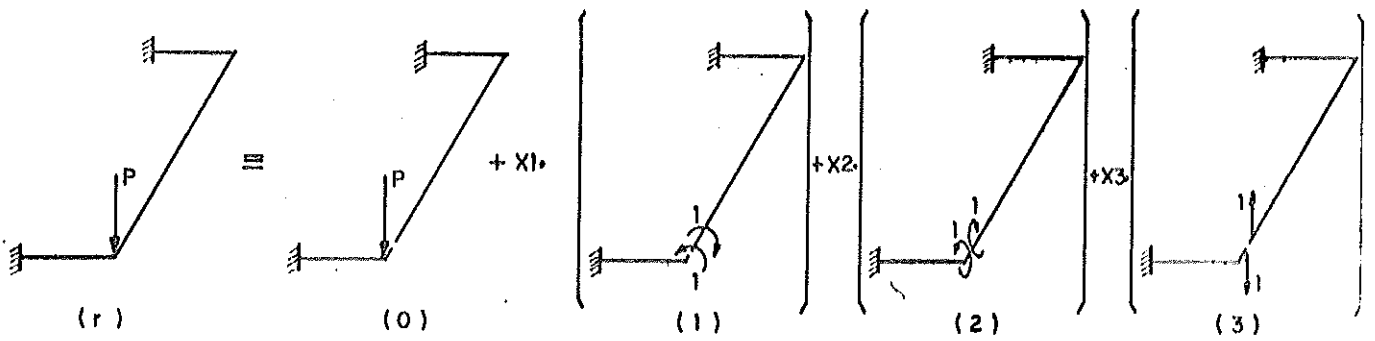
(v. ref. 2 - pg 230)

$$n = \frac{b}{h} = 0,44 \quad \therefore \quad j = 0,239$$

$$J_t = j b^3 h = 0,239 \cdot 22^3 \cdot 50 = 127 \text{ 000 cm}^4$$

3 - Esquema de solução

Retirando tantos vínculos quantos forem necessários para transformar a estrutura numa estrutura isostática (no caso, seccionando a estrutura imediatamente à direita de B) e substituindo pelos esforços correspondentes (no caso seriam 6 êsses esforços, mas devido ao fato da estrutura ser plana, com carregamentos perpendiculares a êsse plano, 3 dêsses esforços são nulos) tem-se:



$$(r) = (o) + X1 \cdot (1) + X2 \cdot (2) + X3 \cdot (3)$$

4 - Equações de compatibilidade de deslocamentos

$$\delta_{1r} = \delta_{10} + X1 \cdot \delta_{11} + X2 \cdot \delta_{12} + X3 \cdot \delta_{13} = 0$$

$$\delta_{2r} = \delta_{20} + X1 \cdot \delta_{21} + X2 \cdot \delta_{22} + X3 \cdot \delta_{23} = 0$$

$$\delta_{3r} = \delta_{30} + X1 \cdot \delta_{31} + X2 \cdot \delta_{32} + X3 \cdot \delta_{33} = 0$$

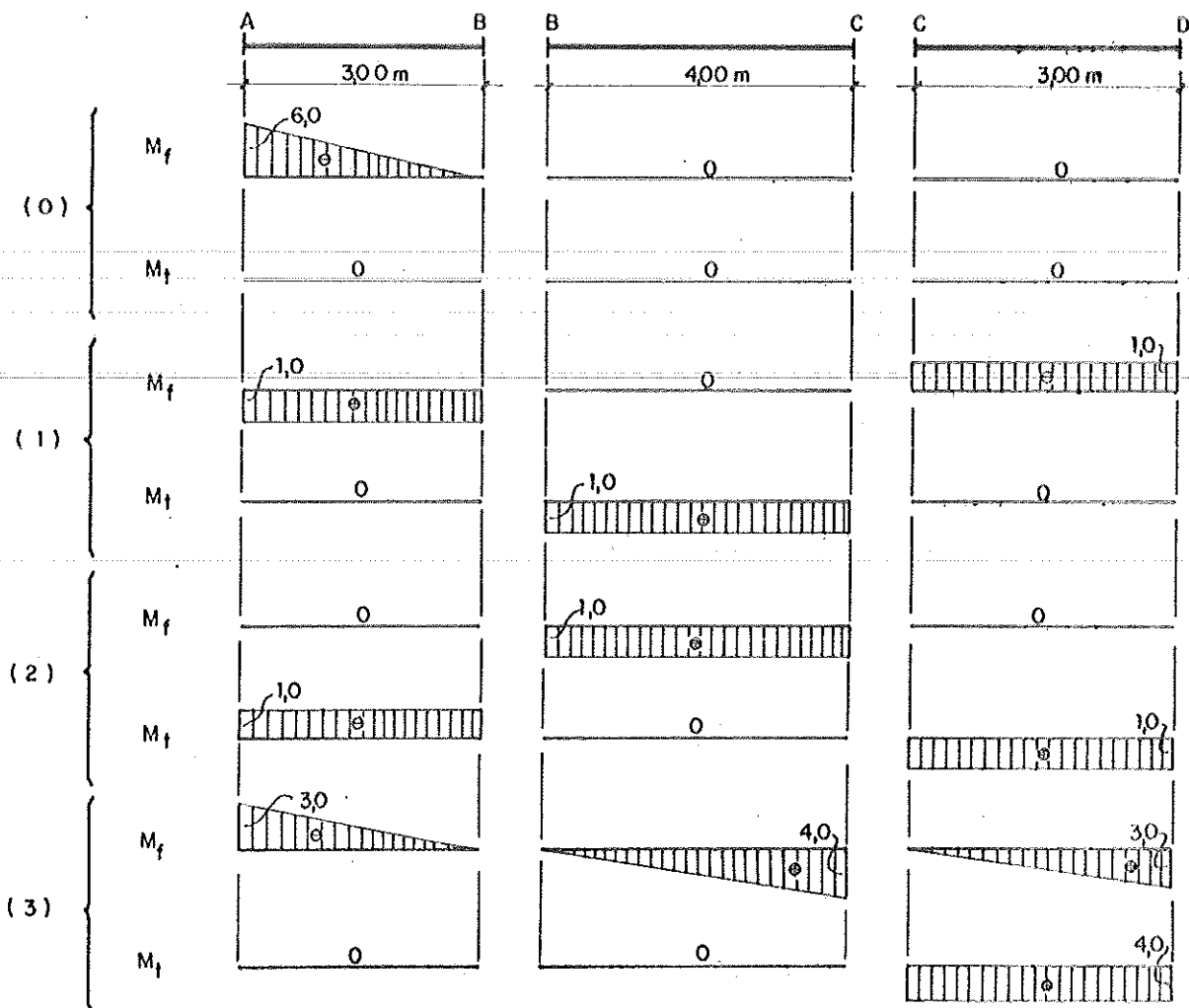
5 - Esforços nos problemas (o), (1), (2) e (3)

5-1 - Convenção:

Momento fletor (M_f) é positivo se provoca tração em baixo

Momento torçor (M_t) é positivo quando o vetor que o representa penetra a seção considerada.

5-2 - Momentos (tm)



6 - Cálculo dos deslocamentos

6-1 - Expressão geral

O deslocamento δ_{ij} , na direção da incógnita X_i , no problema j pode ser calculado, utilizando o P.T.V. (v.ref.1) como se segue:

$$\delta_{ij} = \int_{\text{estr}} M_{fi} \cdot \frac{M_{fj}}{EJ} ds + \int_{\text{estr}} M_{ti} \cdot \frac{M_{tj}}{GJ_t} ds + \int_{\text{estr}} Q_i \cdot \frac{cQ_j}{GS} ds + \int_{\text{estr}} N_i \cdot \frac{N_j}{ES} ds$$

Como não temos esforços normais nessa estrutura e como os deslocamentos devidos aos esforços cortantes são desprezíveis:

$$\delta_{ij} = \int_{\text{estr}} M_{fi} \cdot \frac{M_{fj}}{EJ} ds + \int_{\text{estr}} M_{ti} \cdot \frac{M_{tj}}{GJ_t} ds$$

Como E , J , G e J_t são constantes nêsse problema, podemos ter:

$$\delta_{ij} = \frac{1}{EJ} \left[\int_{\text{estr}} M_{fi} M_{fj} ds + k \cdot \int_{\text{estr}} M_{ti} M_{tj} ds \right]$$

onde:

$$k = \frac{EJ}{GJ_t} = \frac{210,0 \cdot 230000}{95,5 \cdot 127000} = 4,0$$

6-2 - Valôres dos deslocamentos

Recorrendo à tabela A1 do anexo:

$$EJ\delta_{10} = -\frac{1}{2} \cdot 6,0 \cdot 1,0 \cdot 3,0 + 0 = -9,0$$

$$EJ\delta_{20} = 0 + 0 = 0$$

$$EJ\delta_{30} = 3,0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 6,0 \cdot 3,0 + 0 = 18,0$$

$$EJ\delta_{11} = 2 \cdot 3,0 \cdot 1,0^2 + 4,0(4,0 \cdot 1,0^2) = 22,0$$

$$EJ\delta_{21} = 0 + 0 = 0$$

$$EJ\delta_{31} = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3,0 \cdot 1,0 \cdot 3,0 + 0 = -9,0$$

$$EJ\delta_{12} = EJ\delta_{21}$$

$$EJ\delta_{22} = 4,0 \cdot 1,0^2 + 4,0(2 \cdot 1,0^2 \cdot 3,0) = 28,0$$

$$EJ\delta_{32} = \frac{1}{2} \cdot 4,0 \cdot 4,0 + 4,0(3,0 \cdot 4,0 \cdot 1,0) = 56,0$$

$$EJ\delta_{13} = EJ\delta_{31}$$

$$EJ\delta_{23} = EJ\delta_{32}$$

$$EJ\delta_{33} = 2 \cdot 3,0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3,0^2 + 4,0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4,0^2 + 4,0(3,0 \cdot 4,0^2) = 231,3$$

7 - Solução do sistema de equações de compatibilidade

Multiplicando tôdas as equações do Ítem 4 pelo fator EJ e substituindo os valores numéricos do Ítem 6-2 temos o sistema:

$$22,0 X1 + 0 X2 - 9,0 X3 = 9,0$$

$$0 X1 + 28,0 X2 + 56,0 X3 = 0$$

$$-9,0 X1 + 56,0 X2 + 231,3 X3 = -18,0$$

cuja solução é:

$$X1 = 0,358$$

$$X2 = 0,248$$

$$X3 = -0,124$$

8 - Superposição de efeitos

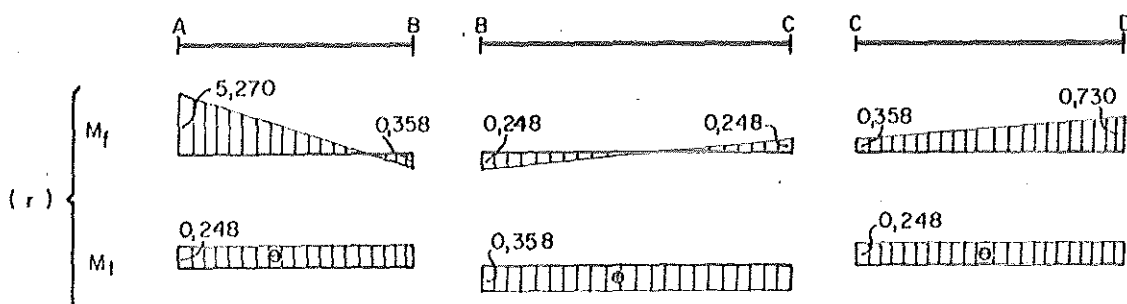
8-1 - Momento fletor

	M_{AB}	M_{BA}	M_{BC}	M_{CB}	M_{CD}	M_{DC}
(o)	-6,000	0	0	0	0	0
X1(1)	0,358	0,358	0	0	-0,358	-0,358
X2(2)	0	0	0,248	0,248	0	0
X3(3)	0,372	0	0	-0,496	0	-0,372
(r)	-5,270	0,358	0,248	-0,248	-0,358	-0,730

8-2 - Momento torçor

	M_{AB}	M_{BA}	M_{BC}	M_{CB}	M_{CD}	M_{DC}
(o)	0	0	0	0	0	0
X1(1)	0	0	0,358	0,358	0	0
X2(2)	-0,248	-0,248	0	0	0,248	0,248
X3(3)	0	0	0	0	-0,496	-0,496
(r)	-0,248	-0,248	0,358	0,358	-0,248	-0,248

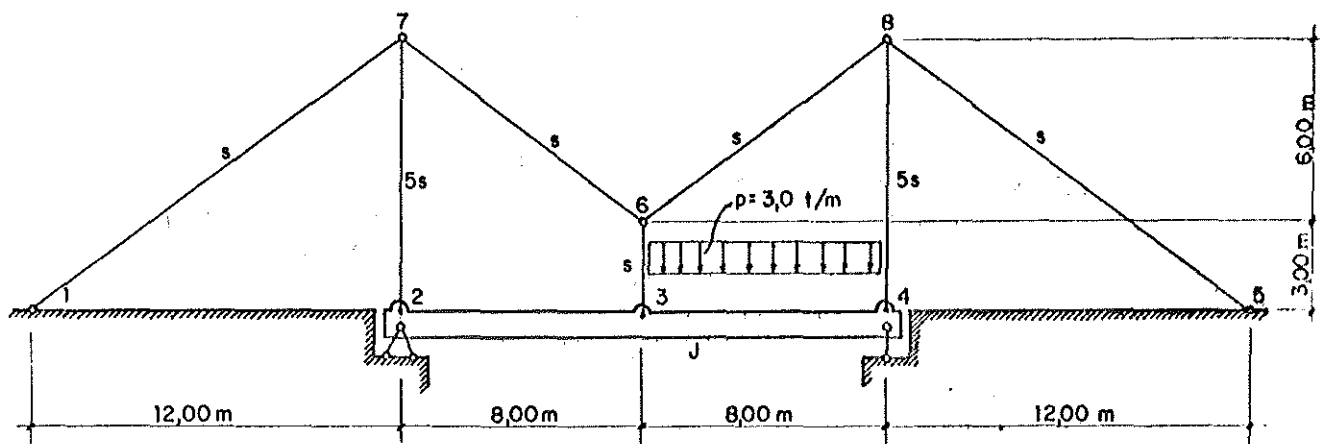
8-3 - Diagramas finais (tm)



EXERCÍCIO 8 - Processo dos Esforços

1 - Enunciado e dados

Determinar o diagrama de momento fletor na viga da figura e também os esforços normais nos montantes e tirantes



$$J = 30000 \text{ cm}^4 = 3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$s = 5 \text{ cm}^2 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$E = 2100 \text{ t/cm}^2 = \text{constante}$$

2 - Verificação do grau de hiperestaticidade

$$\text{n}^\circ \text{ de chapas: } c = 1$$

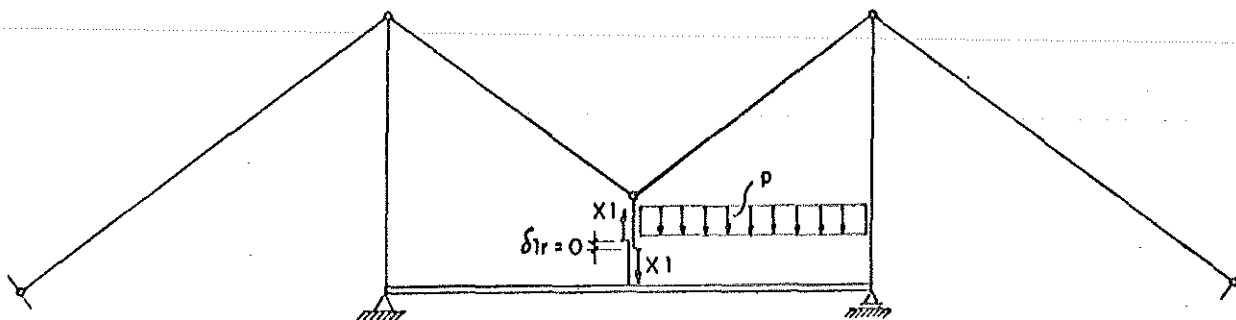
$$\text{n}^\circ \text{ de barras: } b = 10$$

$$\text{n}^\circ \text{ de nós: } n = 3$$

$$b > 3c + 2n; \quad b = 3c + 2n + r; \quad r = 1$$

A estrutura é uma vez hiperestática.

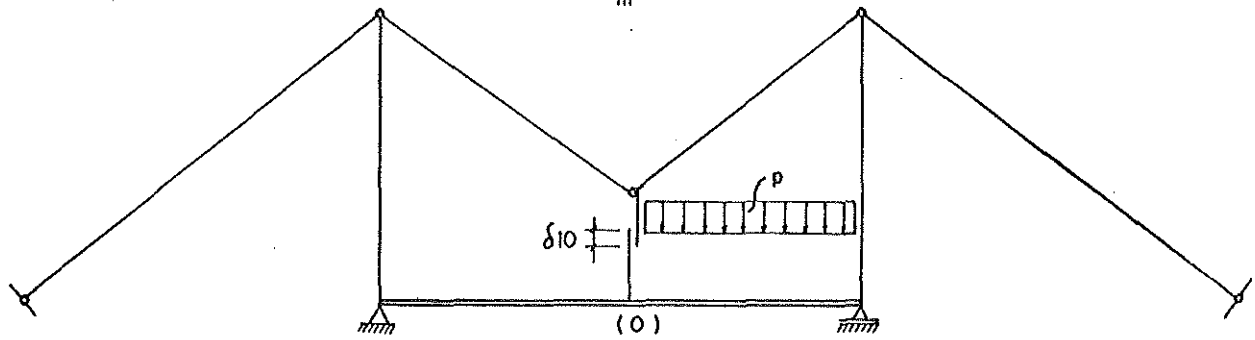
3 - Esquema de solução:



(r)

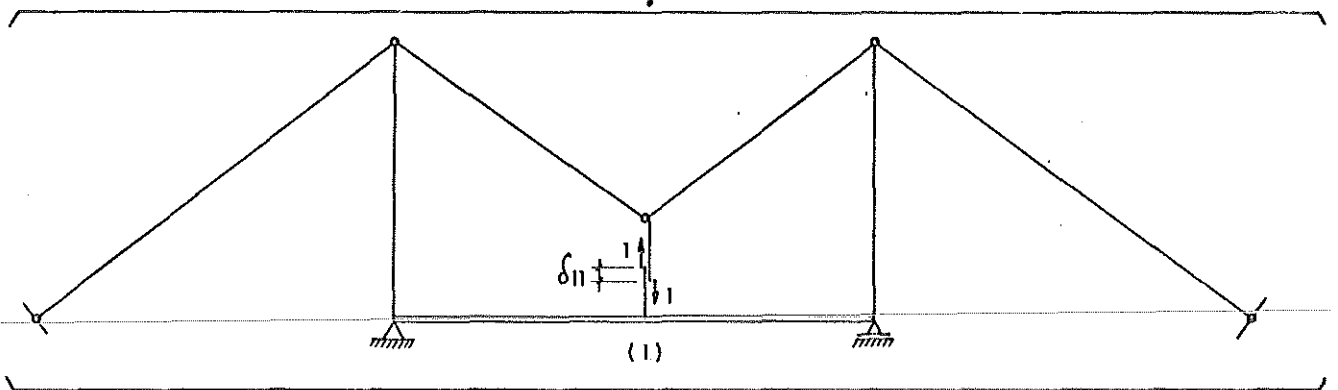
III

III

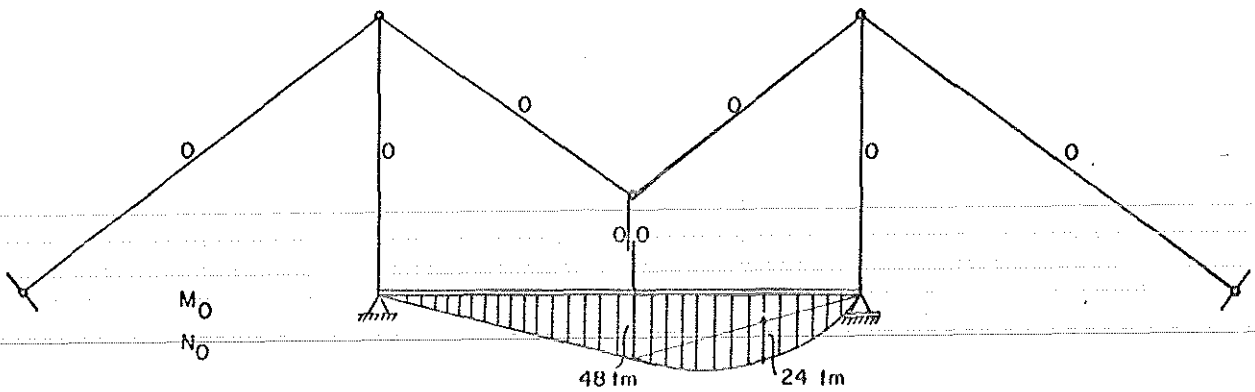


+

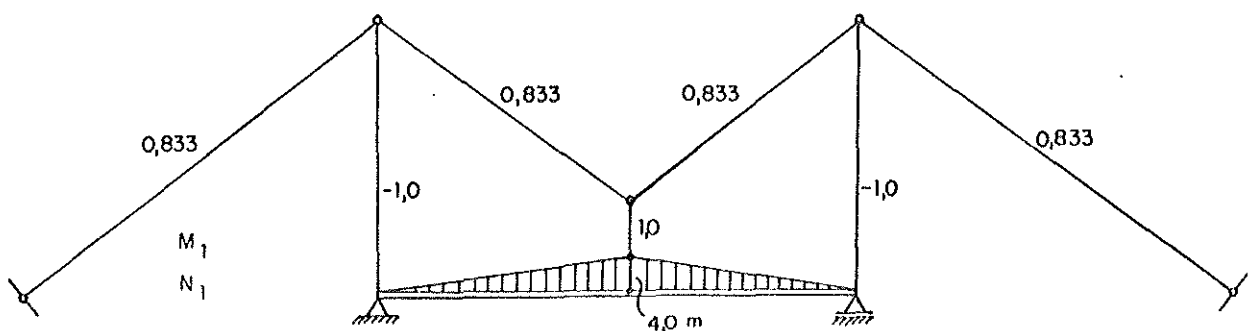
X1



4 - Esforços no Problema(0) - Momentos fletores e esforços axiais



5 - Esforços no Problema(1) - Momentos fletores e esforços axiais



6 - Equação de compatibilidade de deslocamentos

$$\delta_{1r} = \delta_{10} + X1 \cdot \delta_{11} = 0$$

7 - Cálculo de deslocamentos

7-1 - Expressão geral

$$\delta_{ij} = \int_{\text{estr}} M_i \cdot \frac{M_j ds}{E J} + \int_{\text{estr}} N_i \cdot \frac{N_j ds}{E S} + \int_{\text{estr}} Q_i \cdot \frac{cQ_j ds}{G S}$$

Desprezando os deslocamentos devidos a esforço cortante, bem como os devidos a esforço normal na viga, temos:

$$E \delta_{ij} = \int_{\text{viga}} M_i \cdot \frac{M_j}{J} ds + \int_{\text{barras}} N_i \cdot \frac{N_j}{S} ds$$

7-2 - Valores numéricos

$$E \delta_{10} = - \frac{1}{3 \cdot 10^{-4}} \cdot (2 \cdot 8,0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 48,0 \cdot 4,0 - 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 24) + 0 = -0,0426$$

$$E \delta_{11} = \frac{1}{3 \cdot 10^{-4}} \cdot (2 \cdot 8,0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4,0^2) + \frac{1}{5 \cdot 10^{-4}} \cdot (1,0^2 \cdot 3,0 + 2 \cdot 0,833^2 \cdot 10,0 + 2 \cdot 0,833^2 \cdot 15,0 + 2 \cdot 1,0^2 \cdot 9,0 \cdot \frac{1}{5}) =$$

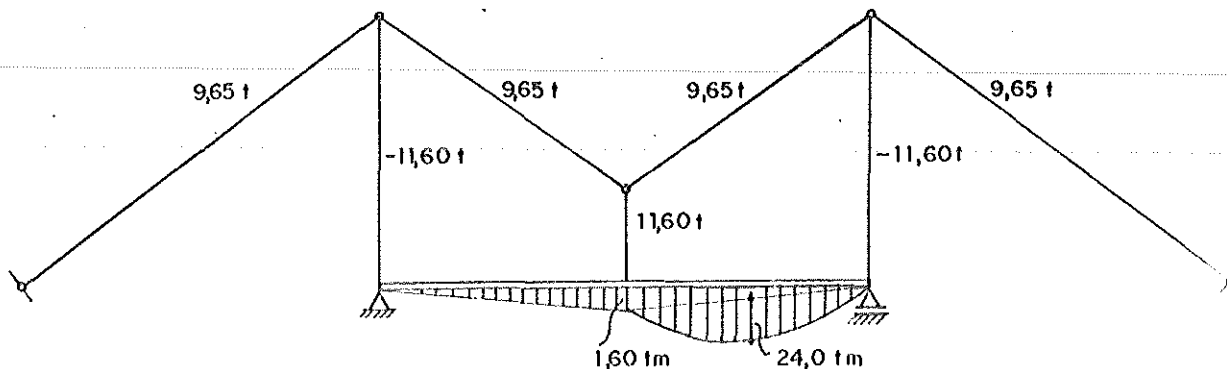
$$= 0,00284 + 0,00083 = 0,00367$$

8 - Solução da equação de compatibilidade do ítem(6)

$$X1 = - \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = - \frac{E \delta_{10}}{E \delta_{11}} = \frac{0,04260}{0,00367} = 11,60 \text{ t}$$

9 - Superposição de efeitos - Momentos fletores e esforços axi

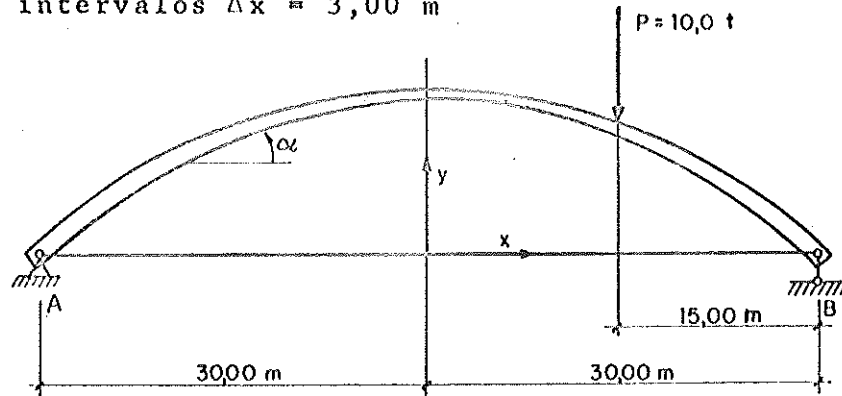
ais



EXERCÍCIO 9 - Arco atirantado

1 - Enunciado e dados

Determinar os diagramas de M, N, Q para o arco da figura. As características geométricas do arco são dadas na tabela 9-1, por pontos. As integrais devem ser calculadas numericamente, pela regra do trapézio, com intervalos $\Delta x = 3,00$ m



$$E_{\text{arco}} = E_1 = 210 \text{ t/cm}^2$$

$$E_{\text{tirante}} = E_2 = 2100 \text{ t/cm}^2$$

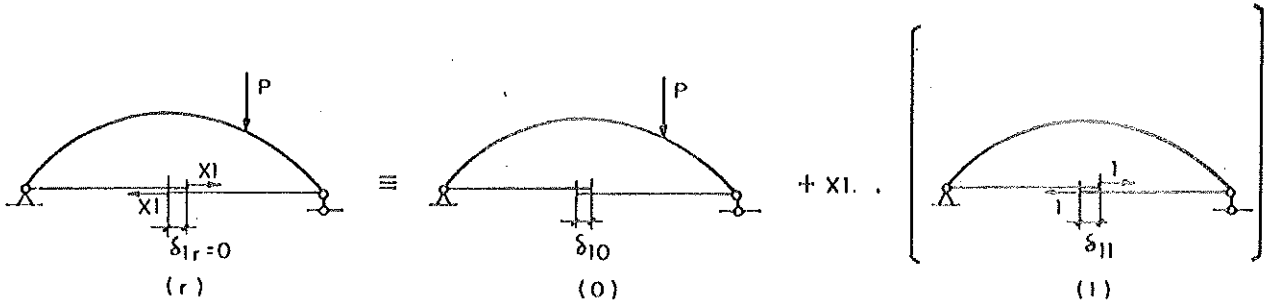
$$S_{\text{tirante}} = S_t = 10 \text{ cm}^2 = 10^{-3} \cdot \text{m}^2$$

$$J_c = 0,209 \text{ m}^4 = 0,209 \cdot 10^8 \text{ cm}^4$$

TABELA 9-1

$\pm x$	y	$ \text{sen}\alpha $	$ \text{cos}\alpha $	J/J_c
0,0	10,00	0,0000	1,0000	1,0
3,0	9,89	0,0668	0,9978	1,1
6,0	9,60	0,1339	0,9912	1,4
9,0	9,10	0,1965	0,9805	1,9
12,0	8,40	0,2588	0,9659	2,6
15,0	7,50	0,3173	0,9483	3,5
18,0	6,40	0,3719	0,9283	4,6
21,0	5,10	0,4239	0,9057	5,9
24,0	3,60	0,4699	0,8821	7,4
27,0	1,90	0,5150	0,8572	9,1
30,0	0,00	0,5544	0,8323	11,0

2 - Esquema de solução



$$(r) = (o) + X1 \cdot (1) + X2 \cdot (2)$$

3 - Equação de compatibilidade de deslocamentos

$$\delta_{1r} = \delta_{10} + X1 \cdot \delta_{11} = 0$$

4 - Convenções

$M > 0$ se provoca tração interna

$N > 0$ tração

$Q > 0$ horário sôbre a seção

5 - Esforços sôbre o arco no problema(o)

$$M_o = \mathcal{M} \quad N_o = \mathcal{N} \quad Q_o = \mathcal{Q}$$

6 - Esforços sôbre o arco no problema(1)

$$M_1 = -y \quad N_1 = -\cos\alpha \quad Q_1 = -\text{sen}\alpha$$

7 - Cálculo de deslocamentos

$$\delta_{ij} = \int_{\text{estr}} M_i \cdot \frac{M_j ds}{EJ} + \int_{\text{estr}} N_i \cdot \frac{N_j ds}{ES} + \int_{\text{estr}} Q_i \cdot \frac{cQ_j ds}{GS}$$

Desprezando, como sempre, os deslocamentos devidos a esforço constante e desprezando também os causados pelo esforço normal no arco (não no tirante), temos:

$$\delta_{ij} = \int_{\text{arco}} M_i \cdot \frac{M_j ds}{EJ} + \int_{\text{tirante}} N_i \cdot \frac{N_j ds}{E_t S_t}$$

8 - Cálculo da incôgnita hiperestática, num caso geral.

Chamando: $d\gamma = \frac{ds}{EJ}$

temos:

$$X1 = - \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{\int_{\text{arco}} \mathcal{M} y d\gamma}{\int_{\text{arco}} y^2 d\gamma + \frac{\ell t}{E_t S_t}}$$

9 - Cálculo da incógnita hiperestática no caso particular:

$$X_1 = \frac{\int_{\text{arco}} \eta y d\gamma}{\int_{\text{arco}} y^2 d\gamma + \frac{\ell_t}{E_t S_t}} = \frac{\int_0^{60,0} \eta y \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{J_c}{J} \cdot dx}{\int_0^{60,0} y^2 \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{J_c}{J} \cdot dx + \frac{E_1 J_c}{E_2 S_t} \ell_t}$$

já que:

$$d\gamma = \frac{ds}{E_1 J} = \frac{dx}{E_1 J \cos \alpha} = \frac{1}{E_1 J_c} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{J_c}{J} \cdot dx$$

Da tabela 9-2, colunas 11 e 12, temos:

$$X_1 = \frac{3.5017,8}{3.623,70 + \frac{210}{2100} \cdot \frac{0,209}{10^{-3}} \cdot 60,0} = \frac{15053,4}{1871,1 + 1254,9} = 4,815$$

10 - Superposição de efeitos; Tabela 9-2, colunas 16, 17 e 18.

$$M_r = \eta - X_1 \cdot y$$

$$N_r = \eta - X_1 \cdot \cos \alpha$$

$$Q_r = Q - X_1 \cdot \sin \alpha$$

11 - Diagramas finais

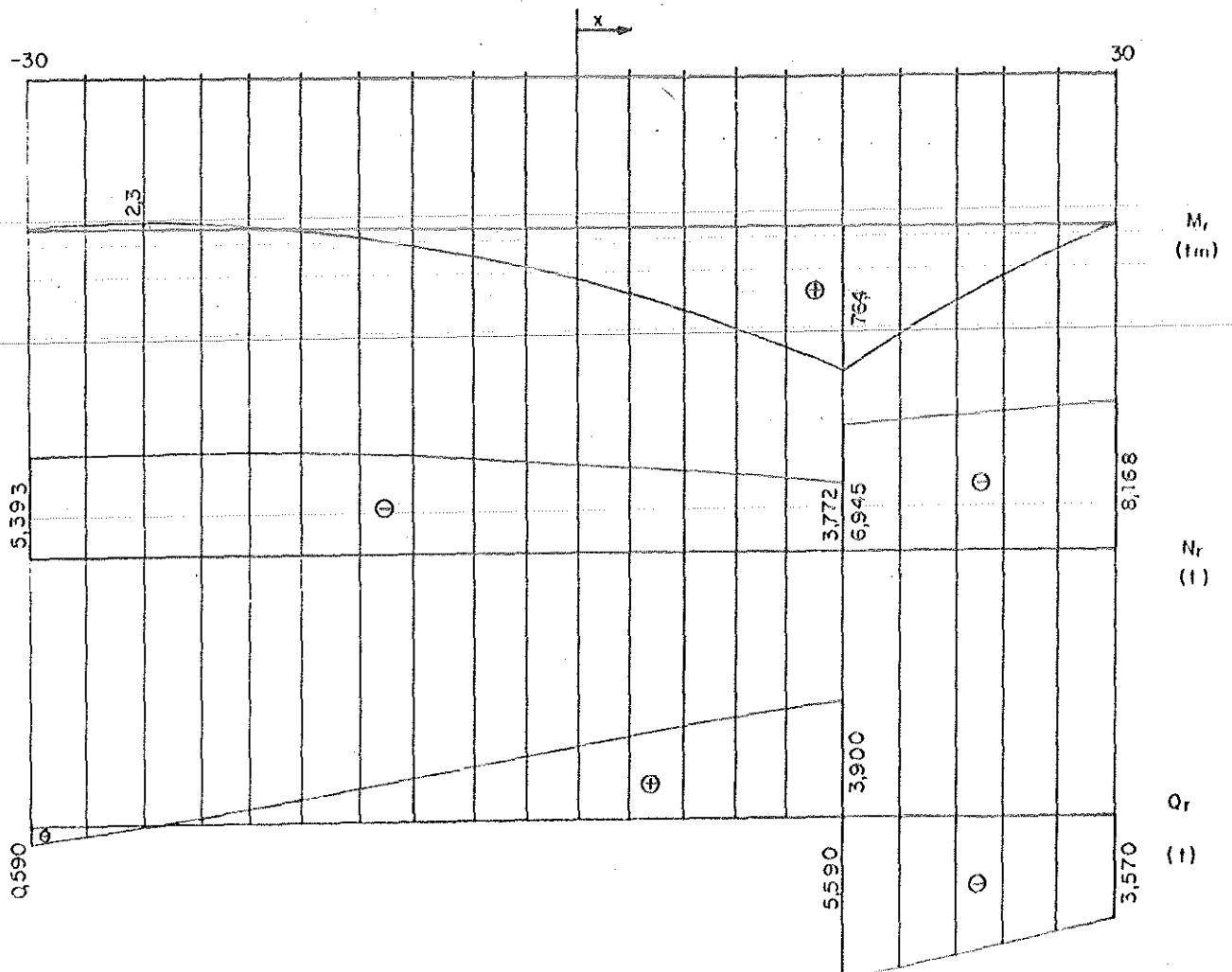


TABELA 9-2

1	2	3	4	5	6	7	8	9
x (m)	y (m)	sen α	cos α	$\frac{J}{J_c}$	m (tm)	η (t)	Q (t)	④ · ⑤
-30	0,0	0,5544	0,8323	11,0	0,0	-1,385	2,080	9,155
-27	1,9	0,5150	0,8572	9,1	7,5	-1,285	2,145	7,795
-24	3,6	0,4699	0,8821	7,4	15,0	-1,175	2,215	6,525
-21	5,1	0,4239	0,9057	5,9	22,5	-1,060	2,265	5,475
-18	6,4	0,3719	0,9283	4,6	30,0	-0,929	2,320	4,269
-15	7,5	0,3173	0,9483	3,5	37,5	-0,793	2,370	3,318
-12	8,4	0,2588	0,9659	2,6	45,0	-0,647	2,415	2,512
-9	9,1	0,1965	0,9805	1,9	52,5	-0,492	2,450	1,863
-6	9,6	0,1339	0,9912	1,4	60,0	-0,335	2,475	1,388
-3	9,9	0,0668	0,9978	1,1	67,5	-0,167	2,490	1,098
0	10,0	0,0000	1,0000	1,0	75,0	0,000	2,500	1,000
3	9,9	-0,0668	0,9978	1,1	82,5	0,167	2,490	1,098
6	9,6	-0,1339	0,9912	1,4	90,0	0,335	2,475	1,388
9	9,1	-0,1965	0,9805	1,9	97,5	0,492	2,450	1,863
12	8,4	-0,2588	0,9659	2,6	105,0	0,647	2,415	2,512
15	7,5	-0,3173	0,9483	3,5	112,5	0,793 -2,330	2,370 -7,120	3,318
18	6,4	-0,3719	0,9283	4,6	90,0	-2,790	-6,970	4,269
21	5,1	-0,4239	0,9057	5,9	67,5	-3,180	-6,800	5,475
24	3,6	-0,4699	0,8821	7,4	45,0	-3,520	-6,620	6,525
27	1,9	-0,5150	0,8572	9,1	22,5	-3,860	-6,435	7,795
30	0,0	-0,5544	0,8323	11,0	0,0	-4,160	-6,240	9,155
Σ								

TABELA - 9-2 (continuação)

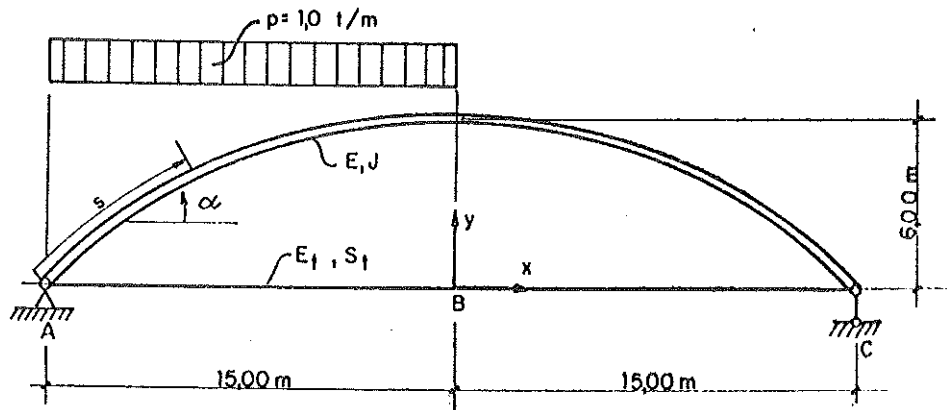
10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\frac{\textcircled{2}}{\textcircled{9}}$	$\textcircled{2} \cdot \textcircled{10}$	$\textcircled{6} \cdot \textcircled{10}$	$-X1 \cdot \textcircled{2}$	$-X1 \cdot \textcircled{4}$	$-X1 \cdot \textcircled{3}$	M_r	N_r	Q_r
0,000	0,00	0,0	- 0,0	-4,008	-2,670	0,0	-5,393	-0,590
0,244	0,46	1,8	- 9,1	-4,127	-2,485	-1,6	-5,412	-0,340
0,552	1,99	8,3	-17,3	-4,246	-2,265	-2,3	-5,421	-0,050
0,932	4,75	21,0	-24,5	-4,362	-2,045	-2,0	-5,422	0,220
1,500	9,60	45,0	-30,8	-4,469	-1,793	-0,8	-5,398	0,527
2,262	16,95	84,8	-36,1	-4,565	-1,530	1,4	-5,358	0,840
3,350	28,10	150,8	-40,4	-4,652	-1,250	4,6	-5,299	1,165
4,885	44,40	256,5	-43,8	-4,720	-0,947	8,7	-5,212	1,503
6,920	66,40	415,5	-46,2	-4,772	-0,646	13,8	-5,107	1,829
9,010	89,20	607,5	-47,6	-4,810	-0,322	19,9	-4,977	2,168
10,000	100,00	750,0	-48,1	-4,815	0,000	26,9	-4,815	2,500
-9,010	89,20	743,0	-47,6	-4,810	0,322	34,9	-4,643	2,812
6,920	66,40	622,5	-46,2	-4,772	0,646	43,8	-4,437	3,121
4,885	44,40	476,0	-43,8	-4,720	0,947	53,7	-4,228	3,397
3,350	28,10	352,0	-40,4	-4,652	1,250	64,6	-4,005	3,665
2,262	16,95	255,0	-36,1	-4,565	1,530	76,4	-3,772 -6,945	3,900 -5,590
1,500	9,60	135,0	-30,8	-4,469	1,793	59,2	-7,259	-5,177
0,932	4,75	62,9	-24,5	-4,362	2,045	43,0	-7,542	-4,755
0,552	1,99	24,8	-17,3	-4,246	2,265	27,7	-7,766	-4,355
0,244	0,46	5,4	- 9,1	-4,127	2,485	13,4	-7,987	-3,950
0,000	0,00	0,0	- 0,0	-4,008	2,670	0,0	-8,168	-3,570
	623,70	5017,8						

EXERCÍCIO 10 - Arco atirantado

1 - Enunciado e dados

No arco atirantado da figura, onde a variação de momentos de inércia é tal que $J \cos \alpha = \text{constante}$, determinar o diagrama de momento fletor.

O eixo do arco é uma parábola de 2φ grau em x .



$$E = 210 \text{ t/cm}^2$$

$$J \cos \alpha = \text{constante} = 0,100 \text{ m}^4$$

$$S_t = 10 \text{ cm}^2 = 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$E_t = 2100 \text{ t/cm}^2$$

2 - Cálculo da incôgnita hiperestática (conforme esquema e convenções desenvolvidas no exercício 9)

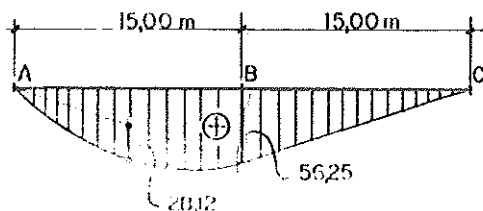
2-1 - Expressão geral

$$X_1 = \frac{\int_{\text{arco}} m y dy}{\int_{\text{arco}} y^2 dy + \frac{l_t}{E_t S_t}} = \frac{\int_{\text{arco}} m y \frac{dx}{E J \cos \alpha}}{\int_{\text{arco}} y^2 \frac{dx}{E J \cos \alpha} + \frac{l_t}{E_t S_t}}$$

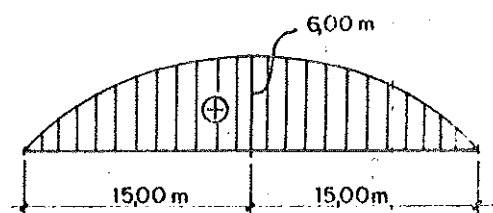
$$X_1 = \frac{\int_{\text{arco}} m y dx}{\int_{\text{arco}} y^2 dx + \frac{E J \cos \alpha l_t}{E_t S_t}}$$

2-2 - Funções de x envolvidas no problema

m



y



2-3 - Cálculo das integrais necessárias para o cálculo de X_1 .
Utilizando a tabela A1, do anexo:

$$\int_{\text{arco}} m y dx = 30,0 \cdot \frac{5}{12} \cdot 56,25 \cdot 6,00 + 15,0 \cdot \frac{7}{15} \cdot 56,25 \cdot 6,00 = 6581,2$$

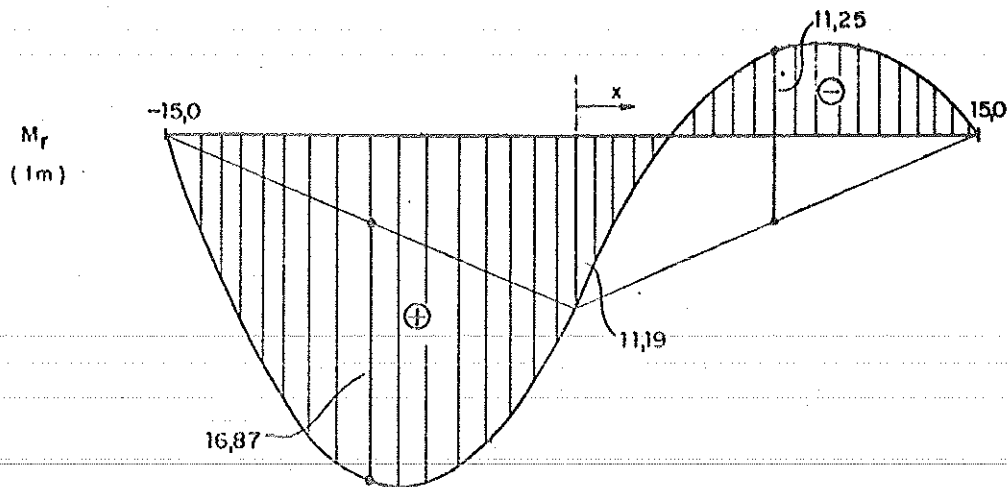
$$\int_{\text{arco}} y^2 dx = 30,0 \cdot \frac{8}{15} \cdot 6,00^2 = 576,0$$

2-4 - Esforço no tirante

$$X_1 = \frac{6581,2}{576,0 + \frac{210}{2100} \cdot \frac{0,100}{10^{-3}} \cdot 30,0} = \frac{6581,2}{576,0 + 300,0} = 7,51 \text{ t}$$

3 - Superposição de efeitos:

$$M_x = m - X_1 \cdot y$$

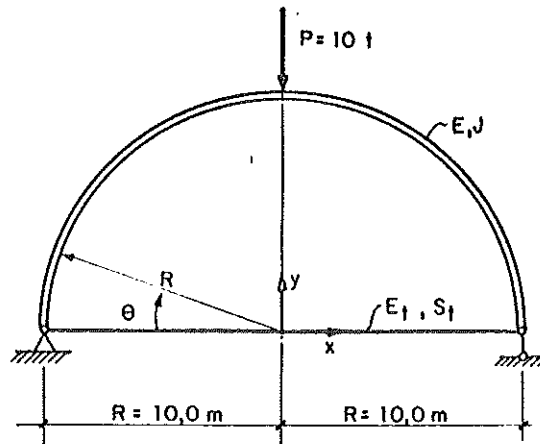


EXERCÍCIO 11 - Arco atirantado

1 - Enunciado e dados

No arco atirantado da figura, determinar o diagrama de momento fletor.

O arco é semicircular e tem momento de inércia constante.



$$E = 210 \text{ t/cm}^2$$

$$J = 0,60 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$$

$$S_t = 3 \text{ cm}^2$$

$$E_t = 2100 \text{ t/cm}^2$$

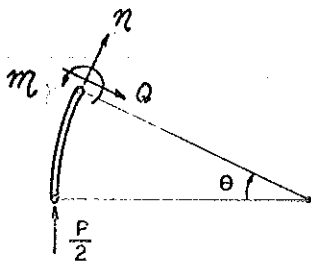
2 - Cálculo da incógnita hiperestática (conforme esquema e convenções desenvolvidas no exercício 9)

2-1 - Expressão geral

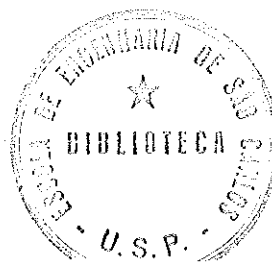
$$X_1 = \frac{\int_{\text{arco}} m y dy}{\int_{\text{arco}} y^2 dy + \frac{l_t}{E_t S_t}} = \frac{\int_{\text{arco}} m y \frac{ds}{EJ}}{\int_{\text{arco}} y^2 \frac{ds}{EJ} + \frac{l_t}{E_t S_t}}$$

$$X_1 = \frac{\int_{\text{arco}} m y ds}{\int_{\text{arco}} y^2 ds + \frac{EJ}{E_t S_t} \cdot l_t}$$

2-2 - Funções de s envolvidas no problema



$$m = \frac{P}{2} \cdot R(1 - \cos\theta) \quad p / 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$



$$y = R \sin \theta$$

2-3 - Cálculo das integrais necessárias para o cálculo de X1

$$\begin{aligned} \int_{\text{arco}} \mathcal{M}_y ds &= 2 \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{P}{2} \cdot R \cdot (1 - \cos \theta) \cdot R \sin \theta \cdot R d\theta = \\ &= PR^3 \left[\int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta - \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta \right] = \\ &= PR^3 \left[\left| -\cos \theta \right|_0^{\pi/2} - \left| -\frac{1}{4} \cos 2\theta \right|_0^{\pi/2} \right] = \\ &= \frac{PR^3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\text{arco}} y^2 ds &= 2 \int_0^{\pi/2} R^2 \sin^2 \theta \cdot R d\theta = 2 R^3 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \\ &= 2R^3 \cdot \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi R^3}{2} \end{aligned}$$

2-4 - Esforço no tirante

$$X1 = \frac{\frac{PR^3}{2}}{\frac{\pi R^3}{2} + \frac{EJ}{E_t S_t} \cdot 2R} = p \cdot \left[\frac{1}{\pi + \frac{4}{R^2} \cdot \frac{EJ}{E_t S_t}} \right] = p \cdot \frac{1}{\pi + f}$$

$$f = \frac{4}{R^2} \cdot \frac{EJ}{E_t S_t} = \frac{4}{10^6} \cdot \frac{210}{2100} \cdot \frac{0,6 \cdot 10^6}{3} = 0,08$$

$$X1 = 10,0 \cdot \frac{1}{\pi + 0,08} = 3,105 \text{ t}$$

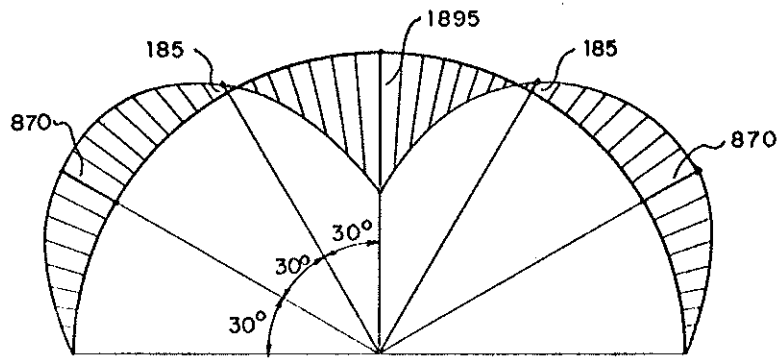
3 - Superposição de efeitos.

$$M_r = \mathcal{M} - X1 \cdot y$$

$$M_r = \frac{P}{2} \cdot R \cdot (1 - \cos \theta) - 3,105 \cdot R \cdot \sin \theta$$

$$M_r = 5000 - 5000 \cdot \cos \theta - 3105 \sin \theta \quad (\text{t cm})$$

M_r (1 cm)

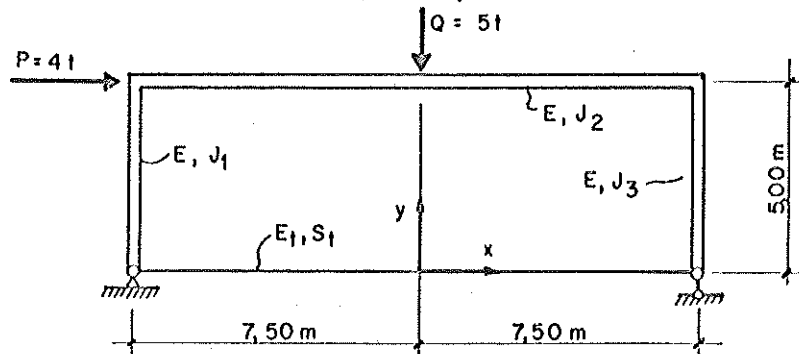


EXERCÍCIO 12 - Arco atirantado

1 - Enunciado e dados

No arco (pórtico) atirantado da figura, determinar o diagrama de momento fletor.

O momento de inércia é constante por trecho.



$$J_1 = 40\,000 \text{ cm}^4$$

$$J_2 = 80\,000 \text{ cm}^4$$

$$J_3 = 60\,000 \text{ cm}^4$$

$$E_t = E = 2100 \text{ t/cm}^2$$

$$S_t = 3,0 \text{ cm}^2$$

2 - Cálculo da incógnita hiperestática (conforme esquema e convenções desenvolvidas no exercício 9)

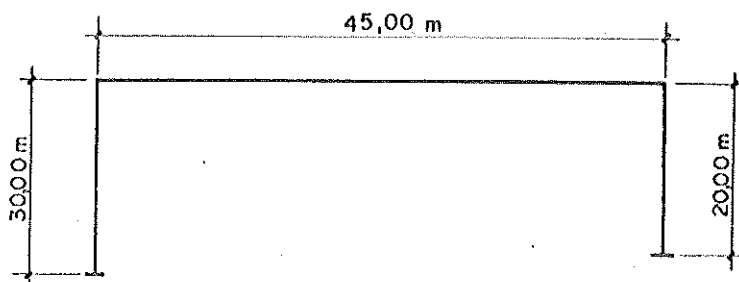
2-1 - Expressão geral

$$X_1 = \frac{\int_{\text{arco}} m_y d\gamma}{\int_{\text{arco}} y^2 d\gamma + \frac{l_t}{E_t S_t}} = \frac{\frac{1}{E_c J_c} \int_{\text{arco}} m_y \frac{E_c J_c}{EJ} ds}{\frac{1}{E_c J_c} \int_{\text{arco}} y^2 \frac{E_c J_c}{EJ} ds + \frac{l_t}{E_t S_t}}$$

$$X_1 = \frac{\sum_k \int_0^{l'} m_y ds'}{\sum_k \int_0^{l'} y^2 ds' + \frac{E_c J_c}{E_t S_t} l_t}, \text{ para todos os } k \text{ trechos de } J = \text{cte.}$$

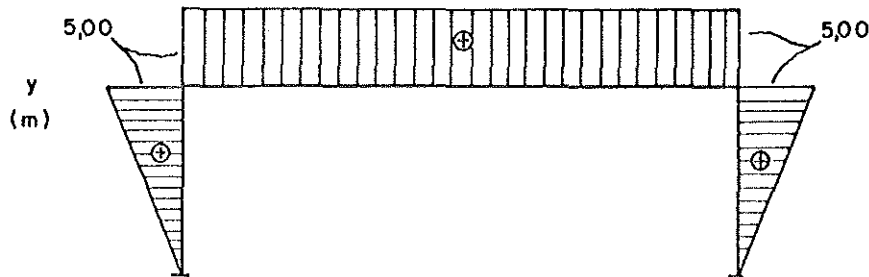
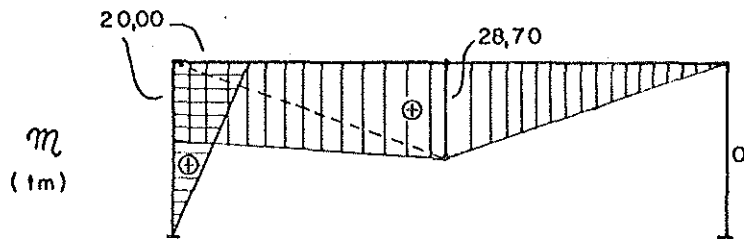
2-2 - Comprimentos fictícios, l'

$$l' = \frac{E_c J_c}{EJ} l$$



$$E_c = E$$

$$J_c = 240\,000 \text{ cm}^4$$

2-3 - Funções de s envolvidas no problema

2-4 - Cálculo das somatórias de integrais.

Utilizando a tabela A1 do anexo:

$$\sum_k \int_0^{\ell'} m y ds' = 30,0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 5,0 \cdot 20,0 + 45,0 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5,0 \cdot 28,7 + 22,5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5,0 \cdot 20,0 = 5360,0$$

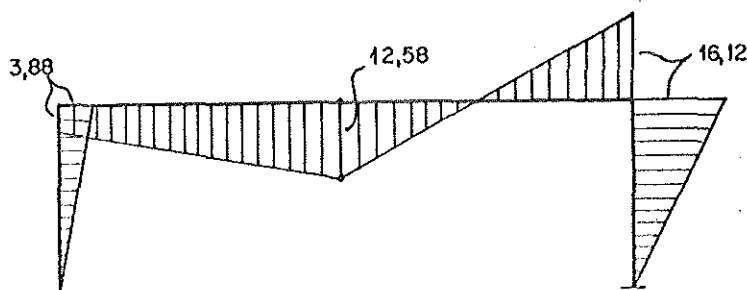
$$\sum_k \int_0^{\ell'} y^2 ds' = 30,0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 5,0^2 + 45,0 \cdot 5,0^2 + 20,0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 5,0^2 = 1543,0$$

2-5 - Esforço no tirante

$$X1 = \frac{5360,0}{1543,0 + \frac{2100}{2100} \cdot \frac{2,4 \cdot 10^{-3}}{3,0 \cdot 10^{-4}} \cdot 15,0} = \frac{5360,0}{1543 + 120,0} = 3,225 \text{ t}$$

2-6 - Superposição de efeitos

$$M_r = m - X1 \cdot y$$

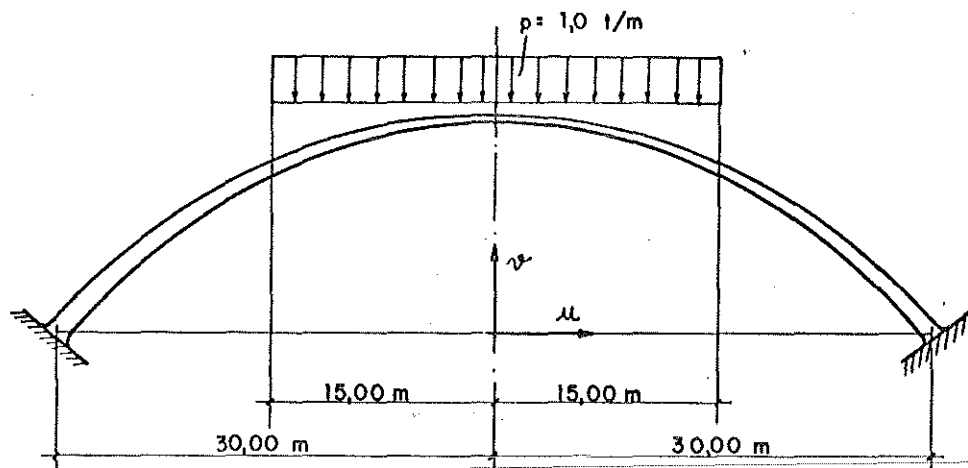


(tm)

EXERCÍCIO 13 - Arco biengastado

1 - Enunciado e dados

Determinar os diagramas de M, N, Q para o arco biengastado da figura. As características geométricas do arco são dadas na tabela 13-1, por pontos. As integrais devem ser calculadas numericamente (por exemplo, utilizando a "regra do trapézio"), com intervalos $\Delta x = 3,00$ m



$$E_{\text{arco}} = 210 \text{ t/cm}^2$$

$$J_c = 0,5 \text{ m}^4$$

TABELA 13-1

$\pm u$	v	$ \text{sen}\alpha $	$ \text{cos}\alpha $	J/J_c
0,0	10,0	0,0000	1,0000	1,0
3,0	9,9	0,0668	0,9978	1,1
6,0	9,6	0,1339	0,9912	1,4
9,0	9,1	0,1965	0,9805	1,9
12,0	8,4	0,2588	0,9659	2,6
15,0	7,5	0,3173	0,9483	3,5
18,0	6,4	0,3719	0,9283	4,6
21,0	5,1	0,4239	0,9057	5,9
24,0	3,6	0,4699	0,8821	7,4
27,0	1,9	0,5150	0,8572	9,1
30,0	0,0	0,5544	0,8323	11,0

2 - Esquema de solução

2-1 - Centro elástico - Admitamos a existência de um ponto C, chamado de centro elástico, cujas coordenadas são definidas por

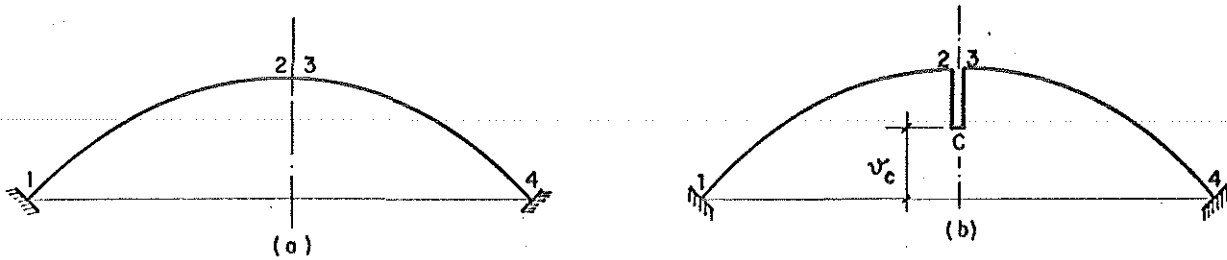
$$v_c = \frac{\int_{\text{arco}} v d\gamma}{\int_{\text{arco}} d\gamma} \quad \text{e} \quad u_c = \frac{\int_{\text{arco}} u d\gamma}{\int_{\text{arco}} d\gamma} = 0 \text{ por simetria}$$

onde

$$d\gamma = \frac{ds}{EJ}$$

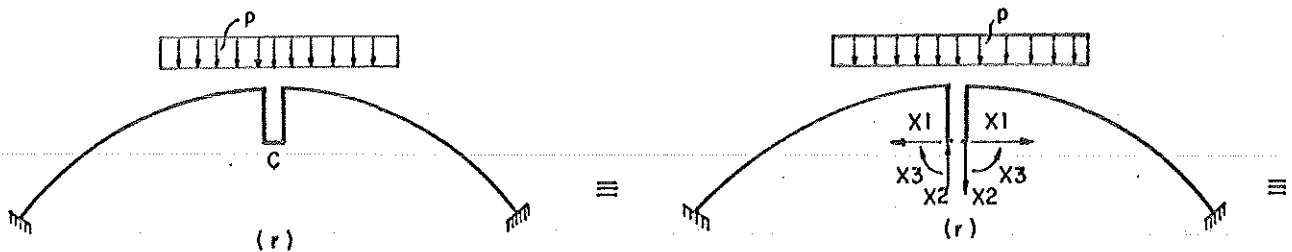
2-2 - Estrutura equivalente

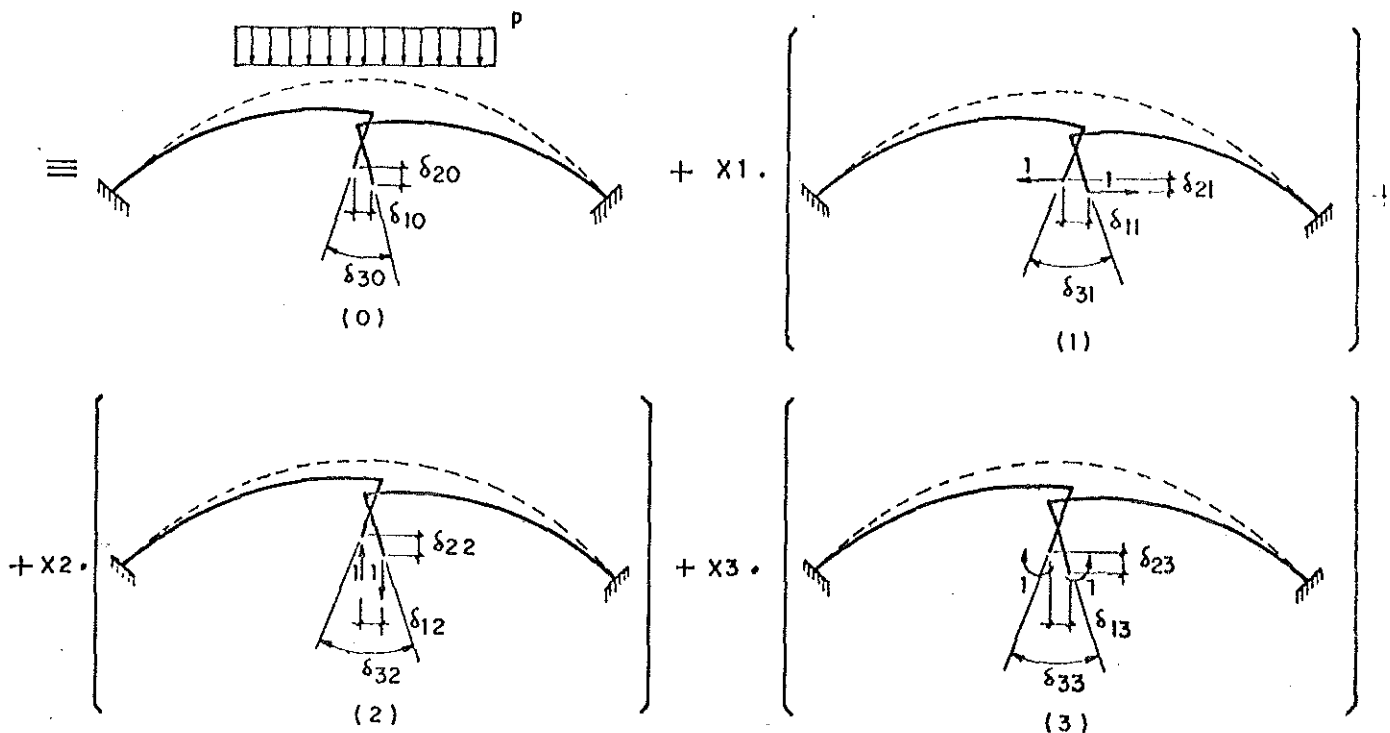
É fácil admitir que as duas estruturas desenhadas abaixo são absolutamente equivalentes, desde que se admita que o trecho 2-C-3 tenha rigidez infinita, isto é, $E \cdot J \rightarrow \infty$



2-3 - Desenvolvimento pelo processo dos esforços

Sendo essa estrutura três vezes hiperestática, deve-se retirar três vínculos e substituí-los pelos respectivos esforços. Sejam esses três vínculos aqueles que dão continuidade à estrutura da figura (b) do item 2-2 no ponto C. Assim:





$$(r) = (0) + X1 \cdot (1) + X2 \cdot (2) + X3 \cdot (3)$$

2-4 - Equações de compatibilidade de deslocamentos

$$\delta_{1r} = \delta_{10} + X1 \cdot \delta_{11} + X2 \cdot \delta_{12} + X3 \cdot \delta_{13} = 0$$

$$\delta_{2r} = \delta_{20} + X1 \cdot \delta_{21} + X2 \cdot \delta_{22} + X3 \cdot \delta_{23} = 0$$

$$\delta_{3r} = \delta_{30} + X1 \cdot \delta_{31} + X2 \cdot \delta_{32} + X3 \cdot \delta_{33} = 0$$

2-5 - Convenção de sinal

Momento fletor é positivo se provoca tração no intradorso.

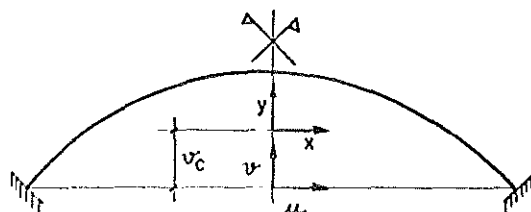
Esfôrço normal é positivo quando for de compressão.

Esfôrço cortante é positivo se percorrer a seção no sentido horário.

O ângulo α é medido no sentido anti-horário, da horizontal para a tangente ao arco no ponto considerado.

2-6 - Sistemas de referência

Além do sistema u, v , qualquer, ao qual é inicialmente referido o eixo do arco, utilizamos o sistema x, y , com origem no centro elástico C e tal que o eixo y coincida com o eixo de simetria do arco



2-7 - Esforços nos problemas (o), (1), (2), (3)

TABELA 13-2

Esf. Probl.	M	N	Q
(o)	m	n	Q
(1)	$-y$	$\cos\alpha$	$-\text{sen}\alpha$
(2)	$-x$	$-\text{sen}\alpha$	$-\cos\alpha$
(3)	-1	0	0

2-8 - Cálculo dos deslocamentos, considerando apenas os causados por momento fletor.

$$\delta_{10} = - \int_{\text{arco}} m y \, d\gamma$$

$$\delta_{20} = - \int_{\text{arco}} m x \, d\gamma$$

$$\delta_{30} = - \int_{\text{arco}} m \, d\gamma$$

$$\delta_{11} = \int_{\text{arco}} y^2 \, d\gamma$$

$$\delta_{22} = \int_{\text{arco}} x^2 \, d\gamma$$

$$\delta_{33} = \int_{\text{arco}} d\gamma$$

$$\delta_{21} = \delta_{12} = \int_{\text{arco}} x y \, d\gamma = 0 \quad \text{por simetria da estrutura}$$

$$\delta_{31} = \delta_{13} = \int_{\text{arco}} y \, d\gamma = \int_{\text{arco}} (v - v_c) \, d\gamma = \int_{\text{arco}} v \, d\gamma - v_c \int_{\text{arco}} d\gamma$$

= 0, já que v_c tem propriedades definidas no ítem 2-1

$$\delta_{32} = \delta_{23} = \int_{\text{arco}} x \, d\gamma = 0 \quad \text{por simetria da estrutura}$$

2-9 - Solução do sistema de equações de compatibilidade

Com o artifício utilizado, conforme se verificou no ítem 2-8, o sistema de equações do ítem 2-4 se torna totalmente diagonalizado.

Assim:

$$\delta_{1r} = \delta_{10} + X1 \cdot \delta_{11}$$

$$\delta_{2r} = \delta_{20} + X2 \cdot \delta_{22}$$

$$\delta_{3r} = \delta_{30} + X3 \cdot \delta_{33}$$

que tem como solução:

$$X1 = \frac{-\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{-\delta_{10}}{\int_{\text{arco}} y^2 d\gamma}$$

$$X2 = \frac{-\delta_{20}}{\delta_{22}} = \frac{-\delta_{20}}{\int_{\text{arco}} x^2 d\gamma}$$

$$X3 = \frac{-\delta_{30}}{\delta_{33}} = \frac{-\delta_{30}}{\int_{\text{arco}} d\gamma}$$

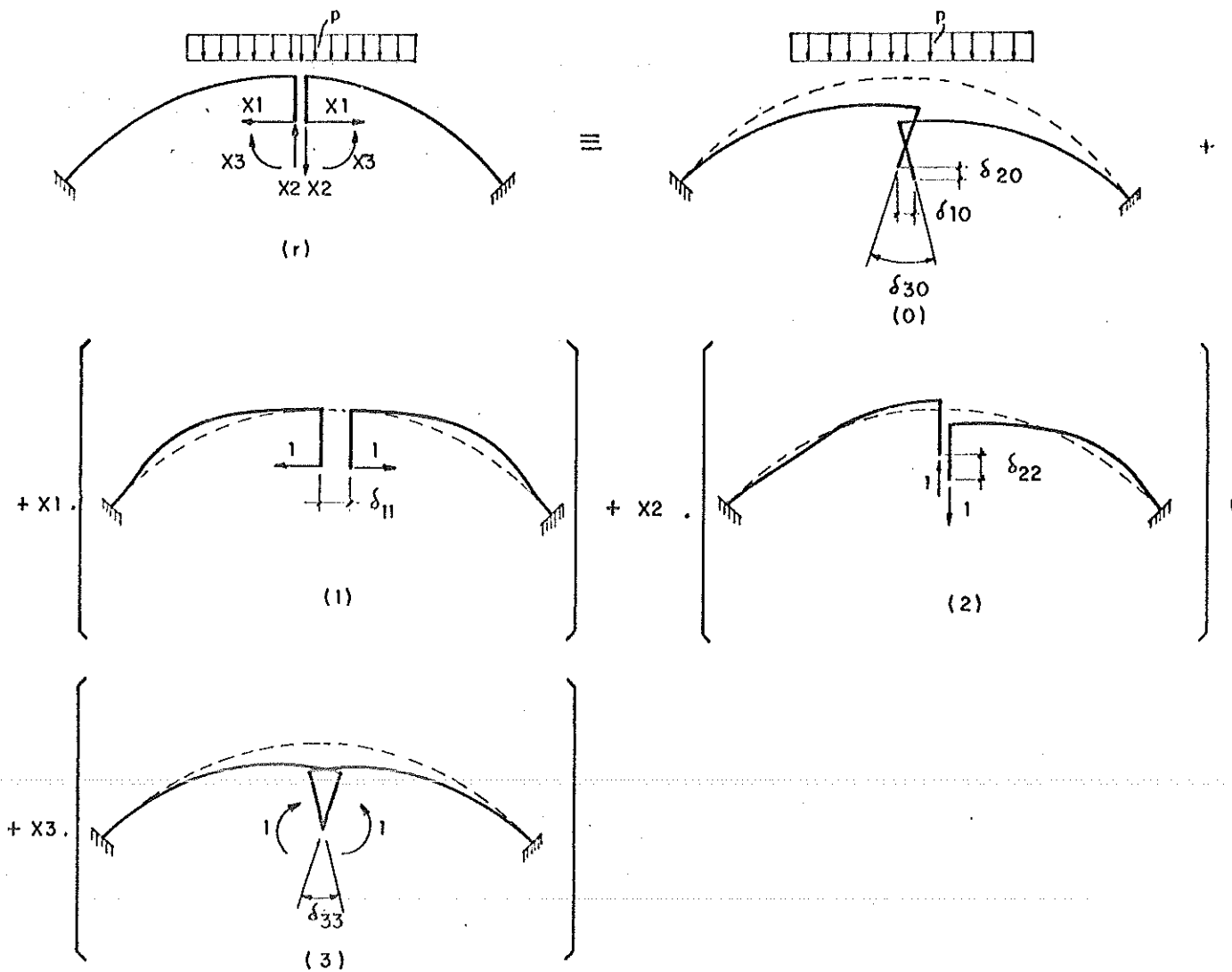
No caso de se estudar apenas o efeito de cargas

$$X1 = \frac{\int_{\text{arco}} m_y d\gamma}{\int_{\text{arco}} y^2 d\gamma}$$

$$X2 = \frac{\int_{\text{arco}} m_x d\gamma}{\int_{\text{arco}} x^2 d\gamma}$$

$$X3 = \frac{\int_{\text{arco}} m d\gamma}{\int_{\text{arco}} d\gamma}$$

2-10 - Reformulação do esquema do ítem 2-3 em função das propriedades observadas nos ítems seguintes.



3 - Cálculo das coordenadas do centro elástico

$$u_c = 0$$

$$v_c = \frac{\int_{\text{arco}} v dy}{\int_{\text{arco}} dy} = \frac{\int_{\text{arco}} \frac{v dx}{EJ \cos \alpha}}{\int_{\text{arco}} \frac{dx}{EJ \cos \alpha}} = \frac{\int_{-30}^{30} \frac{v}{\frac{J}{J_c} \cos \alpha} dx}{\int_{-30}^{30} \frac{1}{\frac{J}{J_c} \cos \alpha} dx}$$

Da tabela 13-3, colunas (6) e (7)

$$v_c = \frac{3,0 \cdot 34,655 \cdot 2}{3,0 \cdot 4,1227 \cdot 2} = 8,41 \text{ m}$$

4 - Cálculo das incógnitas hiperestáticas

4-1 - Cálculo de X1

$$X1 = \frac{\int_{\text{arco}} m y dy}{\int_{\text{arco}} y^2 dy} = \frac{\int_{-30}^{30} \frac{m y dx}{EJ \cos \alpha}}{\int_{-30}^{30} \frac{y^2 dx}{EJ \cos \alpha}} = \frac{\int_{-30}^{30} \frac{m y}{\frac{J}{J_c} \cos \alpha} dx}{\int_{-30}^{30} \frac{y^2}{\frac{J}{J_c} \cos \alpha} dx}$$

Da tabela 13-3, colunas (10) e (13)

$$X1 = \frac{3,0 \cdot 773,35 \cdot 2}{3,0 \cdot 20,583 \cdot 2} = 37,60 \text{ t}$$

4-2 - Cálculo de X2

X2 = 0, já que o carregamento é simétrico

4-3 - Cálculo de X3

$$X3 = \frac{\int_{\text{arco}} m dy}{\int_{\text{arco}} dy} = \frac{\int_{-30}^{30} \frac{m dx}{EJ \cos \alpha}}{\int_{-30}^{30} \frac{dx}{EJ \cos \alpha}} = \frac{\int_{-30}^{30} \frac{m}{\frac{J}{c} \cos \alpha} dx}{\int_{-30}^{30} \frac{1}{\frac{J}{c} \cos \alpha} dx}$$

Da tabela 13-3, colunas (6) e (12)

$$X3 = \frac{-3,0 \cdot 269,24 \cdot 2}{3,0 \cdot 4,1227 \cdot 2} = -65,30 \text{ tm}$$

5 - Superposição de efeitos

5-1 - Expressão geral

Da tabela 13-2

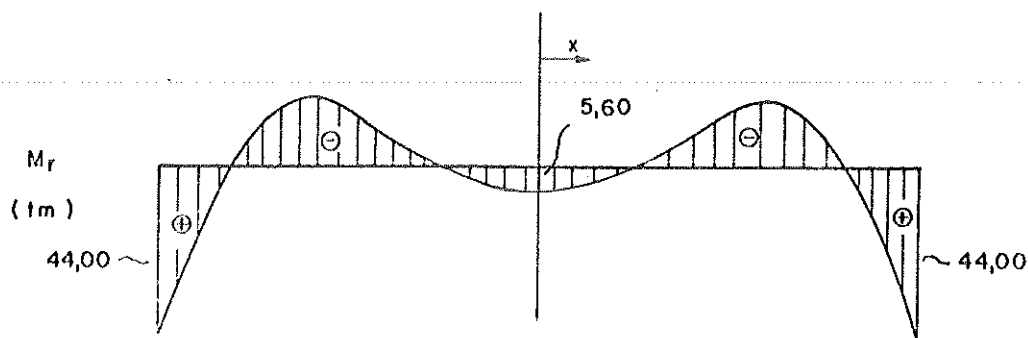
$$M_r = m - X1 \cdot y - X2 \cdot x - X3 = m - X1 \cdot y - X3$$

$$N_r = n + X1 \cos \alpha - X2 \operatorname{sen} \alpha = n + X1 \cdot \cos \alpha$$

$$Q_r = Q - X1 \operatorname{sen} \alpha - X2 \cos \alpha = Q - X1 \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

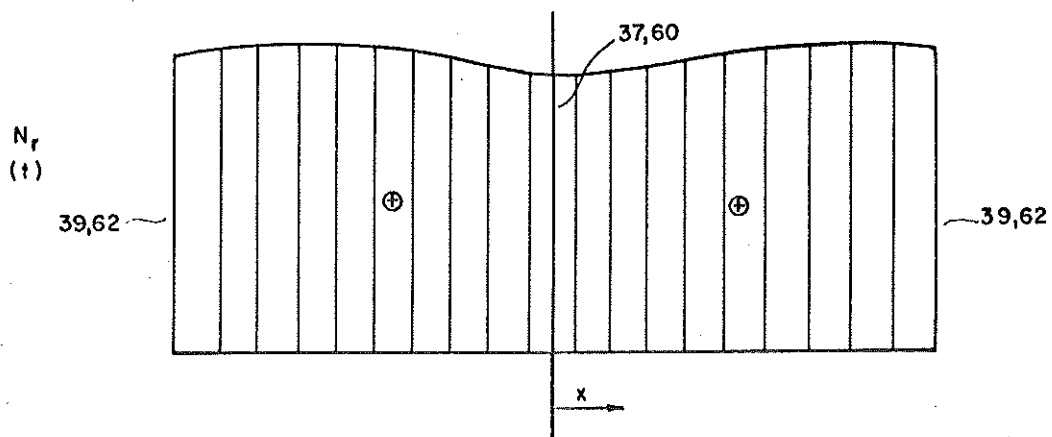
5-2 - Diagrama de momentos fletores

Da tabela 13-4, coluna (12)



5-3 - Diagrama de esforço normal

Da tabela 13-4, coluna (13)



5-4 - Diagrama de esforço cortante

Da tabela 13-4, coluna (14)

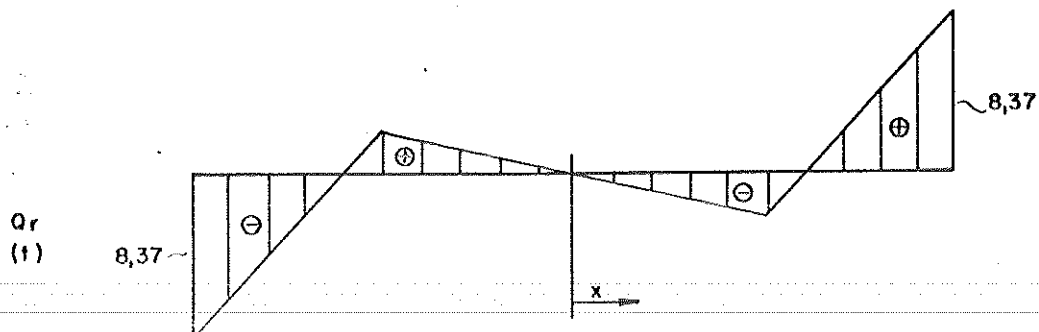


TABELA 13-3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
seção	v	cosα	$\frac{J}{J_c}$	$\frac{J}{J_c} \cos\alpha$	$\frac{l}{\frac{J}{J_c} \cos\alpha}$	$\frac{v}{\frac{J}{J_c} \cos\alpha}$	y	y^2	$\frac{y^2}{\frac{J}{J_c} \cos\alpha}$	m	$\frac{m}{\frac{J}{J_c} \cos\alpha}$	$\frac{m y}{\frac{J}{J_c} \cos\alpha}$
0	10,0	1,0000	1,0	1,000	1,0000	10,000	1,59	2,528	2,528	- 0,0	- 0,00	- 0,00
1	9,9	0,9978	1,1	1,098	0,9110	9,010	1,49	2,191	1,995	- 4,5	- 4,10	- 6,07
2	9,6	0,9912	1,4	1,388	0,7210	6,920	1,19	1,416	1,021	- 18,0	- 12,96	- 15,42
3	9,1	0,9805	1,9	1,863	0,5370	4,885	0,69	0,476	0,255	- 40,5	- 21,75	- 15,00
4	8,4	0,9659	2,6	2,512	0,3990	3,350	-0,01	0,000	0,000	- 72,0	- 28,73	+ 0,29
5	7,5	0,9483	3,5	3,318	0,3015	2,262	-0,91	0,828	0,250	-112,5	- 33,90	+ 30,85
6	6,4	0,9283	4,6	4,269	0,2343	1,500	-2,01	4,040	0,946	-157,5	- 36,90	+ 74,15
7	5,1	0,9057	5,9	5,475	0,1827	0,932	-3,31	10,950	2,000	-202,5	- 37,00	+122,50
8	3,6	0,8821	7,4	6,525	0,1533	0,552	-4,81	23,135	3,548	-247,5	- 37,90	+182,30
9	1,9	0,8572	9,1	7,795	0,1283	0,244	-6,51	42,370	5,440	-292,5	- 37,55	+244,50
10	0,0	0,8323	11,0	9,155	0,1092	0,000	-8,41	70,728	7,725	-337,5	- 36,90	+310,50
Σ^*					4,1227	34,655			20,583		-269,24	+773,35

$$\sum_{i=0}^{10} f_i = \frac{1}{2} f_0 + \sum_{i=1}^9 f_i + \frac{1}{2} f_{10}$$

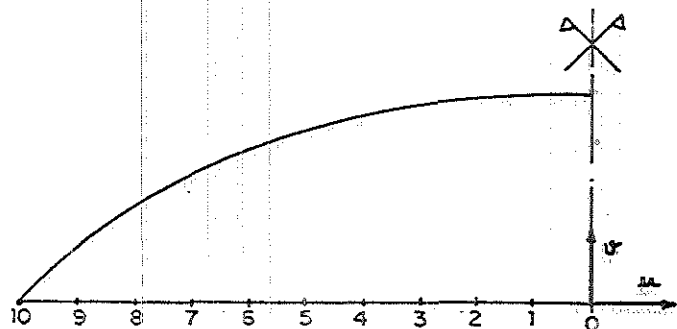


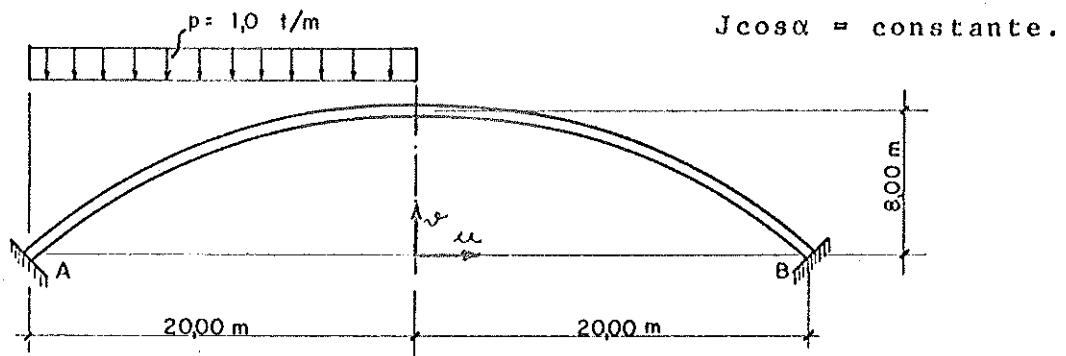
TABELA 13-4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
seção	-u	m	n	Q	y	sen α	cos α	-Xl·y	Xlcos α	-Xlsen α	M _r	N _r	Q _r
0	0,0	- 0,0	0,000	0,000	1,59	0,0000	1,0000	-59,70	37,60	- 0,00	5,60	37,60	0,00
1	3,0	- 4,5	0,200	2,996	1,49	0,0668	0,9978	-55,60	37,55	- 2,51	5,20	37,75	0,49
2	6,0	- 18,0	0,804	5,945	1,19	0,1339	0,9912	-44,70	37,30	- 5,03	2,60	38,10	0,92
3	9,0	- 40,5	1,768	8,825	0,69	0,1965	0,9805	-25,90	36,95	- 7,39	- 1,10	38,72	1,44
4	12,0	- 72,0	3,104	11,590	-0,01	0,2588	0,9659	0,40	36,35	- 9,74	- 6,30	39,45	1,85
5	15,0	-112,5	4,760	14,220	-0,91	0,3173	0,9483	34,20	35,65	-11,92	-13,00	40,41	2,30
6	18,0	-157,5	5,580	13,930	-2,01	0,3719	0,9283	75,60	34,90	-13,97	-16,60	40,48	-0,04
7	21,0	-202,5	6,360	13,580	-3,31	0,4239	0,9057	124,50	34,10	-15,93	-12,70	40,46	-2,35
8	24,0	-247,5	7,050	13,235	-4,81	0,4699	0,8821	181,00	33,15	-17,65	- 1,20	40,20	-4,41
9	27,0	-292,5	7,730	12,860	-6,51	0,5150	0,8572	244,80	32,25	-19,35	17,60	39,98	-6,49
10	30,0	-337,5	8,320	12,480	-8,41	0,5544	0,8323	316,20	31,30	-20,85	44,00	39,62	-8,37

EXERCÍCIO 14 - Arco biengastado

1 - Enunciado e dados

O arco biengastado, simétrico, da figura tem um eixo parabólico de 29 grau. A variação de momentos de inércia é tal que



$$\alpha = 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$E = 210 \text{ t/cm}^2$$

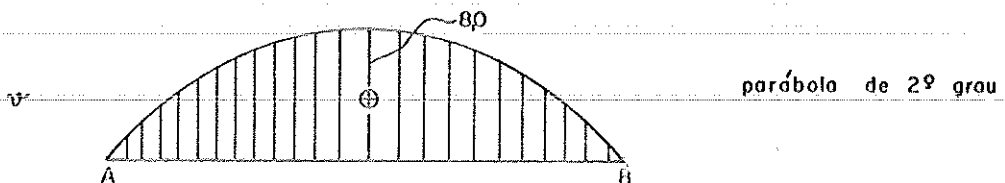
$$J \cos \alpha = 0,05 \text{ m}^4 = 5 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$$

$$E J \cos \alpha = 1,05 \cdot 10^9 \text{ tcm}^2 = 1,05 \cdot 10^5 \text{ tm}^2$$

Determinar o diagrama de momentos fletores nos diversos casos abaixo enumerados:

- Para o carregamento da figura
- Recalque horizontal de 5 cm do apoio B para a direita
- Recalque vertical de 3 cm do apoio B para baixo
- Giro no sentido horário, $\phi = 0,005 \text{ rd}$ do apoio B
- Variação uniforme de temperatura de $\Delta \theta = 30 \text{ } ^\circ\text{C}$

2 - Cálculo do centro elástico C

2-1 - Diagrama da função v , ordenada do eixo do arco2-2 - Cálculo das coordenadas de C, u_c e v_c

$u_c = 0$ por simetria

$$v_c = \frac{\int_{\text{arco}} v dy}{\int_{\text{arco}} dy} = \frac{\int_{\text{arco}} v \frac{ds}{EJ}}{\int_{\text{arco}} \frac{ds}{EJ}} = \frac{\int_{\text{arco}} \frac{v dx}{EJ \cos \alpha}}{\int_{\text{arco}} \frac{dx}{EJ \cos \alpha}} = \frac{\int_{-20}^{20} v dx}{\int_{-20}^{20} dx}$$

Utilizando a tabela A1 do anexo:

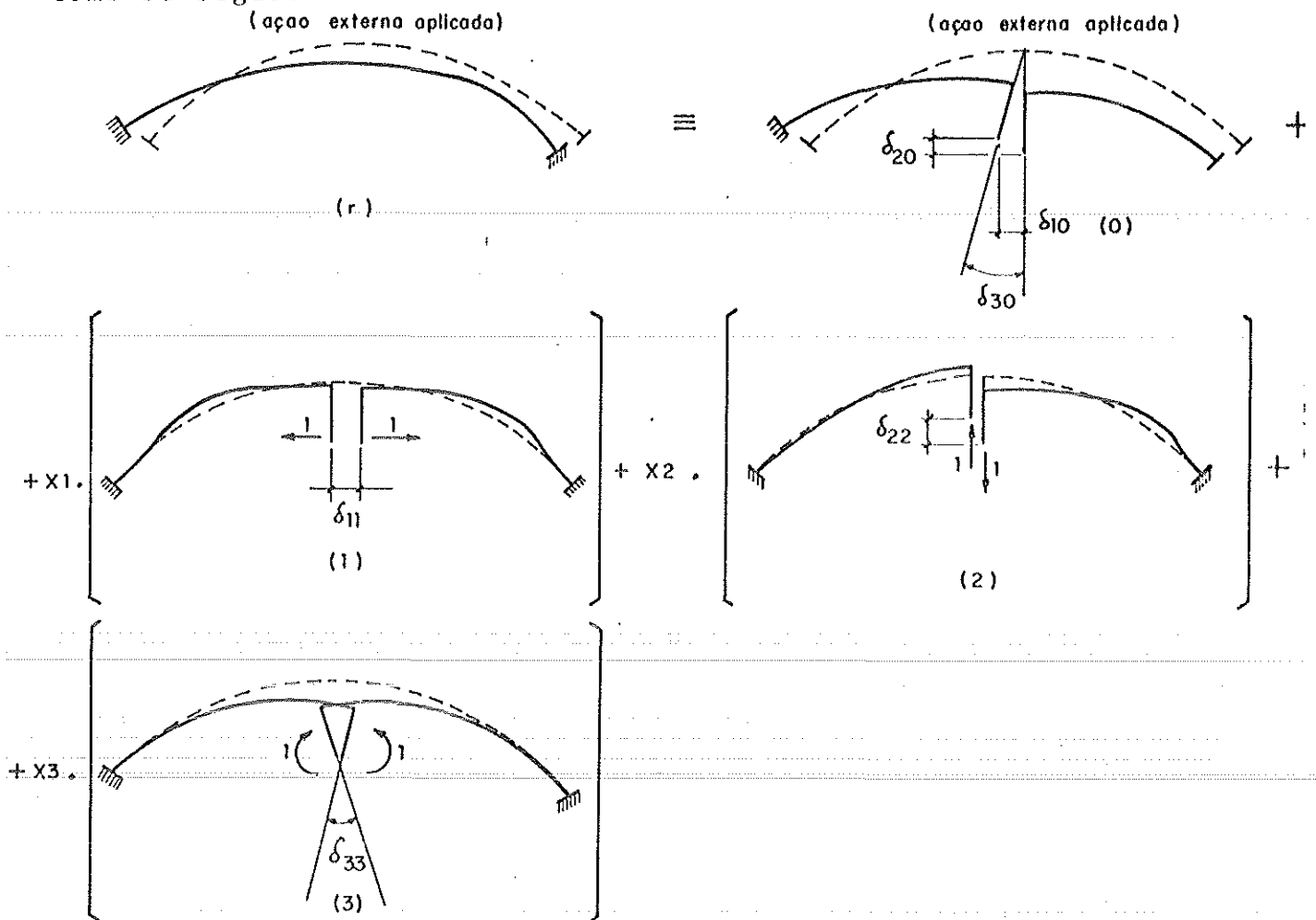
$$\int_{-20}^{20} v \, dx = 40,0 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8,0 \cdot 1,0 = 213,33$$

$$\int_{-20}^{20} dx = 40,0$$

$$v_c = \frac{213,33}{40,00} = 5,33 \text{ m}$$

3 - Esquema geral de solução

Com o mesmo esquema de cálculo do exercício 13, itens 2-1 a 2-10, pode-se tratar o efeito de uma ação externa qualquer (deslocamentos impostos de extremidade, cargas, variação de temperatura, etc.) num arco biengastado simétrico pela superposição de diversos problemas, como se segue:



Onde X1, X2 e X3 são calculáveis, conforme o item 2-9 do exercício 13, pelas expressões:

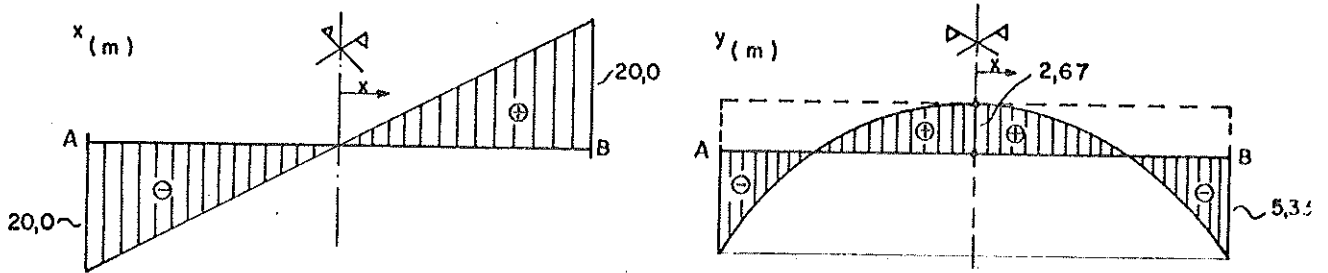
$$X1 = \frac{-\delta_{10}}{\delta_{11}}$$

$$X2 = \frac{-\delta_{20}}{\delta_{22}}$$

$$X3 = \frac{-\delta_{30}}{\delta_{33}}$$

onde δ_{11} , δ_{22} , δ_{33} independem da ação externa aplicada à estrutura, dependendo apenas das características geométricas e elásticas do arco.

4 - Diagrama de x e de y



5 - Fatores que independem do carregamento

5-1 - Cálculo de δ_{11}

$$\delta_{11} = \int_{\text{arco}} y^2 d\gamma = \int_{\text{arco}} y^2 \frac{ds}{EJ} = \int_{-20}^{20} y^2 \frac{dx}{EJ \cos \alpha} = \frac{1}{EJ \cos \alpha} \int_{-20}^{20} y^2 dx$$

Utilizando a tabela A1 do anexo:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ \cos \alpha} \left[40,0 \cdot \frac{8}{15} \cdot 8,00^2 + 40,0 \cdot 5,33^2 - 2 \cdot 40,0 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8,0 \cdot 5,33 \right] = \frac{1}{1,05 \cdot 10^5} \cdot 229 = 2,180 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

5-2 - Cálculo de δ_{22}

$$\delta_{22} = \int_{\text{arco}} x^2 d\gamma = \int_{\text{arco}} x^2 \frac{ds}{EJ} = \int_{-20}^{20} x^2 \frac{dx}{EJ \cos \alpha} = \frac{1}{EJ \cos \alpha} \int_{-20}^{20} x^2 dx$$

Utilizando a tabela A1 do anexo:

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ \cos \alpha} \left[2 \cdot 20,0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 20,0^2 \right] = \frac{1}{1,05 \cdot 10^5} \cdot 5333 = 50,75 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

5-3 - Cálculo de δ_{33}

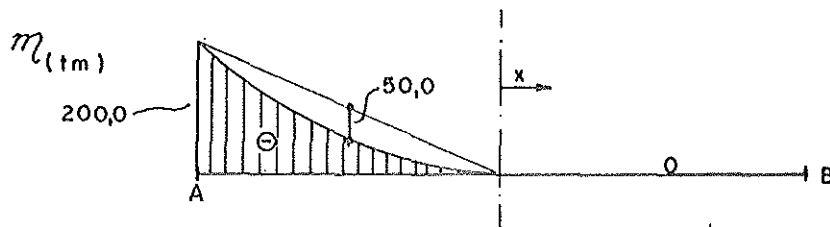
$$\delta_{33} = \int_{\text{arco}} d\gamma = \int_{\text{arco}} \frac{ds}{EJ} = \int_{-20}^{20} \frac{dx}{EJ \cos \alpha} = \frac{1}{EJ \cos \alpha} \int_{-20}^{20} dx$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{1,05 \cdot 10^5} \cdot 40,0 = 0,381 \cdot 10^{-3}$$

6 - Caso(a) - Efeito das cargas dadas

6-1 - Deslocamentos no problema(o)

6-1-1 - Diagrama de momentos fletores



6-1-2 - Cálculo dos deslocamentos

Conforme o ítem 2-8 do exercício 13

$$\delta_{10} = - \int_{\text{arco}} m_y d\gamma = - \frac{1}{EJ \cos \alpha} \cdot \int_{-20}^{20} m_y dx$$

Utilizando a tabela A1 do anexo

$$\delta_{10} = - \frac{1}{EJ \cos \alpha} \cdot \left[-20,0 \cdot \frac{2}{15} \cdot 200,0 \cdot 8,0 + 20,0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 5,33 \cdot 200 \right] =$$

$$= - \frac{1}{1,05 \cdot 10^5} \cdot 2840 = -27,07 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\delta_{20} = - \int_{\text{arco}} m_x d\gamma = - \frac{1}{EJ \cos \alpha} \int_{-20}^{20} m_x dx$$

Utilizando a tabela A1 do anexo

$$\delta_{20} = - \frac{1}{EJ \cos \alpha} \cdot \left[20,0 \cdot \frac{1}{4} \cdot 200,0 \cdot 20,0 \right] = - \frac{1}{1,05 \cdot 10^5} \cdot 20000,0 =$$

$$= -190,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\delta_{30} = - \int_{\text{arco}} m d\gamma = - \frac{1}{EJ \cos \alpha} \int_{-20}^{20} m dx$$

Utilizando a tabela A1 do anexo

$$\delta_{30} = - \frac{1}{EJ \cos \alpha} \cdot \left[-20,0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 200,0 \cdot 1 \right] = \frac{1}{1,05 \cdot 10^5} \cdot 1333,3 =$$

$$= 12,69 \cdot 10^{-3} \text{ rd}$$

6-2 - Cálculo das incógnitas hiperestáticas

$$X1 = \frac{-\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{27,07 \cdot 10^{-3}}{2,180 \cdot 10^{-3}} = 12,410 \text{ t}$$

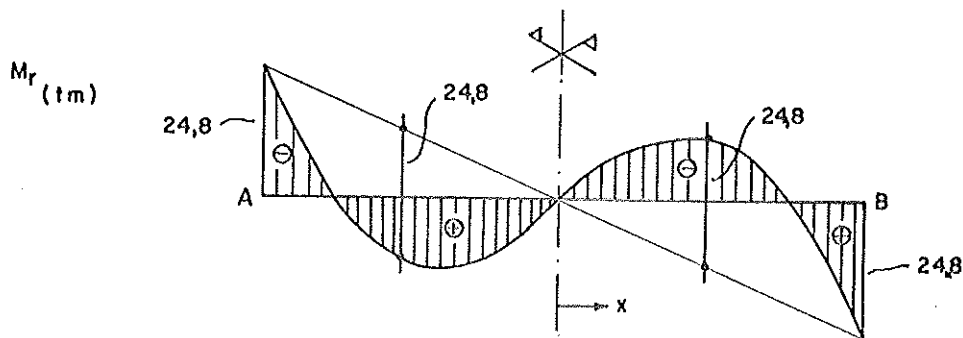
$$X_2 = \frac{-\delta_{20}}{\delta_{22}} = \frac{190,5 \cdot 10^{-3}}{50,75 \cdot 10^{-3}} = 3,755 \text{ t}$$

$$X_3 = \frac{-\delta_{30}}{\delta_{33}} = \frac{-12,69 \cdot 10^{-3}}{0,381 \cdot 10^{-3}} = -33,3 \text{ tm}$$

6-3 - Superposição de efeitos

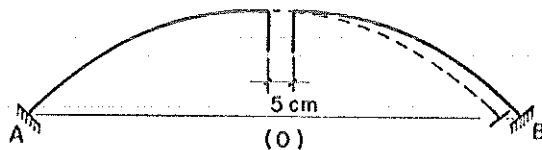
Utilizando a tabela 13-2, Ítem 2-7 do exercício 13

$$M_r = m - 12,410 y - 3,755 x + 33,3$$



7 - Caso(b) - Recalque horizontal do apoio B de 5 cm para a direita

7-1 - Deslocamentos no problema(o)



$$\delta_{10} = 5 \text{ cm} = 50 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\delta_{20} = 0$$

$$\delta_{30} = 0$$

7-2 - Cálculo das incógnitas hiperestáticas

$$X_1 = \frac{-\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{-50 \cdot 10^{-3}}{2,180 \cdot 10^{-3}} = -22,930 \text{ t}$$

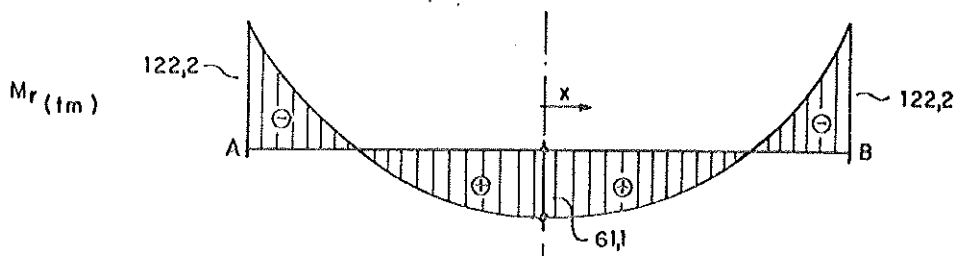
$$X_2 = 0$$

$$X_3 = 0$$

7-3 - Superposição de efeitos

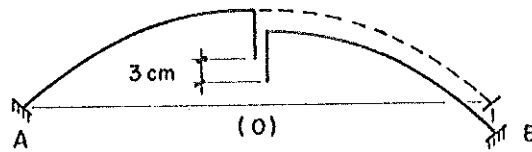
Utilizando a tabela 13-2, Ítem 2-7 do exercício 13

$$M_r = 22,930 y$$



8 - Caso(c) - Recalque vertical de 3 cm do apoio B para baixo

8-1 - Deslocamentos no problema(o)



$$\delta_{10} = 0$$

$$\delta_{20} = 3 \text{ cm} = 30 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\delta_{30} = 0$$

8-2 - Cálculo das incógnitas hiperestáticas

$$X_1 = 0$$

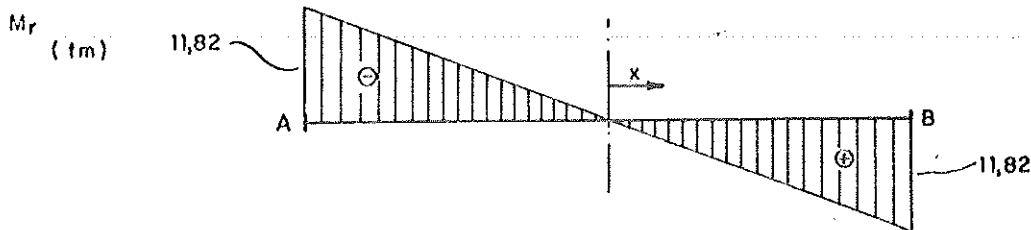
$$X_2 = \frac{-\delta_{20}}{\delta_{22}} = \frac{-30 \cdot 10^{-3}}{50,75 \cdot 10^{-3}} = -0,591 \text{ t}$$

$$X_3 = 0$$

8-3 - Superposição de efeitos

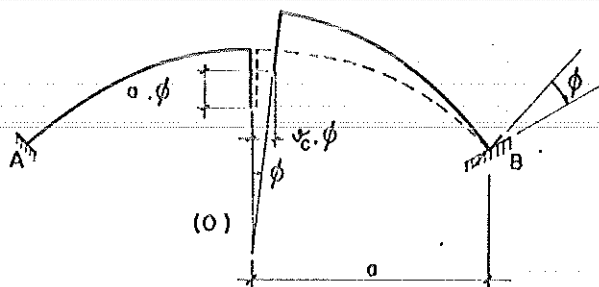
Utilizando a tabela 13-2, Ítem 2-7. do exercício 13

$$M_r = 0,591 \times$$



9 - Caso(d) - Giro no sentido horário, $\phi = 0,005 \text{ rd}$, do apoio B

9-1 - Deslocamentos do problema(o)



$$\delta_{10} = v_c \cdot \phi = 5,33 \cdot 0,005 = 26,65 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\delta_{20} = -a \cdot \phi = -20,0 \cdot 0,005 = -100 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\delta_{30} = -\phi = -0,005 = -5 \cdot 10^{-3} \text{ rd}$$

9-2 - Cálculo das incógnitas hiperestáticas

$$X_1 = \frac{-\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{-26,65 \cdot 10^{-3}}{2,180 \cdot 10^{-3}} = -12,22 \text{ t}$$

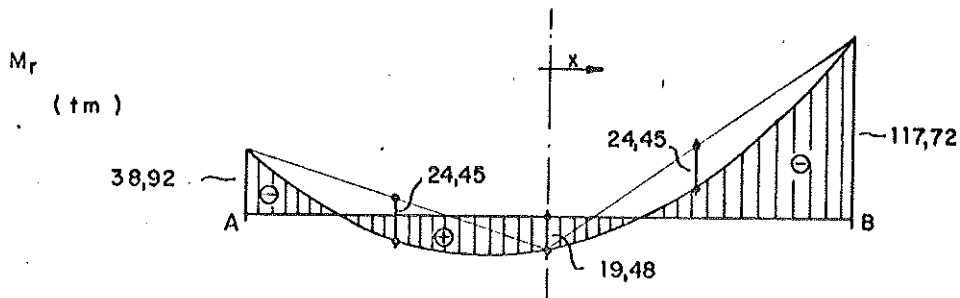
$$X_2 = \frac{-\delta_{20}}{\delta_{22}} = \frac{100 \cdot 10^{-3}}{50,75 \cdot 10^{-3}} = 1,97 \text{ t}$$

$$X_3 = \frac{-\delta_{30}}{\delta_{33}} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{0,381 \cdot 10^{-3}} = 13,12 \text{ tm}$$

9-3 - Superposição de efeitos

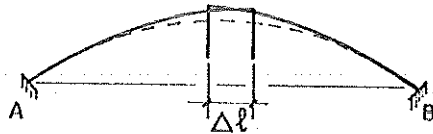
Utilizando a tabela 13-2; ítem 2-7, do exercício 13

$$M_r = 12,22 \cdot y - 1,97 \cdot x - 13,12$$



10 - Caso(e) - Variação uniforme de temperatura, $\Delta\theta = +30^\circ\text{C}$

10-1 - Deslocamentos do problema(o)



$$\Delta l = l \cdot \alpha \cdot \Delta\theta = 40,0 \cdot 10^{-5} \cdot 30 = 12,00 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\delta_{10} = -12,00 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\delta_{20} = 0$$

$$\delta_{30} = 0$$

10-2 - Cálculo das incógnitas hiperestáticas

$$X_1 = \frac{-\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{12,0 \cdot 10^{-3}}{2,180 \cdot 10^{-3}} = 5,5 \text{ t}$$

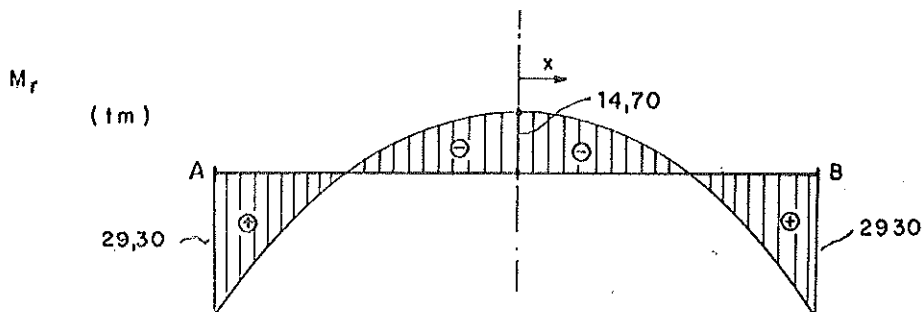
$$X_2 = 0$$

$$X_3 = 0$$

10-3 - Superposição de efeitos

Utilizando a tabela 13-2, ítem 2-7, do exercício 13

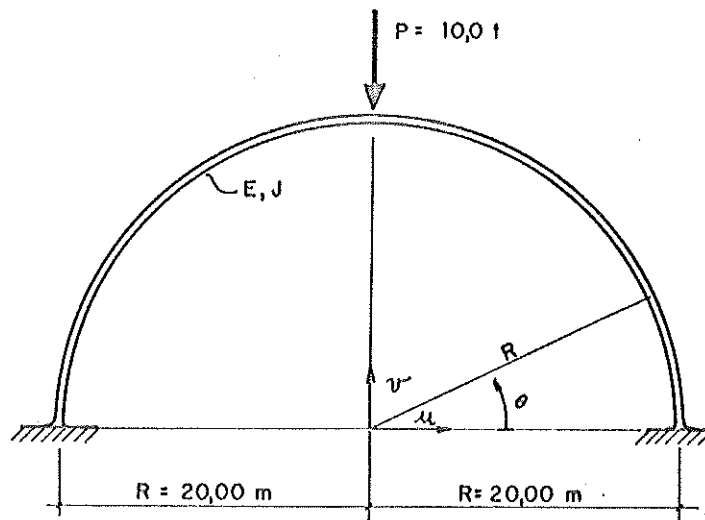
$$M_r = -5,50 \cdot y$$



EXERCÍCIO 15 - Arco biengastado

1 - Enunciado e dados

No arco biengastado da figura, de eixo semicircular e momento de inércia $J = \text{constante}$, determinar o diagrama de momentos fletores.



$E J = \text{constante}$

2 - Cálculo das coordenadas do centro elástico C

$$u_c = 0$$

$$v_c = \frac{\int_{\text{arco}} v dy}{\int_{\text{arco}} dy} = \frac{\int_{\text{arco}} v ds}{\int_{\text{arco}} ds} = \frac{\int_0^\pi R \sin \theta \cdot R d\theta}{\int_0^\pi R d\theta} = \frac{R^2 \left[-\cos \theta \right]_0^\pi}{R \left[\theta \right]_0^\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot R$$

$$v_c = 12,73 \text{ m}$$

3 - Esquema de solução

O esquema de solução, bem como as convenções de sinal e orientação de eixos de referência, é absolutamente idêntico ao desenvolvido no exercício 13, itens 2-1 a 2-10. As incógnitas hiperestáticas são dadas pelas fórmulas:

$$X_1 = \frac{\int_{\text{arco}} m_y dy}{\int_{\text{arco}} y^2 dy}$$

$$X_2 = \frac{\int_{\text{arco}} m_x dy}{\int_{\text{arco}} x^2 dy}$$

$$X_3 = \frac{\int_{\text{arco}} m dy}{\int_{\text{arco}} dy}$$

4 - Cálculo das incógnitas hiperestáticas

4-1 - Funções envolvidas no problema (t, m)

$$m = -\frac{P}{2} \cdot u = -\frac{P}{2} R \cos \theta \quad p/ \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$y = v - v_c = R \sin \theta - \frac{2}{\pi} R$$

$$x = R \cos \theta$$

4-2 - Cálculo de X1

$$X_1 = \frac{\int_{\text{arco}} m y dy}{\int_{\text{arco}} y^2 dy} = \frac{2 \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{PR}{2} \cos \theta\right) \left(R \sin \theta - \frac{2}{\pi} R\right) R d\theta}{2 \int_0^{\pi/2} \left(R \sin \theta - \frac{2}{\pi} R\right)^2 R d\theta}$$

$$= P \cdot \frac{\int_0^{\pi/2} \left(-\frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{\pi} \cos \theta\right) d\theta}{\int_0^{\pi/2} \left(\sin^2 \theta - \frac{4}{\pi} \sin \theta + \frac{4}{\pi^2}\right) d\theta}$$

$$= P \cdot \frac{\left. + \frac{1}{8} \cos 2\theta + \frac{1}{\pi} \sin \theta \right|_0^{\pi/2}}{\left. \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{4}{\pi} \cos \theta + \frac{4}{\pi^2} \theta \right|_0^{\pi/2}} = P \cdot \frac{\frac{1}{\pi} - \frac{1}{4}}{\frac{\pi}{4} + \frac{6}{\pi}}$$

$$= P \cdot \frac{4 - \pi}{\pi^2 + 24}$$

$$X_1 = 10,0 \cdot \frac{4 - 3,142}{9,870 + 24} = 0,2533 \text{ t}$$

4-3 - Cálculo de X2

$$X_2 = 0 \text{ por simetria de carregamento}$$

4-4 - Cálculo de X3

$$X_3 = \frac{\int_{\text{arco}} m_c d\gamma}{\int_{\text{arco}} d\gamma} = \frac{2 \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{PR}{2} \cos\theta\right) R d\theta}{2 \int_0^{\pi/2} R d\theta} = \frac{PR}{2} \cdot \frac{\int_0^{\pi/2} (-\cos\theta) d\theta}{\int_0^{\pi/2} d\theta} =$$

$$= \frac{PR}{2} \cdot \frac{-\text{sen}\theta \Big|_0^{\pi/2}}{\theta \Big|_0^{\pi/2}} = -\frac{PR}{\pi} = -\frac{10,0 \cdot 20,0}{\pi} = -63,6 \text{ tm}$$

5 - Superposição de efeitos

Da tabela 13-2, do exercício 13

$$M_r = m_c - X_1 \cdot y - X_2 \cdot x - X_3$$

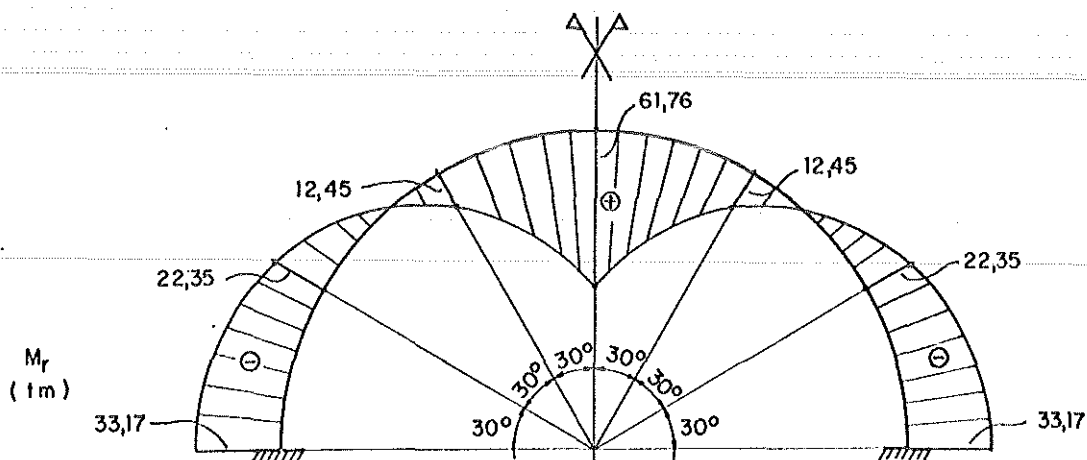
Do ítem 4-1

$$M_r = -\frac{PR}{2} \cos\theta - X_1 \cdot (R \text{sen}\theta - \frac{2}{\pi} R) - X_3 =$$

$$= -\frac{10 \cdot 20,0}{2} \cos\theta - 0,2533(20,0 \text{ sen}\theta - 12,73) + 63,60 =$$

$$= -100,0 \cos\theta - 5,066 \text{ sen}\theta + 66,83 \quad p/0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

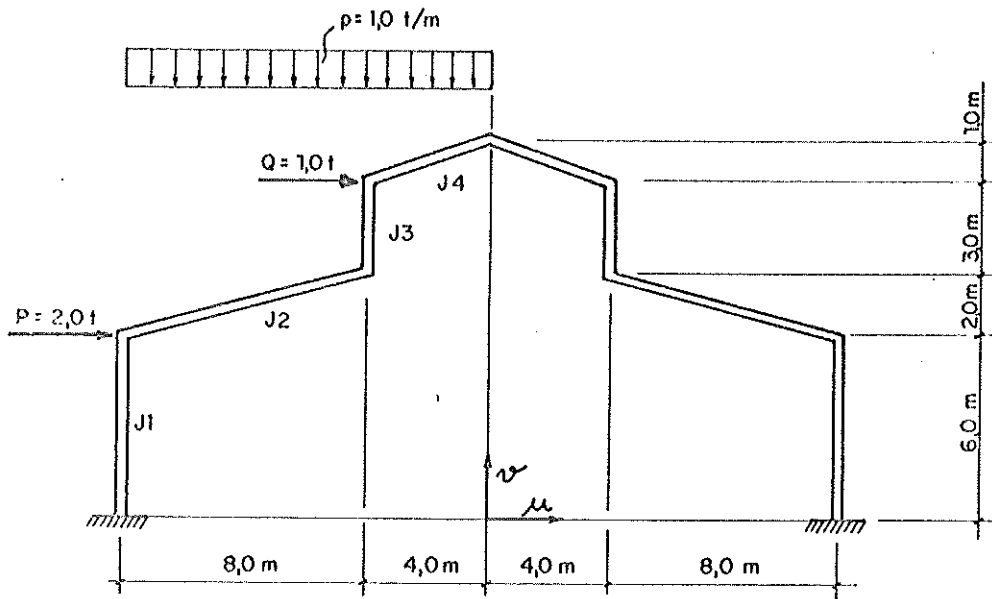
Diagrama



EXERCÍCIO 16 - Arco biengastado

1 - Enunciado e dados

No arco biengastado (pórtico simétrico biengastado) da figura de terminar o diagrama de momentos fletores



$E = \text{constante}$

$J_1 = 60\,000 \text{ cm}^4$

$J_2 = 20\,000 \text{ cm}^4$

$J_3 = 30\,000 \text{ cm}^4$

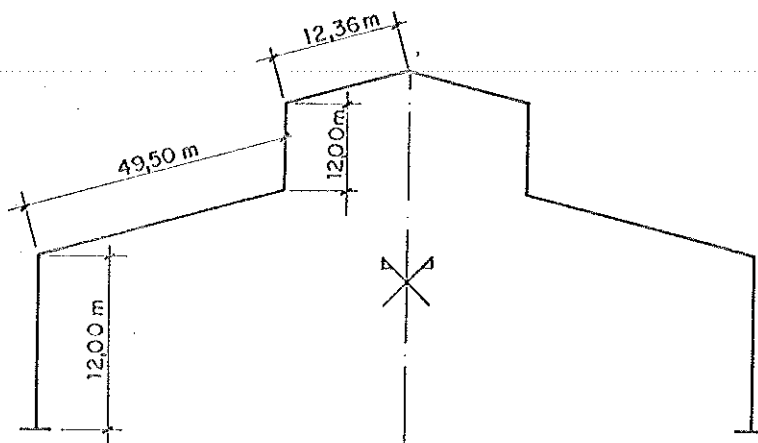
$J_4 = 40\,000 \text{ cm}^4$

2 - Comprimentos fictícios, l'

$$l' = \frac{E_c J_c}{EJ} \cdot l$$

$$J_c = 120\,000 \text{ cm}^4$$

$$E_c = E = \text{constante}$$



4-3 - Cálculo do centro elástico C

$$u_c = 0$$

$$v_c = \frac{\int_{\text{arco}} v d\gamma}{\int_{\text{arco}} d\gamma} = \frac{\int_{\text{arco}} v \frac{E_c J_c}{EJ} ds}{\int_{\text{arco}} \frac{E_c J_c}{EJ} ds} = \frac{\sum_k \int_0^{\ell'_k} v ds'}{\sum_k \int_0^{\ell'_k} ds'}$$

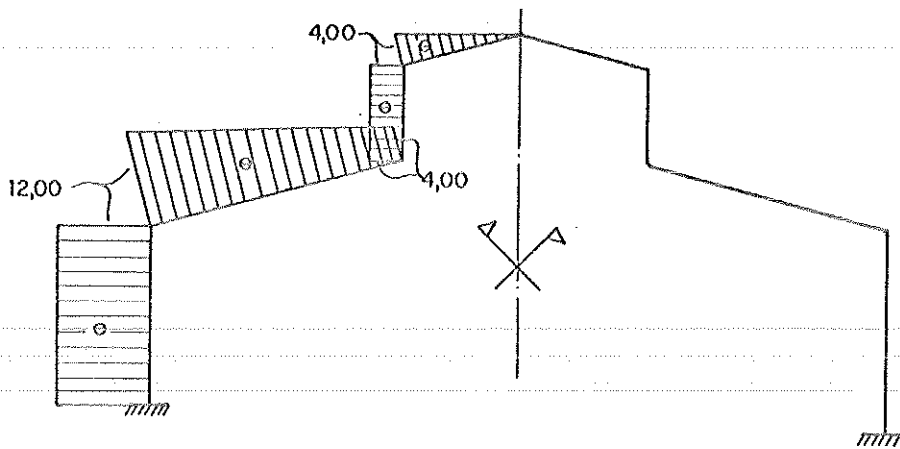
para tôdas as barras k de mesmo momento de inércia.

$$\sum_k \int_0^{\ell'_k} v ds' = 2 \cdot \left[12,0 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6,0 + 49,5 \cdot \frac{1}{2} (6,0 + 8,0) + 12,0 \cdot \frac{1}{2} (8,0 + 11,0) + 12,36 \cdot \frac{1}{2} (11,0 + 12,0) \right] = 1277,6$$

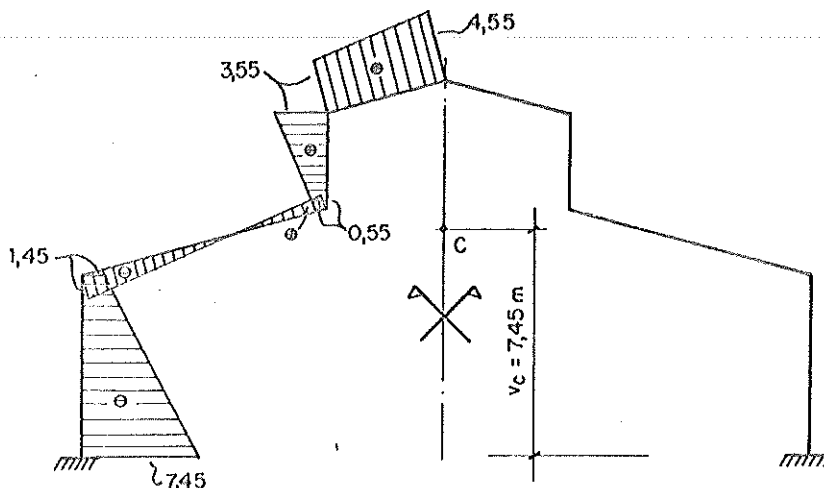
$$\sum_k \int_0^{\ell'_k} ds' = 2 \left[12,0 + 49,5 + 12,0 + 12,36 \right] = 171,72$$

$$v_c = \frac{1277,60}{171,72} = 7,45 \text{ m}$$

4-4 - Diagrama de x



4-5 - Diagrama de y



4-6 - Cálculo de X1

$$X1 = \frac{\int_{\text{arco}} m y dy}{\int_{\text{arco}} y^2 dy} = \frac{\int_{\text{arco}} m y \frac{E_c J_c}{EJ} ds}{\int_{\text{arco}} y^2 \frac{E_c J_c}{EJ} ds} = \frac{\sum_k \int_0^{\ell'_k} m y ds'}{\sum_k \int_0^{\ell'_k} y^2 ds'}$$

para todos os trechos k de mesmo momento de inércia.

Utilizando a tabela A1 do anexo

$$\begin{aligned} \sum_k \int_0^{\ell'_k} m y ds' &= \left\{ 12,0 \cdot \frac{1}{6} \left[95,0(2 \cdot 7,45 + 1,45) + 77,0(7,45 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \cdot 1,45) \right] + 49,5 \cdot \frac{1}{6} \left[77,0(2 \cdot 1,45 - 0,55) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 11,0(1,45 - 2 \cdot 0,55) \right] + 49,5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 8,0(-1,45 + \right. \\ &\quad \left. + 0,55) + \right. \\ &\quad \left. - 12,0 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left[11,0(2 \cdot 0,55 + 3,55) + 8,0(0,55 + 2 \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot 3,55) \right] - 12,36 \cdot \frac{1}{12} \cdot (3 \cdot 3,55 + 4,55) \cdot 8,0 \right\} = \\ &= 5756,00 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_k \int_0^{\ell'_k} y^2 ds' &= 2 \left\{ 12,0 \cdot \frac{1}{3} \cdot (7,45^2 + 1,45^2 + 7,45 \cdot 1,45) + 49,5 \cdot \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{3} (1,45^2 + 0,55^2 - 1,45 \cdot 0,55) + 12,0 \cdot \frac{1}{3} (0,55^2 + \right. \\ &\quad \left. + 3,55^2 + 0,55 \cdot 3,55) + 12,36 \cdot \frac{1}{3} (3,55^2 + 4,55^2 + \right. \\ &\quad \left. + 3,55 \cdot 4,55) \right\} = 1125,60 \end{aligned}$$

$$X1 = \frac{5756,00}{1125,60} = 5,115 \text{ t}$$

4-7 - Cálculo de X2

$$X2 = \frac{\int_{\text{arco}} m x dy}{\int_{\text{arco}} x^2 dy} = \frac{\int_{\text{arco}} m x \frac{E_c J_c}{EJ} ds}{\int_{\text{arco}} x^2 \frac{E_c J_c}{EJ} ds} = \frac{\sum_k \int_0^{\ell'_k} m x ds'}{\sum_k \int_0^{\ell'_k} x^2 ds'}$$

para todos os trechos k de mesmo momento de inércia.

$$\sum_k \int_0^{\ell'_k} m x ds' = \left\{ 12,0 \cdot \frac{1}{2} (95,0 + 77,0) \cdot 12,0 + 49,5 \cdot \frac{1}{6} \left[77,0 (2 \cdot 12,0 + 4,0) + 11,0 (12,0 + 2 \cdot 4,0) \right] + \right. \\ \left. - 49,5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 8,0 (12,0 + 4,0) + 12,0 \cdot \frac{1}{2} (8,0 + 11,0) \cdot 4,0 + 12,36 \cdot \frac{1}{4} \cdot 8,0 \cdot 4,0 \right\} = 30423,0$$

$$\sum_k \int_0^{\ell'_k} x^2 ds' = 2 \left\{ 12,0 \cdot 12,0^2 + 49,5 \cdot \frac{1}{3} (12,0^2 + 4,0^2 + 4,0 \cdot 12,0) + 12,0 \cdot 4,0^2 + 12,36 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4,0^2 \right\} = 10832,0$$

$$X_2 = \frac{30423,0}{10832,0} = 2,820 \text{ t}$$

4-8 - Cálculo de X3

$$X_3 = \frac{\int_{\text{arco}} m dy}{\int_{\text{arco}} dy} = \frac{\int_{\text{arco}} m \frac{E_c J_c}{EJ} ds}{\int_{\text{arco}} \frac{E_c J_c}{EJ} ds} = \frac{\sum_k \int_0^{\ell'_k} m ds'}{\sum_k \int_0^{\ell'_k} ds'}$$

para todos os trechos k de momento de inércia constante.

$$\sum_k \int_0^{\ell'_k} m ds' = -12,0 \cdot \frac{1}{2} (95,0 + 77,0) - 49,5 \cdot \frac{1}{2} (77,0 + 11,0) + \\ + 49,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8,0 - 12,0 \cdot \frac{1}{2} (11,0 + 8,0) - 12,36 \cdot \frac{1}{3} \cdot 8,0 = -3089,0$$

$$\sum_k \int_0^{\ell'_k} ds' = 2 \left[12,0 + 49,5 + 12,0 + 12,36 \right] = 171,72$$

$$X_3 = \frac{-3089,00}{171,72} = -18,00 \text{ tm}$$

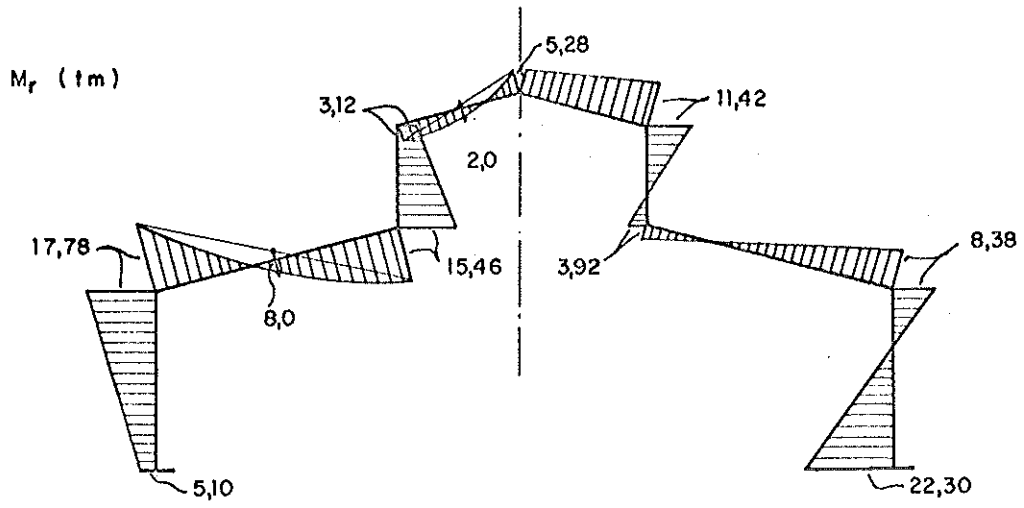
5 - Superposição de efeitos

5-1 - Momento fletor

Da tabela 13-2, ítem 2-7, do exercício 13, tem-se:

$$M_r = m - X_1 \cdot y - X_2 \cdot x - X_3$$

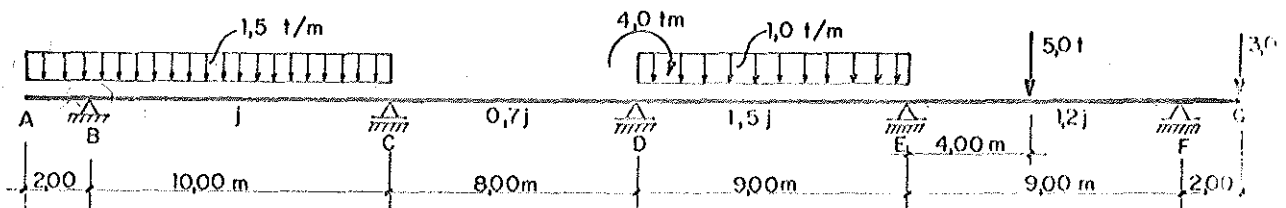
$$M_r = m - 5,115y - 2,820x + 18,00$$



EXERCÍCIO 17 - Método de Cross

1 - Enunciado e dados

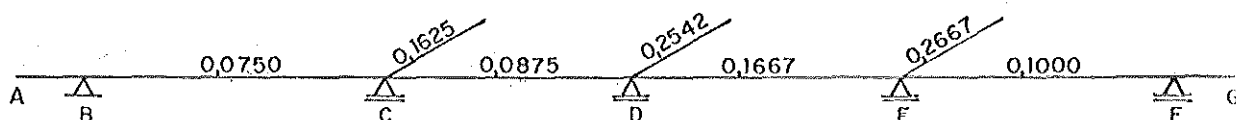
Determinar os diagramas de M e Q na viga contínua da figura



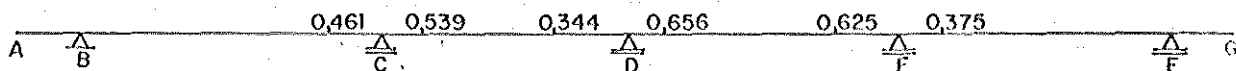
2 - Coeficientes de rigidez β

$$\beta = \frac{J}{J_c \ell} \quad \text{ou} \quad 0,75 \cdot \frac{J}{J_c \ell}$$

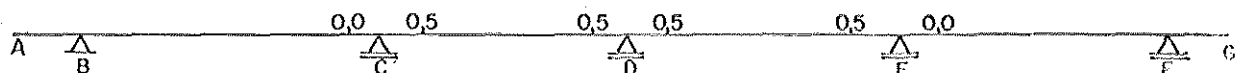
$$J_c = j$$



3 - Coeficientes de distribuição μ



4 - Coeficientes de propagação α



5 - Momentos de engastamento perfeito

O momento externo de +4,0 tm aplicado ao nó D não entra no cálculo dos momentos de engastamento perfeito das barras DE e DC, já que, nessa situação inicial, o nó D está bloqueado. Ao liberar o nó D entretanto não se deve esquecer de computar esse momento no cálculo do momento não equilibrado em D.

$$M_{BA} = - \frac{1,5 \cdot 2,0^2}{2} = - 3,0 \text{ tm}$$

Para que se verifique o equilíbrio do nó B

$$M_{BC} = - M_{BA} = 3,0 \text{ tm}$$

$$\text{Utilizando a tabela A5 do anexo: } M_{CB} = - \frac{1,5 \cdot 10,0^2}{8} + 0,5 \cdot 3,0 = - 17,25 \text{ tm}$$

onde a 2.^a das parcelas corresponde à propagação do momento $M_{BC} = 3,0 \text{ tm}$, igual a $\alpha_{BC} \cdot M_{BC} = 0,5 \cdot M_{BC}$

$$\text{Utilizando a tabela A3 do anexo: } M_{DE} = -M_{ED} = \frac{1,0 \cdot 9,0^2}{12} = 6,75 \text{ tm}$$

No balanço à direita temos:

$$M_{FG} = 2,0 \cdot 3,0 = 6,0 \text{ tm}$$

Para que se verifique o equilíbrio do nó F

$$M_{FE} = -M_{FG} = -6,0 \text{ tm}$$

Utilizando a tabela A4

$$M_{EF} = \frac{5,0 \cdot 4,00 \cdot 5,00}{2} \cdot \frac{9,00 + 5,00}{9,00^2} - 0,5 \cdot 6,0 = 5,65 \text{ tm}$$

onde a 2.^a parcela corresponde à propagação do momento $M_{FE} = -6,0 \text{ tm}$, igual a $\alpha_{FE} \cdot M_{FE} = 0,5 \cdot M_{FE}$

6 - Compensação de momentos

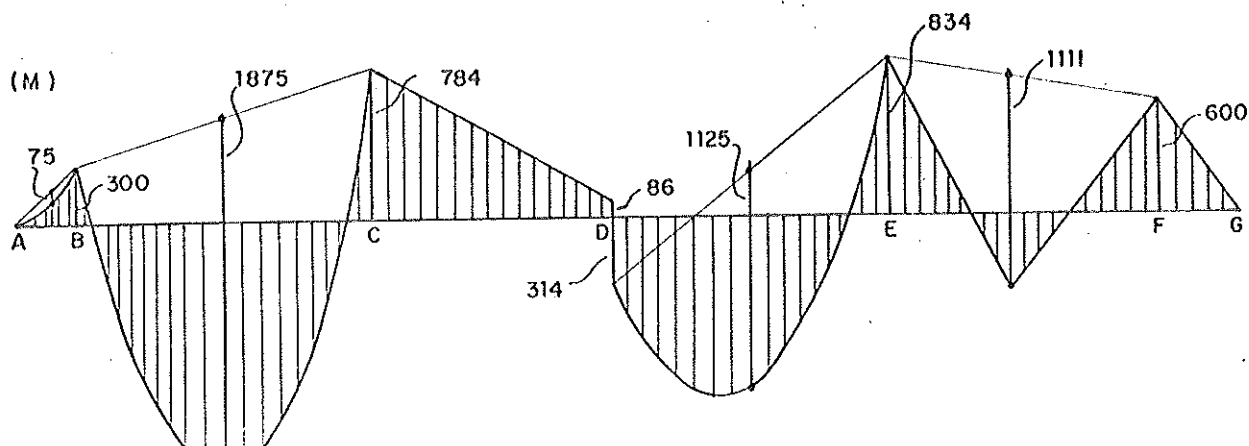
Os nós foram liberados na ordem:

C, D, E, C, D, E etc

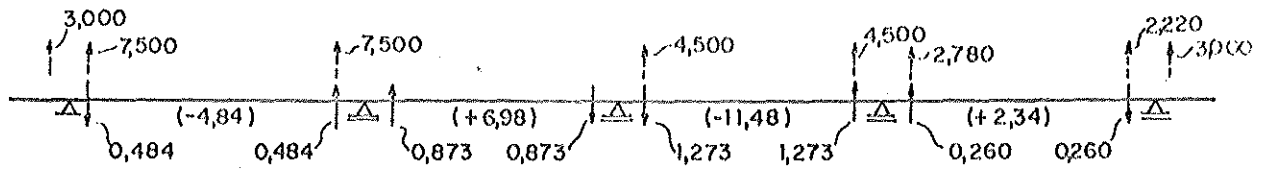
Para se trabalhar com números inteiros, com boa precisão, calculou-se no caso com a unidade tcm.

		C		D		E		F		
		0,0	0,5	0,5	0,5	0,5	0,0			
		0,461	0,539	0,344	0,656	0,625	0,375			
$\alpha \rightarrow$	B									
$\mu \rightarrow$										
	-300	+300	-1725		+675	-675	+565	-600	+600	
		0	+795	+930	+465					
				-265	-530	-1010				
					+192	+384	+231		0	
	0		+122	+143	+71					
				-45	-91	-172				
					+27	+54	+32		0	
	0		+21	+24	+12					
				-7	-13	-26				
					+4	+8	+5		0	
	0		+3	+4	+2					
				-1	-2	-4				
					+1	+1				
			0	+1					0	
					0	-1				
	-300	+300	-784	+784	-86	-314	-834	+834	-600	+600

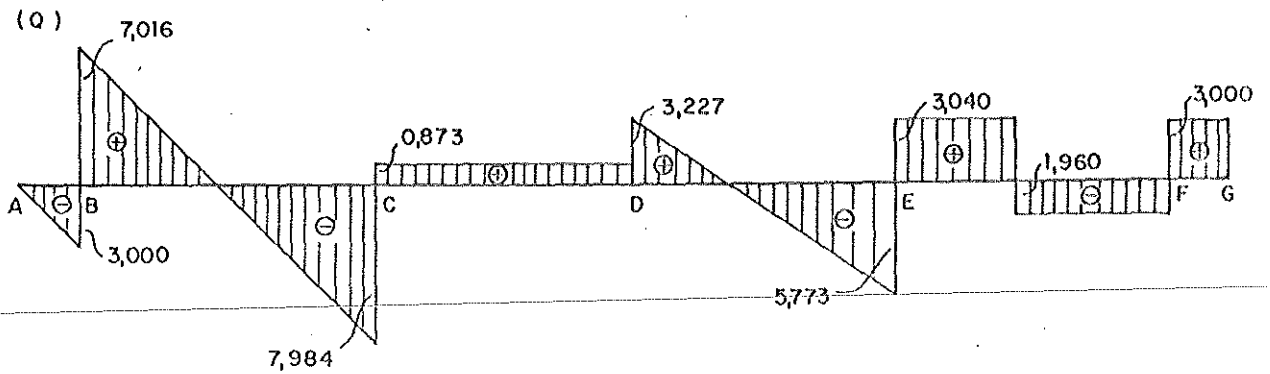
7 - Diagrama de momentos fletores (tcm)



8 - Ação dos nós sôbre as barras (t)



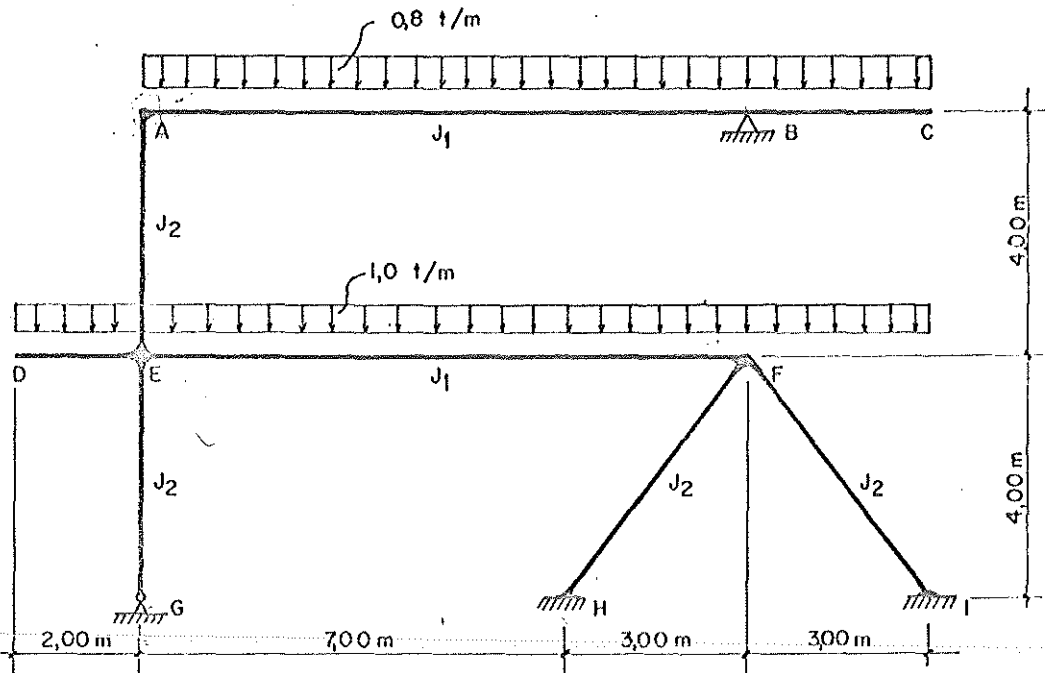
9 - Diagrama de esforços cortantes (t)



EXERCÍCIO 18 - Método de Cross

1 - Enunciado e dados

Determinar os diagramas de M, N, Q na estrutura da figura



$$J_1 = 200\,000 \text{ cm}^4$$

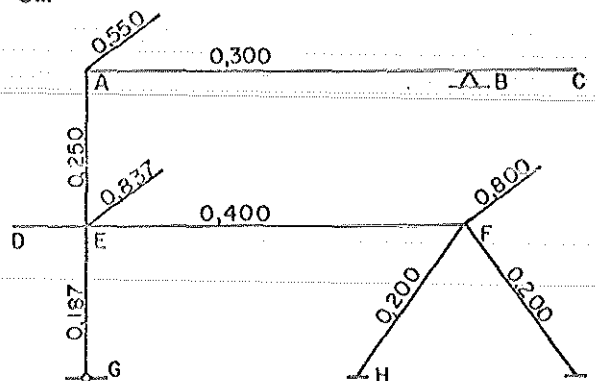
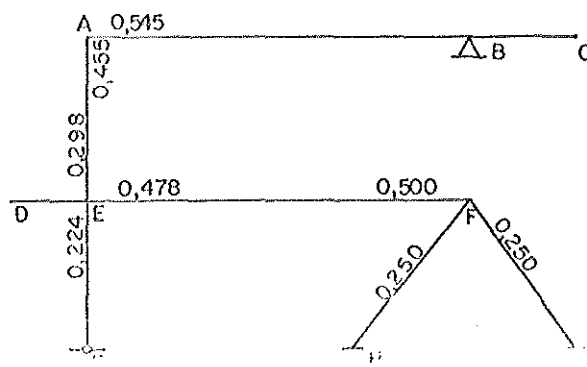
$$J_2 = 50\,000 \text{ cm}^4$$

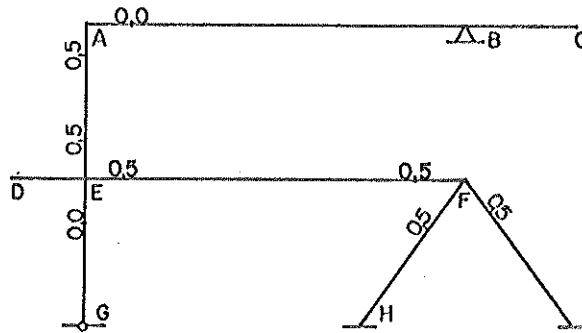
$$E = \text{constante}$$

2 - Coeficientes de rigidez β

$$\beta = \frac{J}{J_c l} \quad \text{ou} \quad 0,75 \frac{J}{J_c l}$$

$$J_c = 50\,000 \text{ cm}^4$$

3 - Coeficientes de distribuição μ 

4 - Coeficientes de propagação α 

5 - Momentos de engastamento perfeito

$$M_{BC} = + \frac{0,8 \cdot 3,0^2}{2} = + 3,60 \text{ tm}$$

Para que se verifique o equilíbrio do nó B

$$M_{BA} = -M_{BC} = -3,60 \text{ tm}$$

Utilizando a tabela A4 do anexo

$$M_{AB} = + \frac{0,8 \cdot 10,0^2}{8} - 0,5 \cdot 3,60 = 8,20 \text{ tm}$$

onde a 2.^a parcela corresponde à propagação do momento M_{BA} , igual a $\alpha_{BA} M_{BA} = +0,5 \cdot M_{BA}$.

$$M_{ED} = - \frac{1,0 \cdot 2,0^2}{2} = - 2,00 \text{ tm}$$

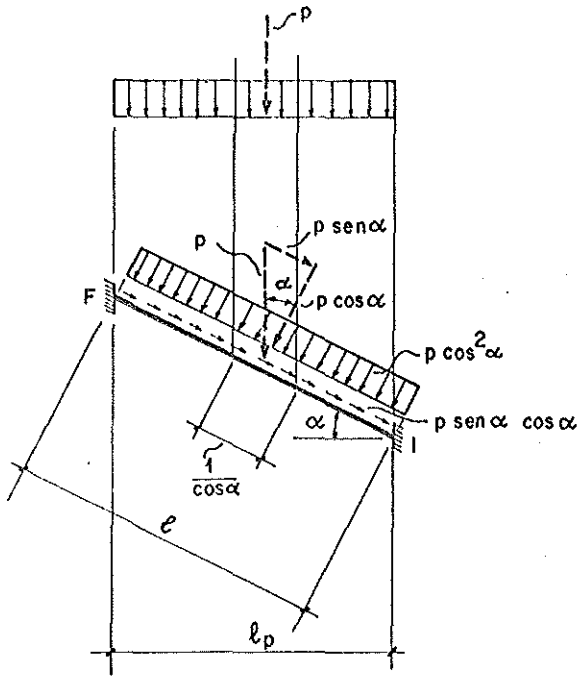
O momento $M_{ED} = -2,00 \text{ tm}$, não entra no cálculo dos momentos de engastamento perfeito das barras EA, EF e EG, já que nessa situação inicial o nó E está bloqueado. Ao se liberar pela primeira vez o nó E não se deve entretanto esquecer esse momento no cálculo do momento não equilibrado em E.

Utilizando a tabela A3 do anexo:

$$M_{EF} = -M_{FE} = \frac{1,0 \cdot 10,0^2}{12} = +8,34 \text{ tm}$$

$$M_{FI} = -M_{IF} = \frac{1,0 \cdot 3,0^2}{12} = +0,75 \text{ tm}$$

Convém observar que no cálculo dos momentos de engastamento perfeito M_{FI} e M_{IF} da barra FI, com carga inclinada em relação ao eixo da barra, são usadas as mesmas fórmulas que constam da tabela A3 onde a carga considerada é a componente da carga dada na direção normal ao eixo da barra. É interessante notar, conforme mostra a figura, que o mesmo resultado é obtido se considerarmos a carga dada atuando sobre uma viga cujo comprimento é o comprimento da projeção da viga na direção da carga.



$$M_{FI} = -M_{IF} = \frac{(p \cos^2 \alpha) \cdot l^2}{12}$$

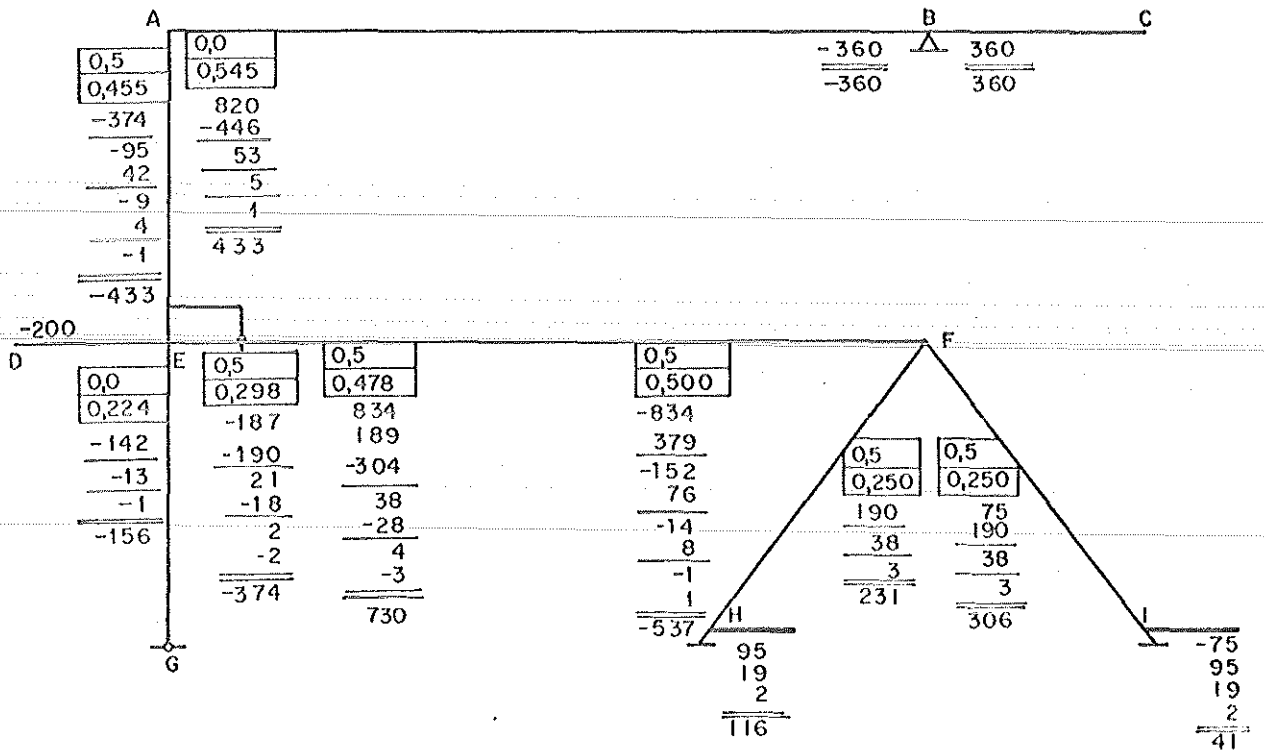
ou então:

$$M_{FI} = -M_{IF} = \frac{p \cdot l_p^2}{12} = \frac{p \cdot (l \cos \alpha)^2}{12}$$

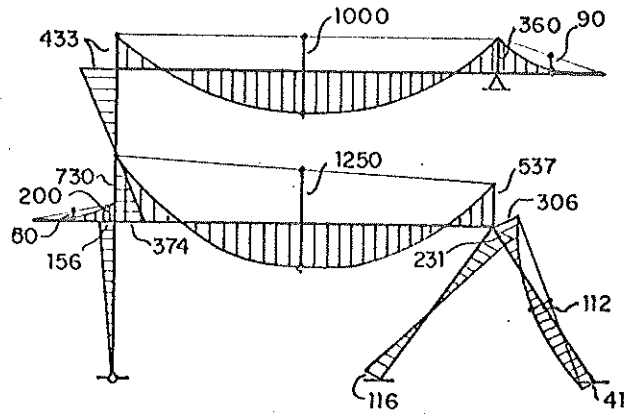
6 - Compensação de momentos

Utilizou-se no caso como unidade tcm

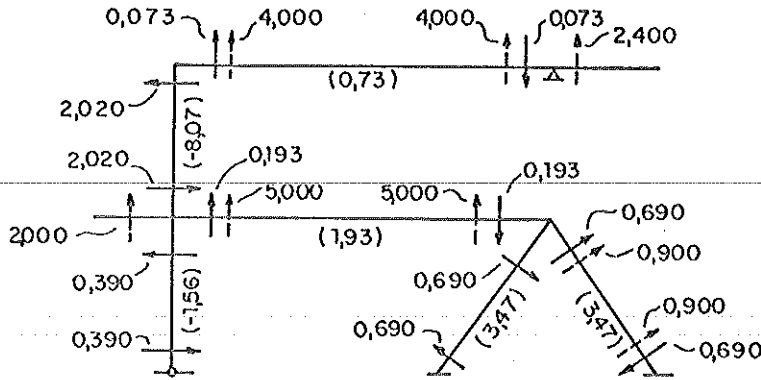
α
μ



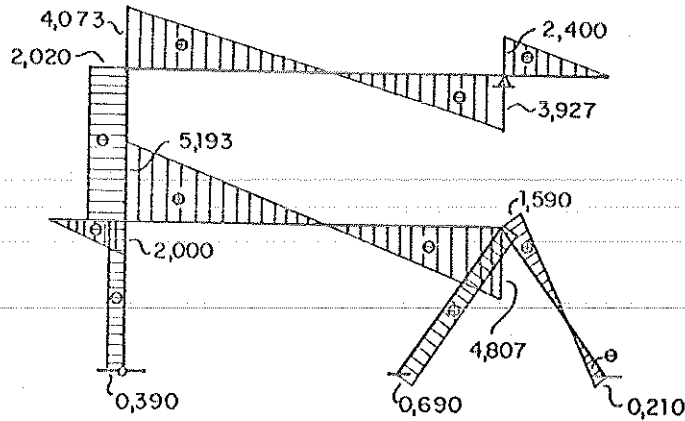
7 - Diagrama de momentos fletores (tcm)



8 - Ação dos nós sôbre as barras (t)

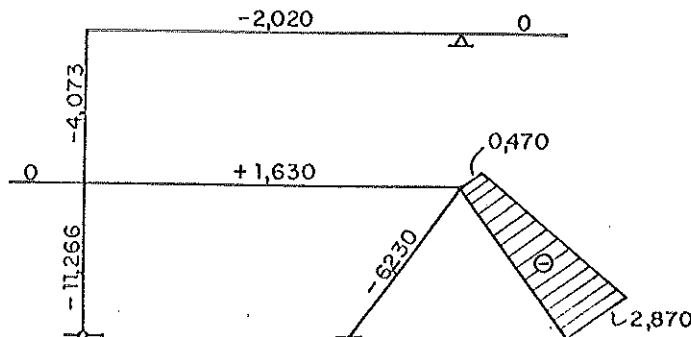


9 - Diagrama de esforços cortantes (t)



10 - Diagrama de esforços normais de tração (t)

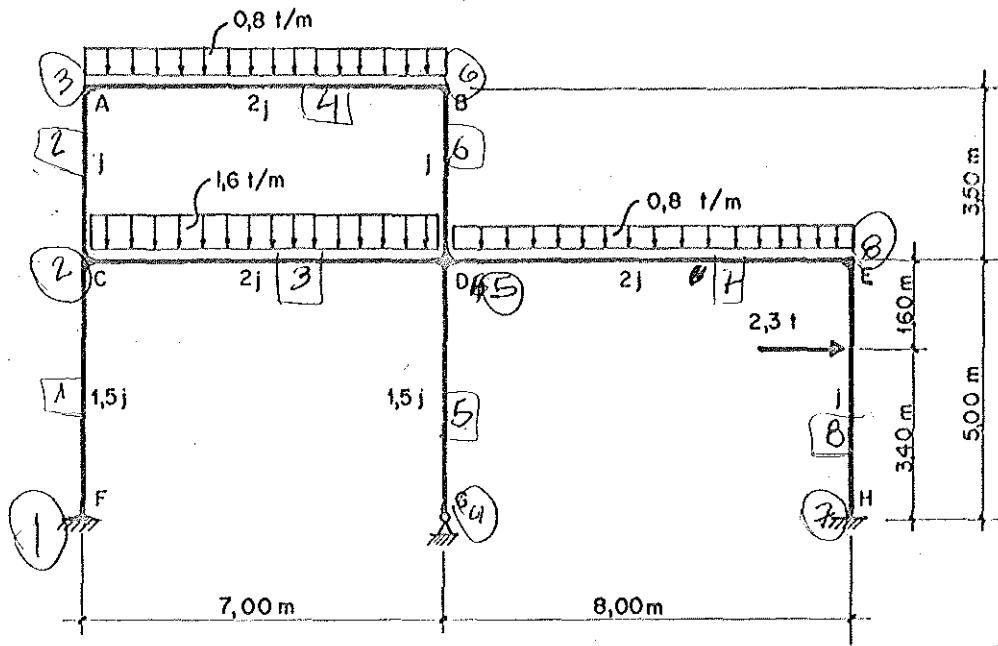
Esse diagrama é obtido isolando os nós, um por vez, e impondo as condições de equilíbrio.



EXERCÍCIO 19 - Método de Cross

1 - Enunciado e dados

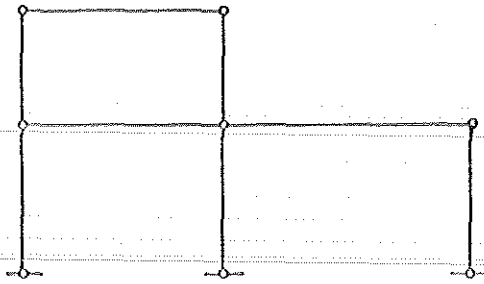
Determinar os diagramas de M, N, Q para o pórtico da figura



$E = \text{constante}$

2 - Verificação do grau de deslocabilidade

Esse problema é equivalente ao de verificar a determinação geométrica da posição dos nós da treliça originada do pórtico pela articulação de todos os nós.



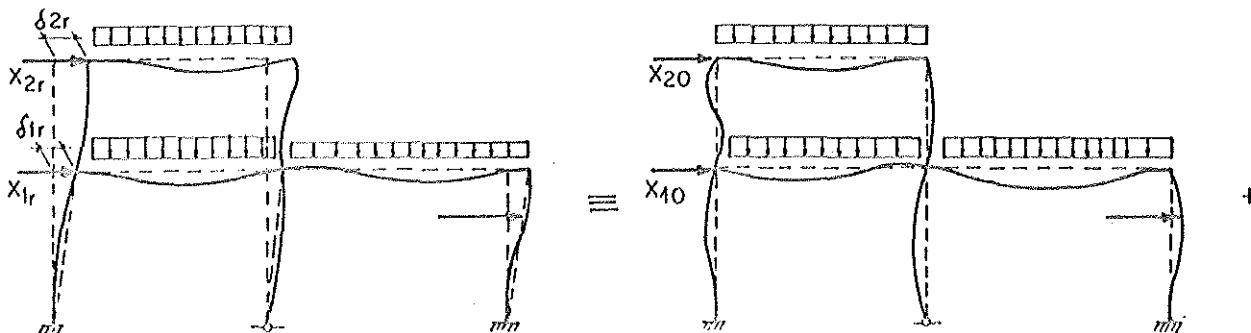
nº de barras: $b = 8$

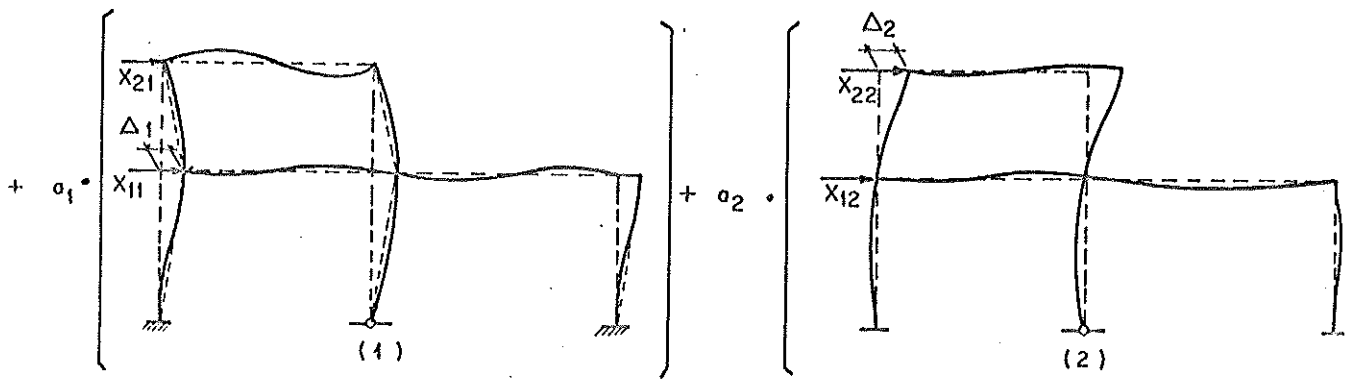
nº de nós: $n = 5$

$b < 2n = 10$; $b = 2n - r$; $r = 2$

portanto, a estrutura é duas vezes deslocável.

3 - Esquema de solução





onde:

$$a_1 \Delta_1 = \delta_{1r}$$

$$a_2 \Delta_2 = \delta_{2r}$$

Δ_1, Δ_2 arbitrários

$$(r) = (o) + a_1 \cdot (1) + a_2 \cdot (2)$$

4 - Equações de compatibilidade de esforços

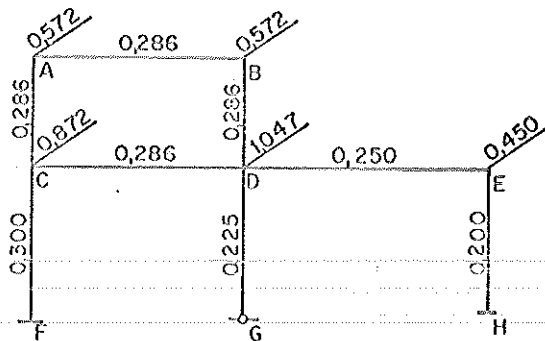
$$X_{1r} = X_{10} + a_1 \cdot X_{11} + a_2 \cdot X_{12} = 0$$

$$X_{2r} = X_{20} + a_1 \cdot X_{21} + a_2 \cdot X_{22} = 0$$

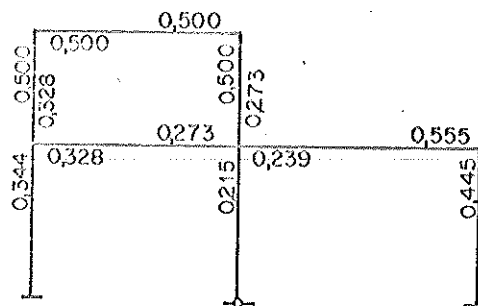
5 - Coeficientes de rigidez β

$$\beta = \frac{J}{J_c \ell} \text{ ou } 0,75 \frac{J}{J_c \ell}$$

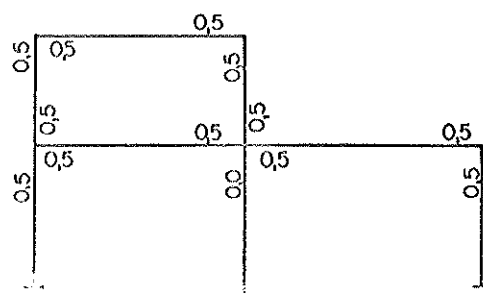
$$J_c = j$$



6 - Coeficientes de distribuição μ

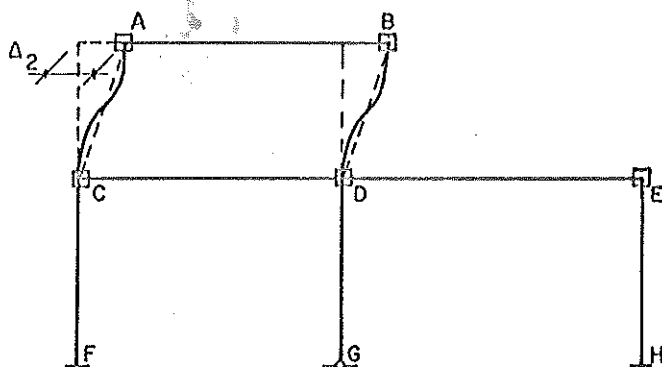


7 - Coeficientes de propagação α



10 - Problema(2)

10-1 - Momentos de engastamento perfeito



Utilizando a tabela A3 temos:

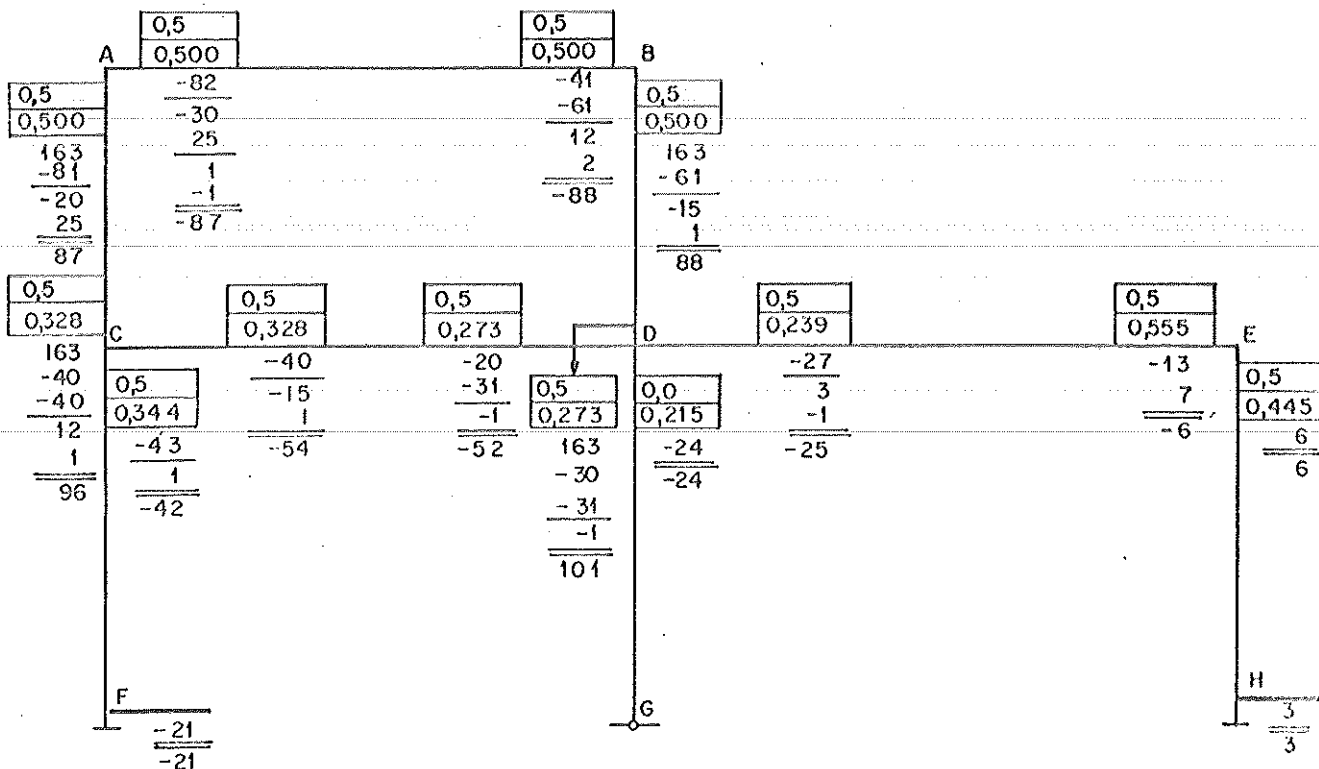
$$M_{CA} = M_{AC} = M_{DB} = M_{BD} = \frac{6 \cdot E \cdot j \cdot \Delta_2}{3,5^2} = (6 \cdot E \cdot j \cdot \Delta_2) \cdot 0,0815 = 163$$

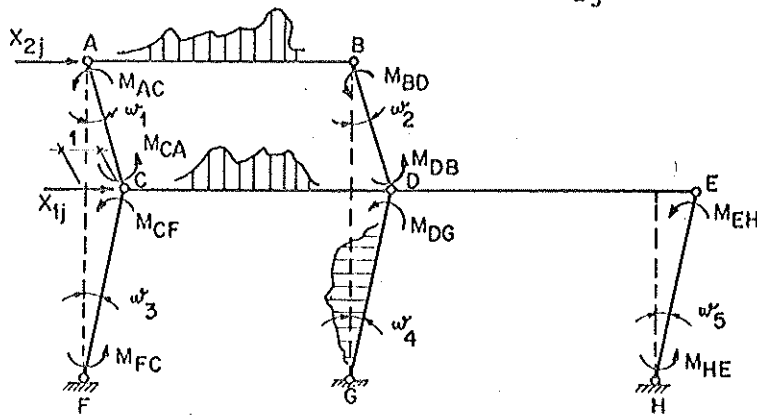
Como Δ_2 é arbitrário, foi assumido $(6 \cdot E \cdot j \cdot \Delta_2) = 2000$

10-2 - Compensação de momentos

Ordem de liberação dos nós: A, B, C, D, E; A, B, C, D, E;....etc.

α
μ



11 - Cálculo dos X_{1j} 11-1 - Expressão geral para os X_{1j} neste problema

$$w_1 = w_2 = \frac{1}{350} \text{ cm}^{-1}$$

$$w_3 = w_4 = w_5 = \frac{1}{500} \text{ cm}^{-1}$$

Pelo PTV:

$$T_{\text{ext}} = T_{\text{int}} = 0$$

$$X_{1j} \cdot 1 + T_{\text{cargas}} + w_1 \cdot (M_{AC} + M_{CA}) + w_2 \cdot (M_{BD} + M_{DB}) - w_3 \cdot (M_{CF} + M_{FC}) - w_4 \cdot (M_{DG}) - w_5 \cdot (M_{EH} + M_{HE}) = 0$$

$$X_{1j} = \frac{1}{500} (M_{CF} + M_{FC} + M_{DG} + M_{EH} + M_{HE}) - \frac{1}{350} (M_{AC} + M_{CA} + M_{BD} + M_{DB}) - T_{\text{cargas}}$$

$$X_{1j} = \frac{1}{500} (\sum M \text{ colunas inferiores}) - \frac{1}{350} (\sum M \text{ colunas superiores}) - T_{\text{cargas}}$$

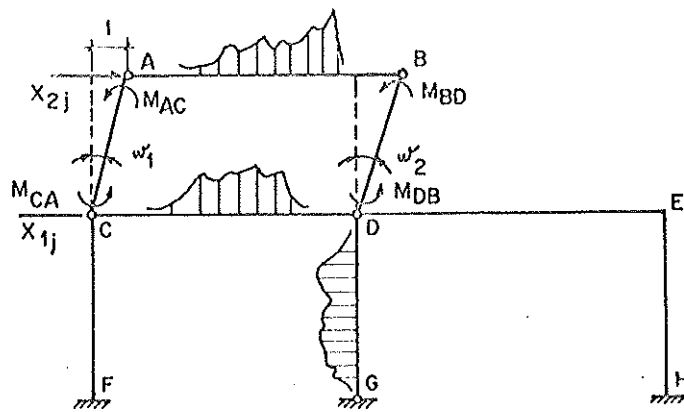
11-2 - Cálculo de X_{10} , X_{11} , X_{12}

$$X_{10} = \frac{1}{500} (-102 - 201 + 12 + 211 + 93) - \frac{1}{350} (-272 - 261 + 117 + 209) - 2,3 \cdot 0,68 = -0,947$$

$$X_{11} = \frac{1}{500} (119 + 119 + 81 + 60 + 39) - \frac{1}{350} (-131 - 96 - 107 + 91) = 2,050$$

$$X_{12} = \frac{1}{500} (-21 - 42 - 24 + 3 + 6) - \frac{1}{350} (96 + 87 + 101 + 88) = -1,221$$

12 - Cálculo dos X_{2j} 12-1 - Expressão geral para os X_{2j} neste problema.



$$w_1 = w_2 = \frac{1}{350} \text{ cm}^{-1}$$

Pelo PTV:

$$T_{\text{ext}} = T_{\text{int}} = 0$$

$$X_{2j} \cdot 1 + T_{\text{cargas}} - w_1 \cdot (M_{AC} + M_{CA}) - w_2 (M_{BD} + M_{DB}) = 0$$

$$X_{2j} = \frac{1}{350} (M_{AC} + M_{CA} + M_{BD} + M_{DB}) - T_{\text{cargas}}$$

$$X_{2j} = \frac{1}{350} (\sum M \text{ colunas superiores}) - T_{\text{cargas}}$$

12-2 - Cálculo de X_{20} , X_{21} , X_{22}

$$X_{20} = \frac{1}{350} (-272 - 261 + 209 + 117) = -0,590$$

$$X_{21} = \frac{1}{350} (-131 - 96 - 91 - 107) = -1,215$$

$$X_{22} = \frac{1}{350} (96 + 87 + 88 + 101) = 1,062$$

13 - Solução do sistema de equações de compatibilidade de esforços

Substituindo os valores dos X_{ij} obtidos nos itens 11 e 12, nas e-

quações do item 4, tem-se o sistema:

$$\begin{cases} 2,050 \cdot a_1 - 1,221 \cdot a_2 = 0,947 \\ -1,215 \cdot a_1 + 1,062 \cdot a_2 = 0,590 \end{cases}$$

cuja solução é:

$$a_1 = 2,502$$

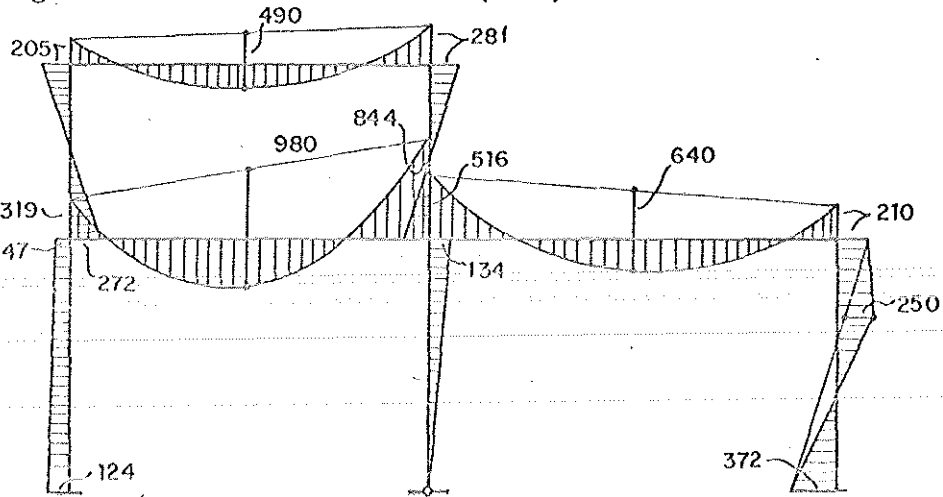
$$a_2 = 3,410$$

14 - Superposição de efeitos - Momentos fletores - Convenção de Grinter

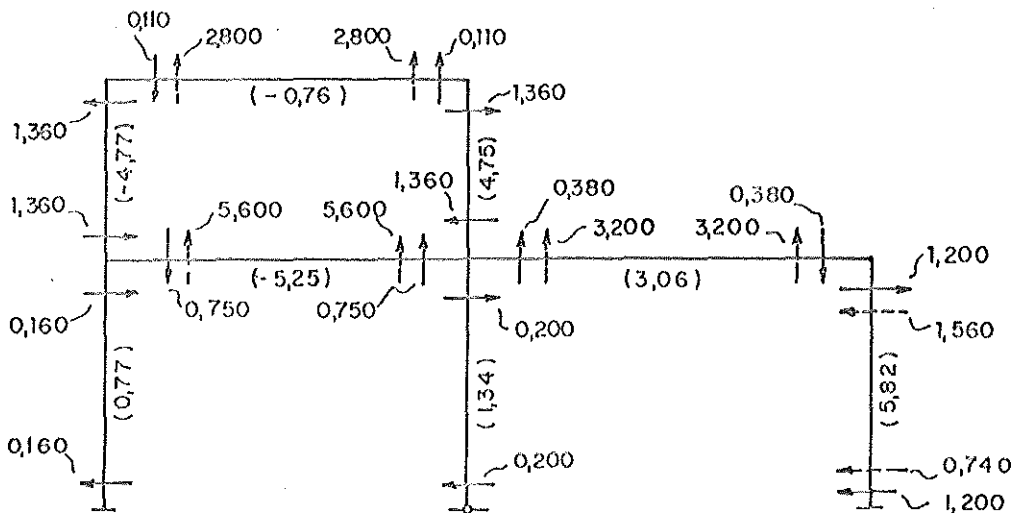
$$M_r = M_o + 2,502 \cdot M_1 + 3,410 \cdot M_2$$

	A				B				
-261	261				-209				209
-241	241				228				-228
297	-297				-300				300
-205	205				-281				281
	C				D				E
-272		473		-733		604		-93	
-328		30		67	117	12		-97	93
328	-201	-184		-178	-268	204	-3	-20	97
-272	-144	319		-844	345	-82	-85	20	20
	-47			194		134	516	-210	210
	F				G				H
	-102								211
	298								151
	-72								10
	124								372

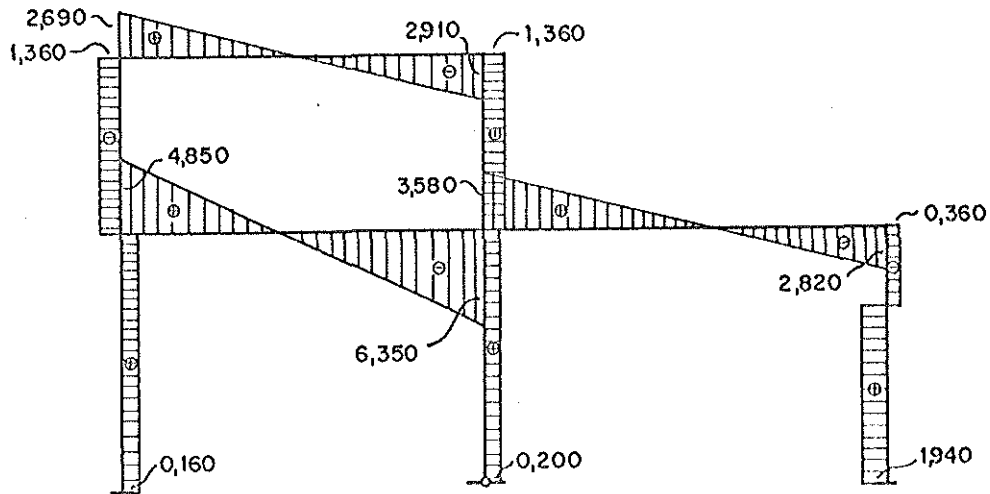
15 - Diagrama de momento fletor (tcm)



16 - Ação dos nós sôbre as barras (t)

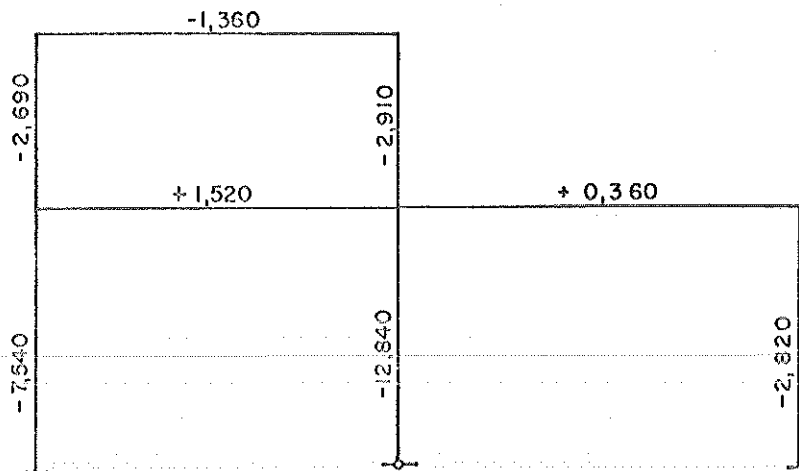


17 - Diagrama de esforços cortantes(t)



18 - Diagrama de esforços axiais de tração(t)

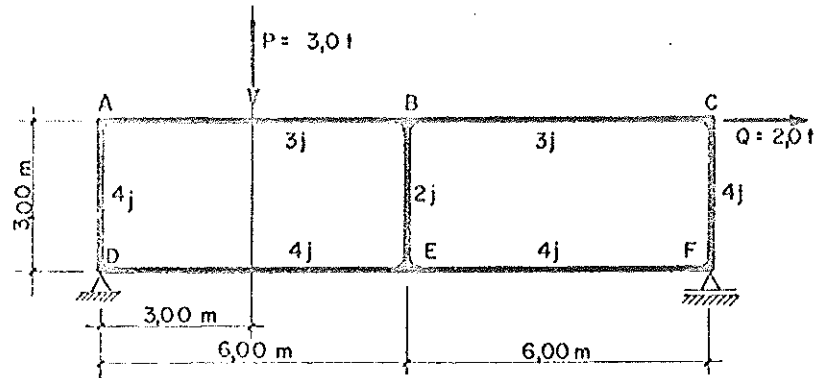
Esses esforços são obtidos isolando os nós e impondo as condições de equilíbrio.



EXERCÍCIO 20 - Método de Cross

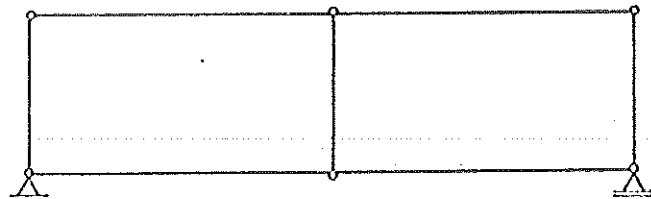
1 - Enunciado e dados

Determinar os diagramas de M, N e Q para a viga Vierendell da figura.



2 - Verificação do grau de deslocabilidade

Esse problema é equivalente ao de verificar a determinação geométrica da posição dos nós da treliça originada do pórtico pela articulação de todos os nós



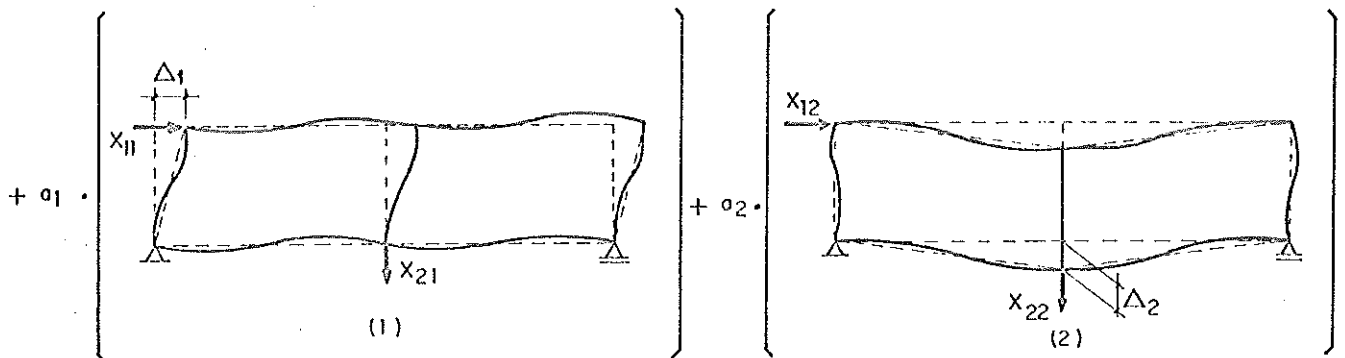
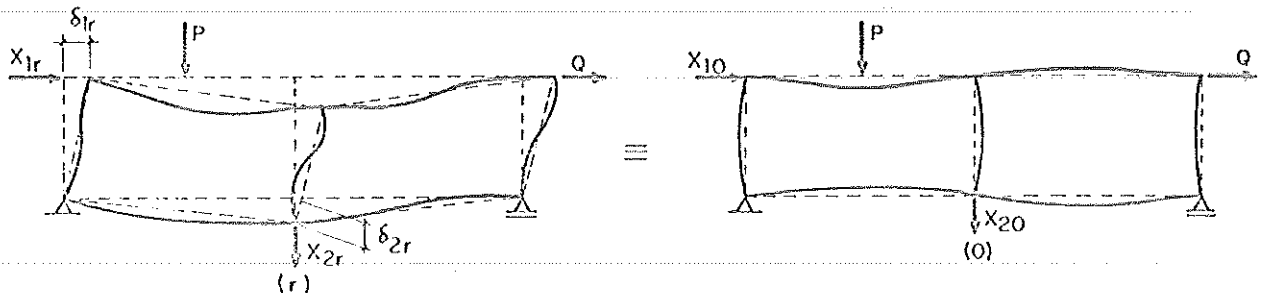
nº de barras: $b = 10$

nº de nós: $n = 6$

$b < 2n = 12$; $b = 2n - r$; $r = 2$

portanto a estrutura é duas vezes deslocável.

3 - Esquema de solução



onde:

$$a_1 = \delta_{1r} / \Lambda_1$$

$$a_2 = \delta_{2r} / \Lambda_2$$

4 - Equações de compatibilidade de esforços

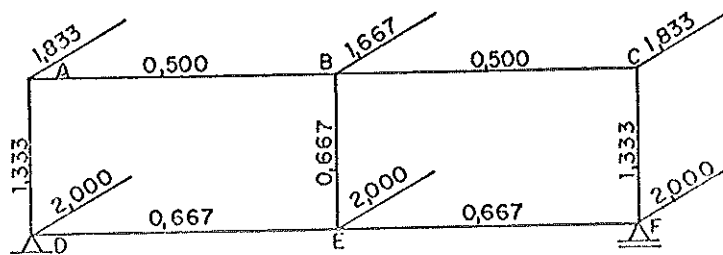
$$X_{1r} = X_{10} + a_1 \cdot X_{11} + a_2 \cdot X_{12} = 0$$

$$X_{2r} = X_{20} + a_1 \cdot X_{21} + a_2 \cdot X_{22} = 0$$

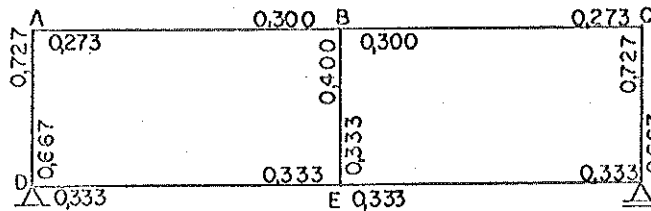
5 - Coeficientes de rigidez, β

$$\beta = \frac{J}{J_c \ell} \quad \text{ou} \quad 0,75 \frac{J}{J_c \ell}$$

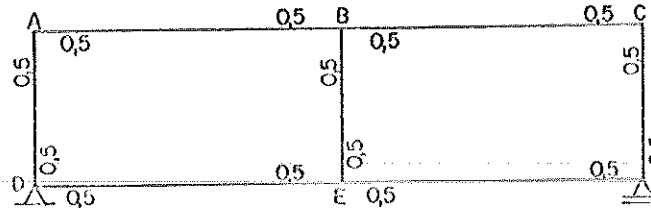
$$J_c = j$$



6 - Coeficientes de distribuição, μ

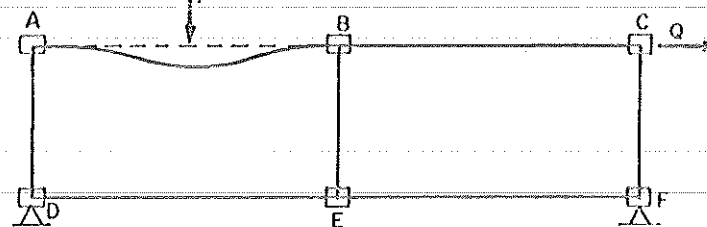


7 - Coeficientes de propagação, α



8 - Problema(o)

8-1 - Momentos de engastamento perfeito



Utilizando a tabela A3 do anexo, temos

$$M_{AB} = \frac{3,0 \cdot 3,0 \cdot 3,0^2}{6,0^2} = 2,25 \text{ tm}$$

$$M_{BA} = - \frac{3,0 \cdot 3,0^2 \cdot 3,0}{6,0^2} = -2,25 \text{ tm}$$

8-2 - Compensação de momentos (t cm)

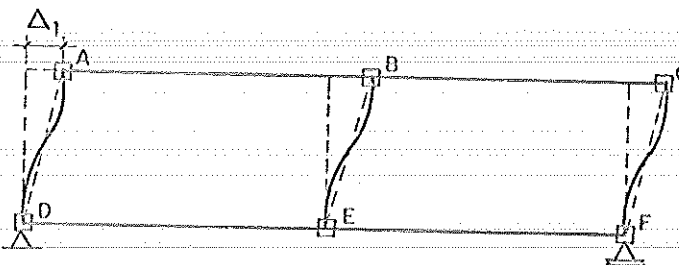
Ordem de liberação dos nós:

A, B, D, A, E, C, D, B, F, A, E, C, D, B, F, A, C

	A		B		C
	0,5		0,5		0,5
	0,273		0,300		0,273
	0,727		0,400		0,727
	-164		-225		38
	27		-30		-10
	-47		76		4
	11		-9		-3
	-11		8		1
	2		-2		-1
	-2		2		29
	-184		102		-29
	0,5		0,5		0,5
	0,667		0,333		0,667
	-82		13		-14
	55		-21		17
	-23		6		-4
	23		-5		4
	-5		1		-1
	5		-1		1
	-1		-1		-3
	1		-7		3
	-27		29		

9 - Problema (1)

9-1 - Momentos de engastamento perfeito



$$M_{AD} = M_{DA} = M_{CF} = M_{FC} = \frac{6 \cdot E \cdot 4j \cdot \Delta_1}{\ell^2} = 2k = 100$$

$$M_{BE} = M_{EB} = \frac{6 \cdot E \cdot 2j \cdot \Delta_1}{\ell^2} = k = 50$$

onde k é arbitrário já que Δ_1 é qualquer.

9-2 - Compensação de momentos

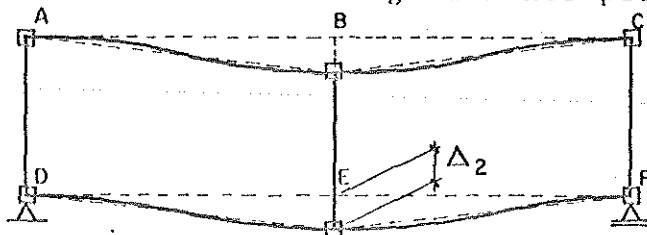
Ordem de liberação dos nós:

A, C, D, F, B, E; A, C, D, F, B, E; . . . etc.

A		B				C	
0,5	0,273	0,5	0,300	0,5	0,300	0,5	0,273
0,727	-27	-13	0,400	-13	-27	0,727	0,5
100	-4	-7	50	-7	-4	100	-73
-73	7	4	-10	4	7	-22	-22
-22	-1	-2	-4	-2	-1	19	19
19	1	-18	36	-18	1	-2	-2
-2	-24				-24	2	2
2						24	24
D		E				F	
0,5	0,667	0,5	0,333	0,5	0,333	0,5	0,667
100	0,5	0,5	0,333	0,5	0,333	100	0,5
-36	0,333	-11	0,333	-11	0,333	-36	0,5
-42	-22	-8	50	-8	-22	-42	-36
9	-4	-1	-5	-1	-4	9	-73
-3	-2	1	-7	-1	-2	-3	-22
1	-28	-19	38	-19	1	1	19
-1					-28	-1	-2
28						28	24

10 - Problema(2)

10-1 - Momentos de engastamento perfeito



$$M_{AB} = M_{BA} = -M_{BC} = -M_{CB} = \frac{6 \cdot E \cdot 3j \cdot \Delta}{\ell^2} = 3k' = 75$$

$$M_{DE} = M_{ED} = -M_{EF} = -M_{FE} = \frac{6 \cdot E \cdot 4j \cdot \Delta}{\ell^2} = 4k' = 100$$

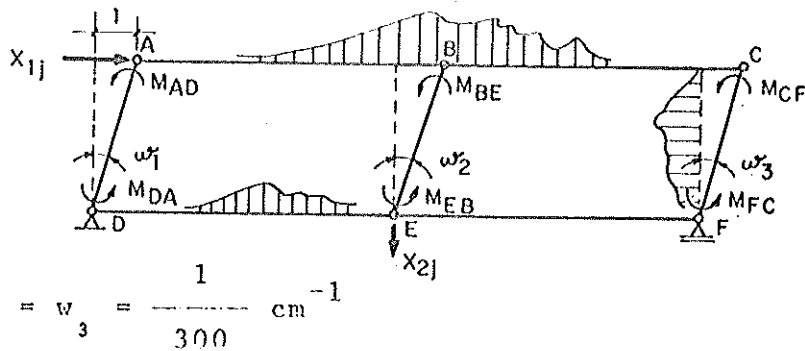
onde k' é arbitrado, já que Δ_2 pode ser qualquer.

10-2 - Compensação de momentos

Ordem de liberação dos nós: A, C, D, F, B, E; A, C, D, F, B, E; . . . etc.

A		B				C	
0,5	0,273	0,5	0,300	0,5	0,300	0,5	0,273
0,727	75	75	0,400	-75	-75	0,727	0,5
-55	-20	-10	0	10	20	-55	55
-24	7	3		-3	-7	-24	24
17	1	68		-68	-1	-17	-17
-3	63				-63	3	3
2						-2	-2
-63						63	63
D		E				F	
0,5	0,667	0,5	0,333	0,5	0,333	0,5	0,667
-27	0,5	0,5	0,333	0,5	0,333	27	0,5
-49	0,333	100	0,333	100	0,333	-49	0,667
9	100	-12	0	-12	100	9	27
-6	-24	-1		1	-24	-6	49
1	-3	87		-87	3	-1	-9
-1	73				-73	1	6
-73						-73	-1



11 - Cálculo dos X_{1j} 11-1 - Expressão geral para X_{1j} neste problema

$$w_1 = w_2 = w_3 = \frac{1}{300} \text{ cm}^{-1}$$

Pelo PTV:

$$T_{\text{ext}} = T_{\text{int}} = 0$$

$$X_{1j} \cdot 1 + T_{\text{cargas}} - w_1 (M_{AD} + M_{DA}) - w_2 (M_{BE} + M_{EB}) - w_3 (M_{CF} + M_{FC}) = 0$$

$$X_{1j} = \frac{1}{300} (M_{AD} + M_{DA} + M_{BE} + M_{EB} + M_{CF} + M_{FC}) - T_{\text{cargas}}$$

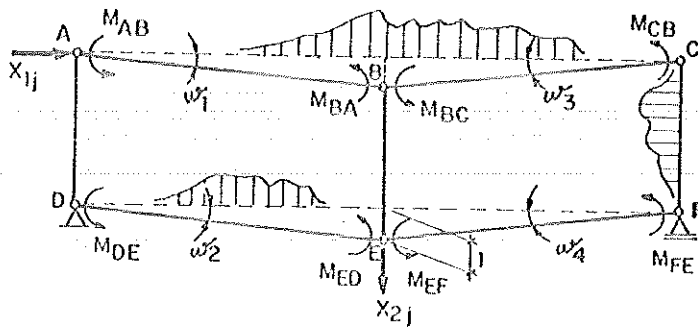
$$X_{1j} = \frac{1}{300} (\sum M_{\text{colunas}}) - T_{\text{cargas}}$$

11-2 - Cálculo de X_{10} , X_{11} , X_{12}

$$X_{10} = \frac{1}{300} \cdot (-184 + 102 - 29 - 27 + 29 + 3) - 2,0 \cdot 1 = -2,353$$

$$X_{11} = \frac{1}{300} \cdot (24 + 36 + 24 + 28 + 38 + 28) = 0,594$$

$$X_{12} = \frac{1}{300} \cdot (-63 + 0 + 63 - 73 + 0 + 73) = 0$$

12 - Cálculo dos X_{2j} 12-1 - Expressão geral para X_{2j} neste problema

$$w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = \frac{1}{600} \text{ cm}^{-1}$$

$$X_{2j} \cdot 1 + T_{\text{cargas}} - w_1 (M_{AB} + M_{BA}) - w_2 (M_{DE} + M_{ED}) + w_3 (M_{BC} + M_{CB}) + w_4 (M_{EF} + M_{FE}) = 0$$

$$X_{2j} = \frac{1}{600} (M_{AB} + M_{BA} + M_{DE} + M_{ED}) - \frac{1}{600} (M_{BC} + M_{CB} + M_{EF} + M_{FE}) - T_{\text{cargas}}$$

$$X_{2j} = \frac{1}{600} (\sum M_{\text{vigas da esquerda}}) - \frac{1}{600} (\sum M_{\text{vigas da direita}}) - T_{\text{cargas}}$$

12-2 - Cálculo dos X_{20} , X_{21} , X_{22}

$$X_{20} = \frac{1}{600}(184 - 180 + 27 - 7) - \frac{1}{600} \cdot (78 + 29 - 22 - 3) + 3,0 \cdot \frac{1}{2} = -1,597$$

$$X_{21} = \frac{1}{600}(-24 - 18 - 28 - 19) - \frac{1}{600}(-18 - 24 - 19 - 28) = 0$$

$$X_{22} = \frac{1}{600}(63 + 68 + 73 + 87) - \frac{1}{600}(-68 - 63 - 87 - 73) = 0,970$$

13 - Solução do sistema de equações de compatibilidade de esforços.

Substituindo os valores dos X_{ij} obtidos nos itens 11 e 12, nas equações do item 4, tem-se o sistema:

$$a_1 \cdot 0,594 + a_2 \cdot 0 = 2,353$$

$$a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0,970 = 1,597$$

cuja solução é:

$$a_1 = 3,960$$

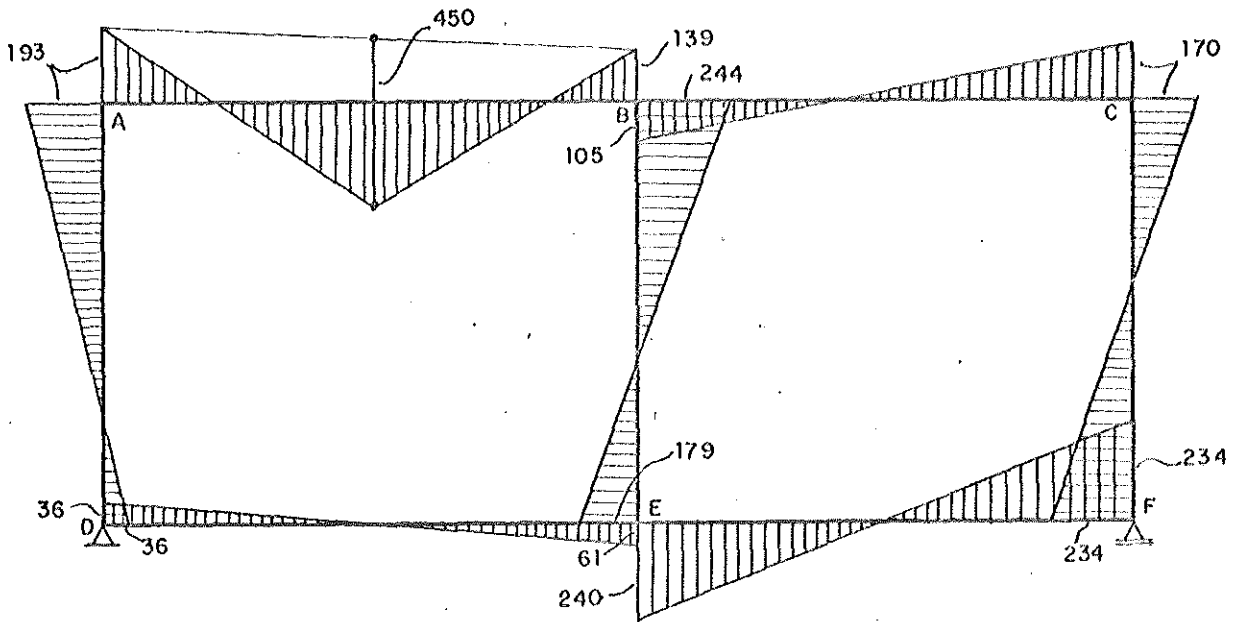
$$a_2 = 1,646$$

14 - Superposição de efeitos - Momentos fletores - Convenção de Grinter

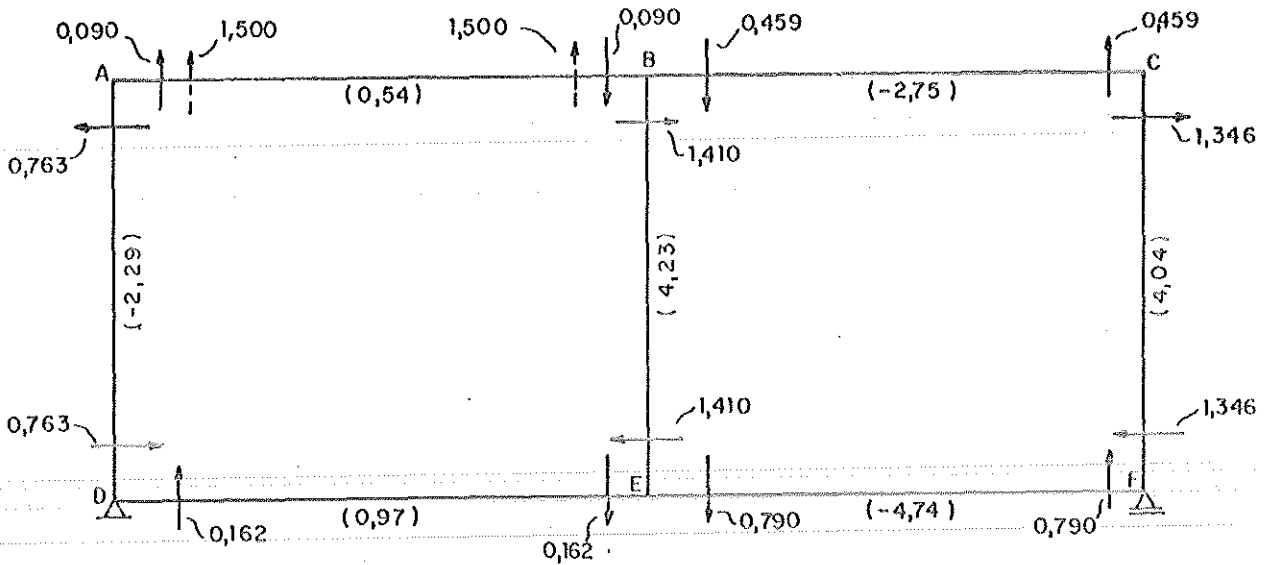
$$M_r = M_o + 3,960 \cdot M_1 + 1,646 \cdot M_2$$

A		B		C	
-184	184	-180	78	29	-29
95	-95	-71	-71	-95	95
-104	104	112	-112	-104	104
-193	193	-139	-105	-170	170
		244			
D		E		F	
-27	27	-7	-22	-3	3
111	-111	29	-75	-111	111
-120	120	143	-143	-120	120
-36	36	61	-240	-234	234
		179			

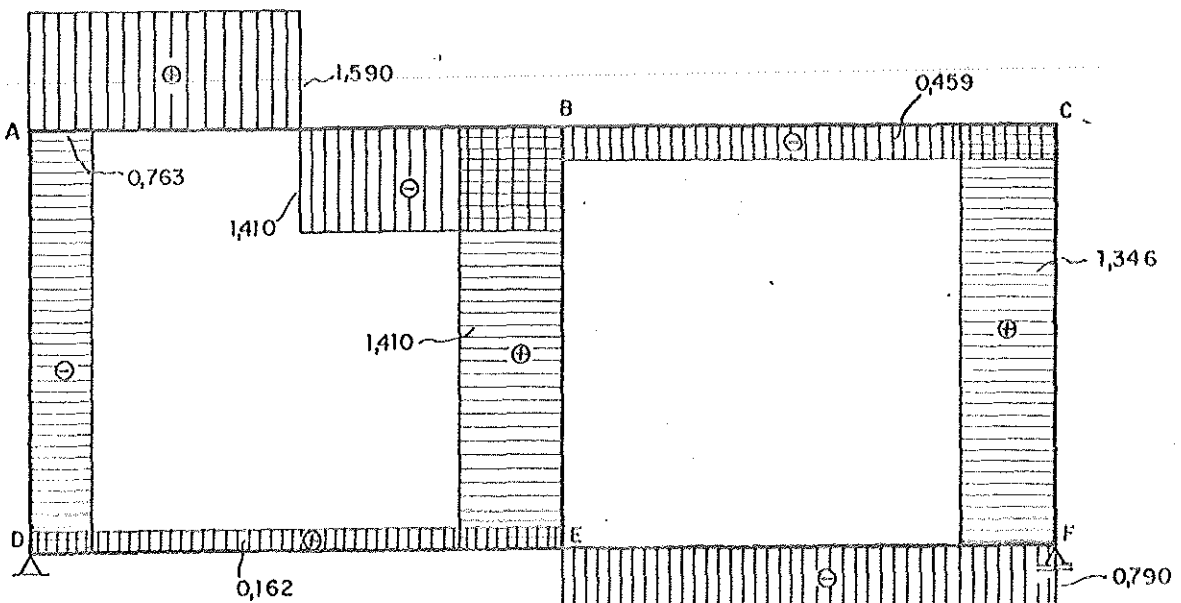
15 - Diagrama de momentos fletores (tcm)



16 - Ação dos nós sôbre as barras (t)

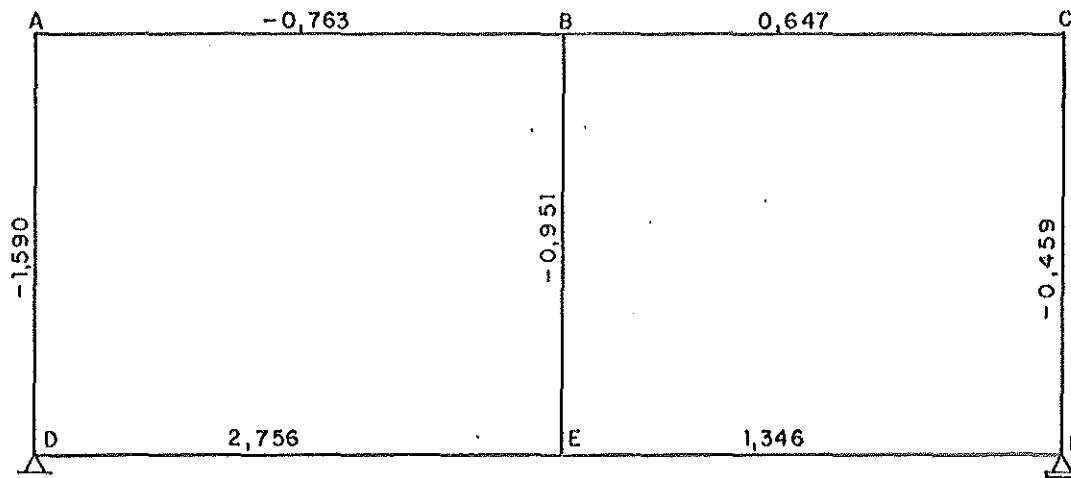


17 - Diagrama de esforços cortantes (t)



18 - Diagrama de esforços normais de tração (t)

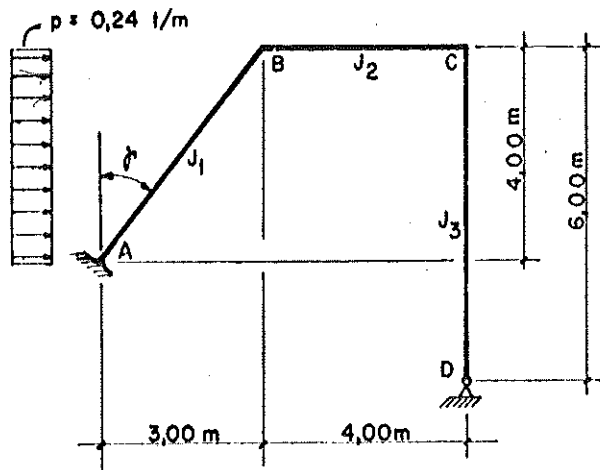
Êsses esforços são obtidos isolando os nós e impondo as condições de equilíbrio.



EXERCÍCIO 21 - Método de Cross

1 - Enunciado e dados

Determinar os diagramas de M, N e Q para o pórtico da figura:



$$E = 2100 \text{ t/cm}^2$$

$$J_1 = 10000 \text{ cm}^4 = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$J_2 = 15000 \text{ cm}^4 = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

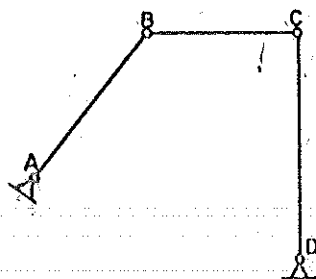
$$J_3 = 20000 \text{ cm}^4 = 2,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$\text{sen } \gamma = 0,6$$

$$\text{cos } \gamma = 0,8$$

2 - Verificação do grau de deslocabilidade

Este problema é equivalente ao de verificar a determinação geométrica da posição dos nós da treliça originada do pórtico pela articulação de todos os nós:



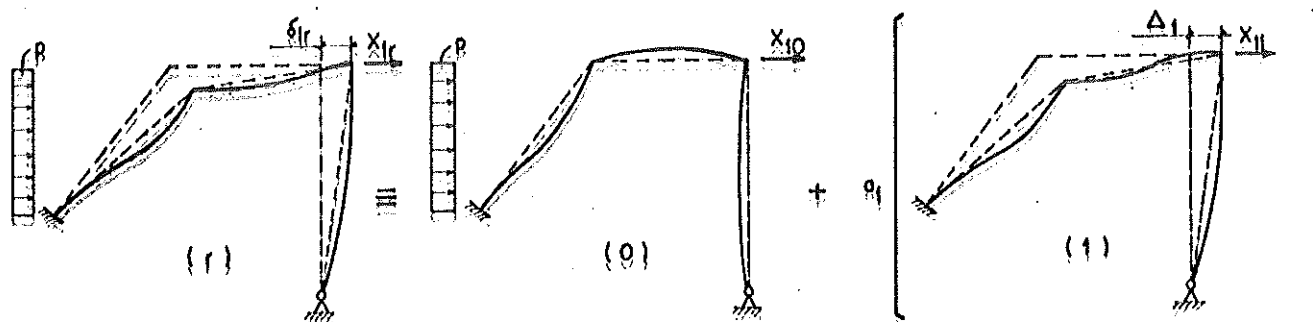
nº de barras: $b = 3$

nº de nós: $n = 2$

$b \leq 2n = 4$; $b = 2n - r$; $r = 1$

portanto a estrutura é uma vez deslocável.

3 - Esquema de solução:



onde:

$a_1: A_1 = \delta 1r$

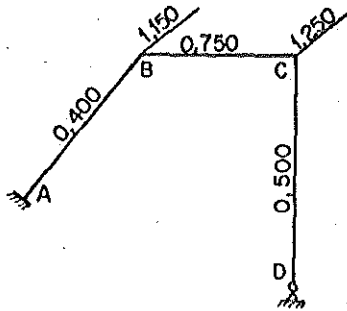
4 - Equação de compatibilidade de esforços

$$X_{1r} = X_{10} + a_1 \cdot X_{11} = 0$$

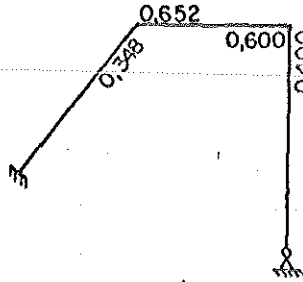
5 - Coeficientes de rigidez, β

$$\beta = \frac{J}{J_{cl}} \quad \text{ou} \quad 0,75 \frac{J}{J_{cl}}$$

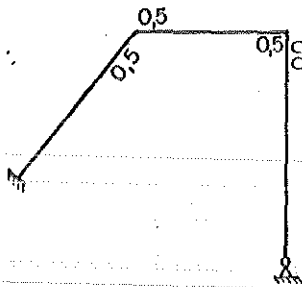
$$J_c = 5000 \text{ cm}^4$$



6 - Coeficientes de distribuição, μ

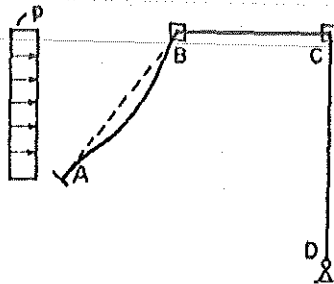


7 - Coeficientes de propagação, α



8 - Problema(o)

8-1 - Momentos de engastamento perfeito



Conforme foi comentado no exercício 18, ítem 5, pode-se utilizar a tabela A3 para obtenção de M_{AB} e M_{BA}

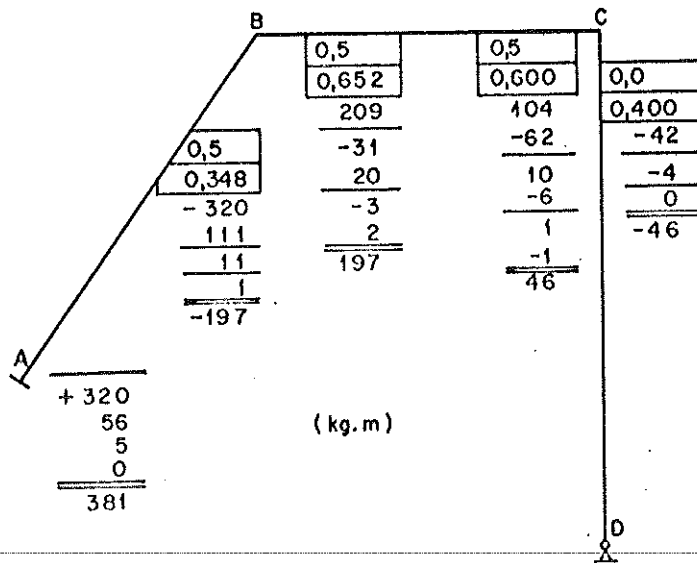
$$M_{AB} = -M_{BA} = \frac{0,24 : 4,0^2}{12} = 0,320 \text{ tm}$$

8-2 - Compensação de momentos

Para se trabalhar com n^{os} inteiros e para se obter boa precisão trabalhou-se com a unidade kg.m

Ordem de liberação:

B,C; B,C; . . . etc.



9 - Problema (1)

9-1 - Momentos de engastamento perfeito

$$w_3 = \frac{\Delta_1}{6,00} = 0,167 \Delta_1$$

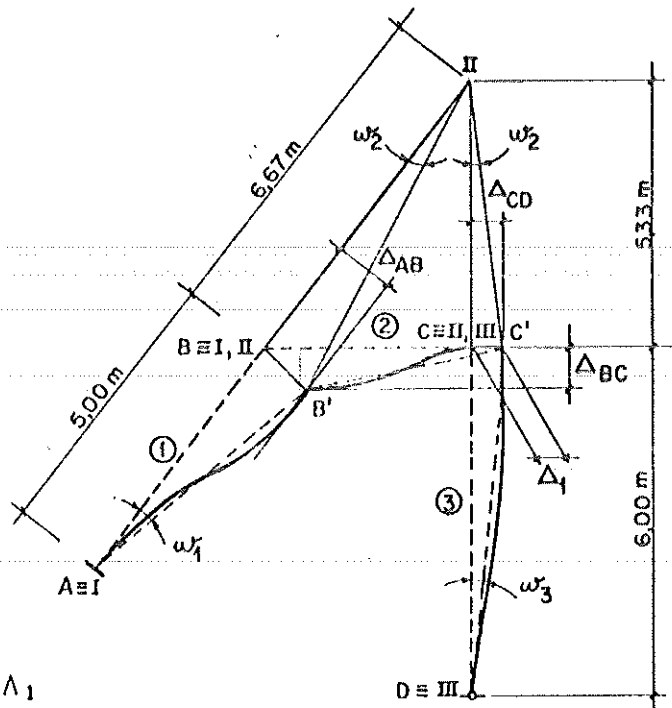
$$w_2 = \frac{\Delta_1}{5,33} = 0,188 \Delta_1$$

$$w_1 = \frac{w_2 \cdot 6,67}{5,00} = 0,250 \Delta_1$$

$$\Delta_{AB} = 5,00 \cdot w_1 = 1,250 \Delta_1$$

$$\Delta_{BC} = 4,00 \cdot w_2 = 0,750 \Delta_1$$

$$\Delta_{CD} = \Delta_1$$



$$M_{AB} = M_{BA} = \frac{6.E.1,0.10^{-4}.1,250.\Delta}{5,0^2} = 0,300.10^{-4}.E.\Delta_1 = 300$$

$$M_{BC} = M_{CB} = -\frac{6.E.1,5.10^{-4}.0,750.\Delta}{4,0^2} = -0,421.10^{-4}.E.\Delta_1 = -421$$

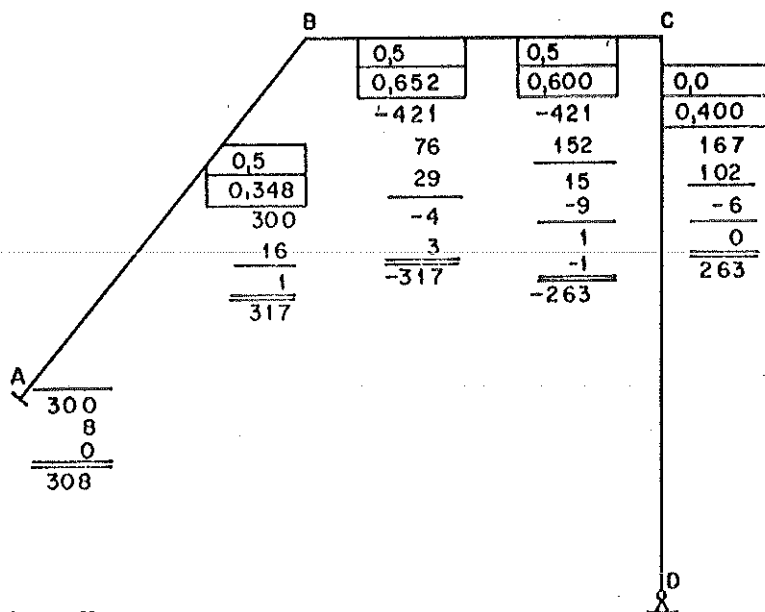
$$M_{CD} = \frac{3.E.2,0.10^{-4}.\Delta}{6,0^2} = 0,167.10^{-4}.E.\Delta_1 = 167$$

Como Δ_1 é qualquer arbitrou-se $(10^{-4}.E.\Delta_1) = 1000$

9-2 - Compensação de momentos

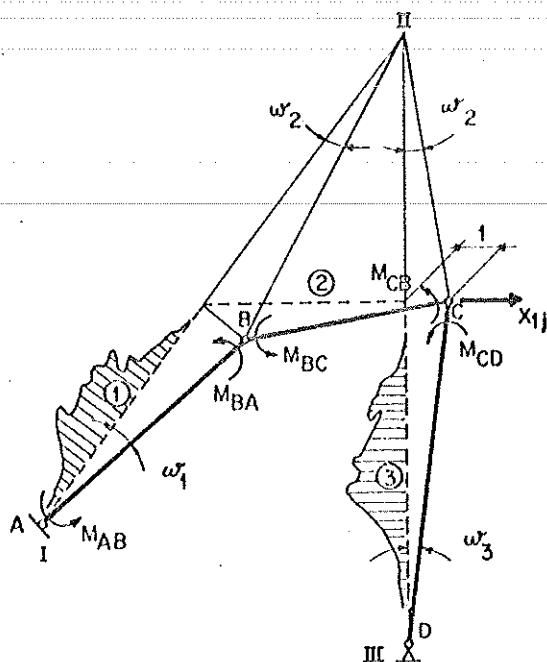
Ordem de liberação:

C,B; C,B; . . . etc.



10 - Cálculo dos X_{1j}

10-1 - Expressão geral para X_{1j} neste problema



Aproveitando resultados do ítem 9-1, com $\Delta_1 = 1$, tem-se:

$$w_1 = 0,250$$

$$w_2 = 0,188$$

$$w_3 = 0,167$$

Pelo PTV:

$$T_{ext} = T_{int} = 0$$

$$X_{1j} \cdot 1 + T_{cargas} - w_1(M_{AB} + M_{BA}) + w_2(M_{BC} + M_{CB}) - w_3(M_{CD}) = 0$$

$$X_{1j} = 0,250(M_{AB} + M_{BA}) + 0,167 \cdot M_{CD} - 0,188(M_{BC} + M_{CB}) - T_{carga}$$

10-2 Cálculo de X_{10} e X_{11}

$$X_{10} = 0,250(381 - 197) + 0,167 \cdot (-46) - 0,188(197 + 46) - 4,0 \cdot \frac{1}{2} \cdot 240 \cdot 1,0 = -487,3$$

$$X_{11} = 0,250(309 + 317) + 0,167(263) - 0,188(-317 - 263) = 308,2$$

11 - Solução da equação de compatibilidade

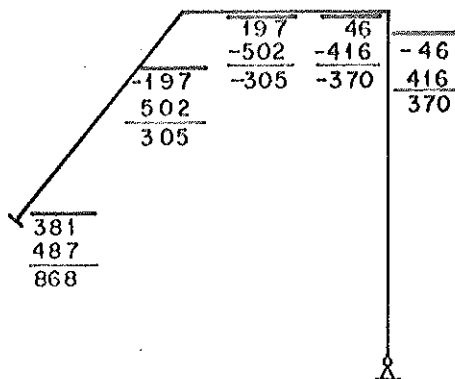
Substituindo na equação do ítem 4 os valores do ítem 10-2, tem-se a equação:

$$-487,3 + 308,2 \cdot a_1 = 0$$

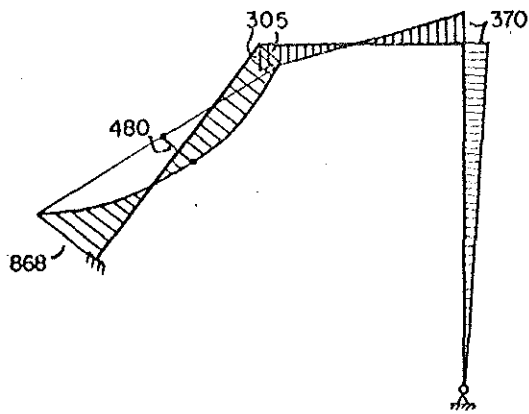
cuja solução é:

$$a_1 = 1,582$$

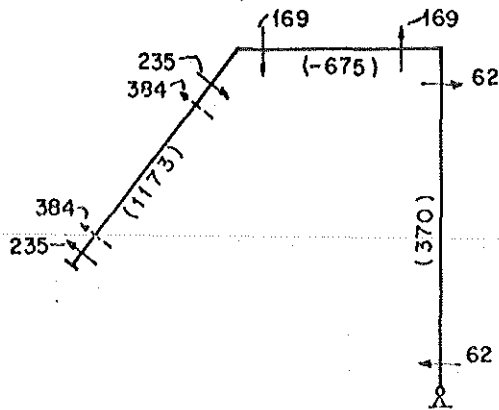
12 - Superposição de efeitos - momentos de extremidade -
Convenção de Grinter (kg m)



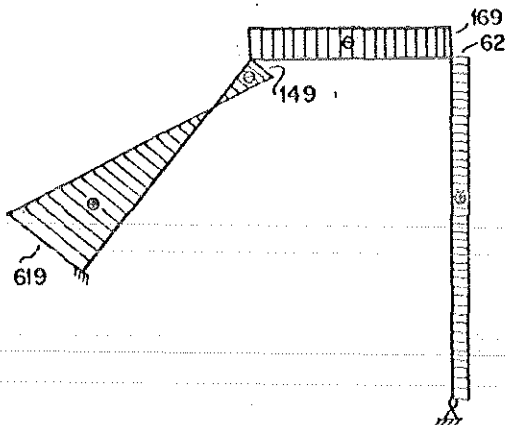
13 - Diagrama de Momentos Fletores (kgm)



14 - Ação dos nós sôbre as barras (kg)

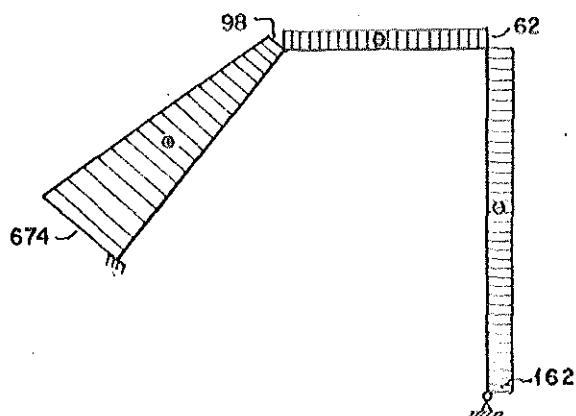


15 - Diagrama de esforços cortantes (kg)



16 - Diagrama de esforços normais de tração (kg)

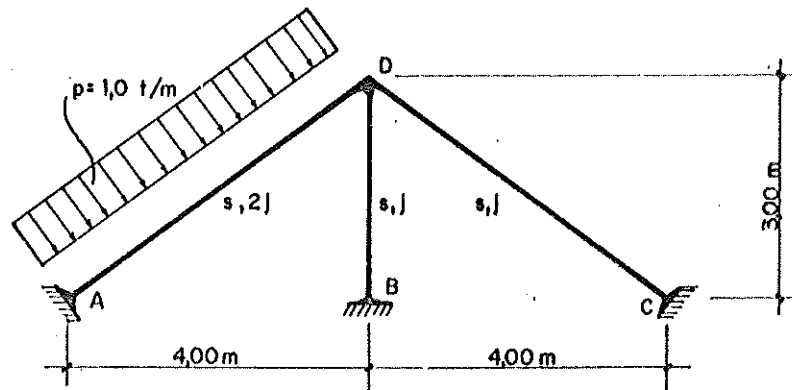
Êsses esforços foram obtidos isolando-se os nós e impondo as condições de equilíbrio



EXERCÍCIO 22 - Método de Cross

1 - Enunciado e dados

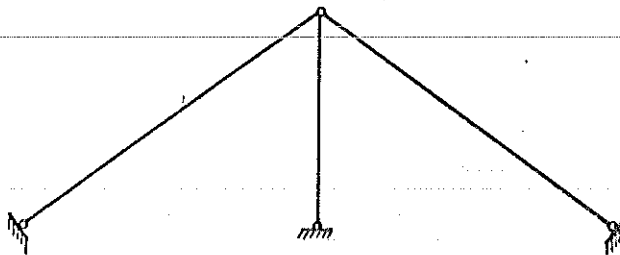
Determinar os diagramas de M, N e Q para o pórtico da figura:



$E = \text{constante}$

2 - Verificação do grau de deslocabilidade da estrutura

Esse problema é equivalente ao de verificar a determinação geométrica da posição dos nós da treliça originada do pórtico pela articulação de todos os nós.



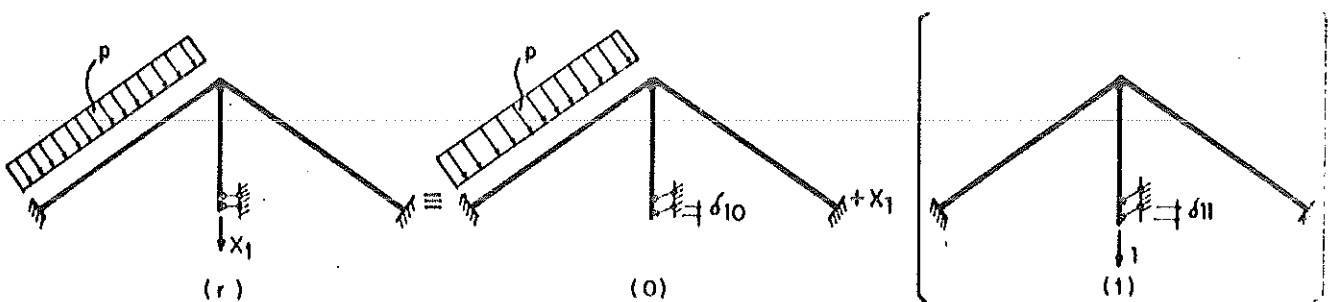
nº de barras: $b = 3$

nº de nós : $n = 1$

$b > 2n$; $b = 2n + r$; $r = 1$

Essa estrutura tem a posição dos nós super determinada, portanto a estrutura original tem grau de deslocabilidade negativo igual a 1.

3 - Esquema de solução



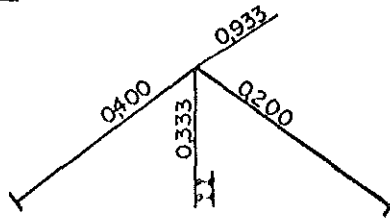
4 - Equação de compatibilidade de deslocamentos

$$\delta_{1r} = \delta_{10} + X1 \cdot \delta_{11} = 0$$

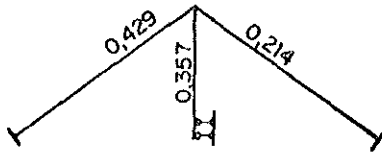
5 - Coeficientes de rigidez, β

$$\beta = \frac{J}{J_c l} \quad \text{ou} \quad 0,75 \frac{J}{J_c l}$$

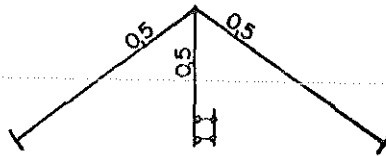
$$J_c = j$$



6 - Coeficientes de distribuição, μ

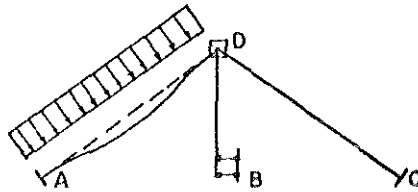


7 - Coeficientes de propagação, α



8 - Problema(o)

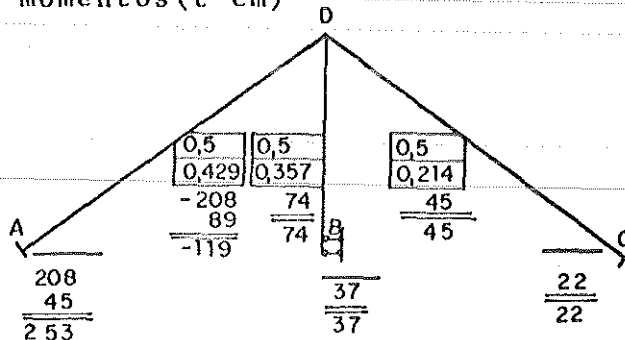
8-1 - Momentos de engastamento perfeito



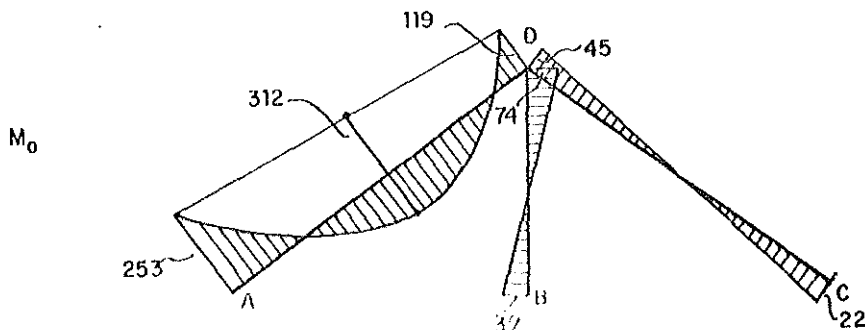
Utilizando a tabela A3 do anexo:

$$M_{AD} = -M_{DA} = \frac{1,0 \cdot 5,0^2}{12} = 2,08 \text{ tm}$$

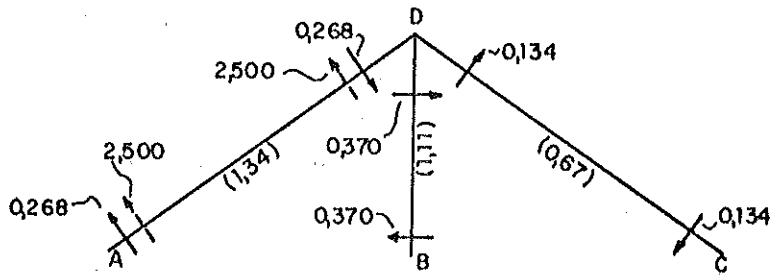
8-2 - Compensação de momentos (t cm)



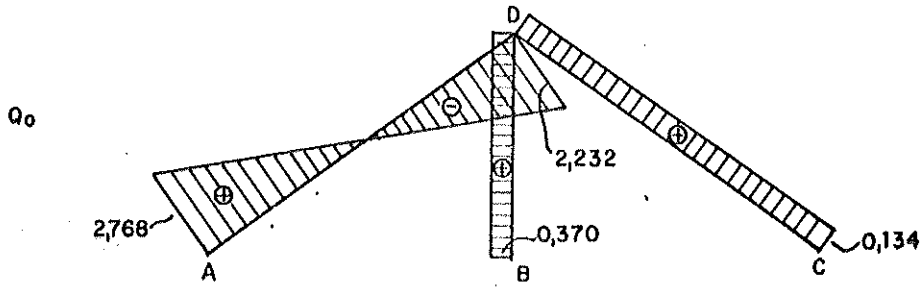
8-3 - Diagrama de momentos fletores (t cm)



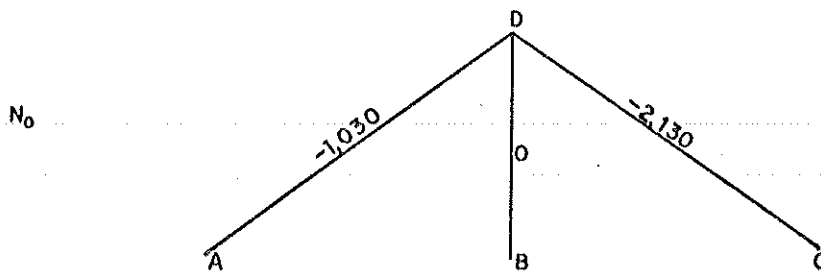
8-4 - Ação dos nós sobre as barras (t)



8-5 - Diagrama de esforços cortantes (t)



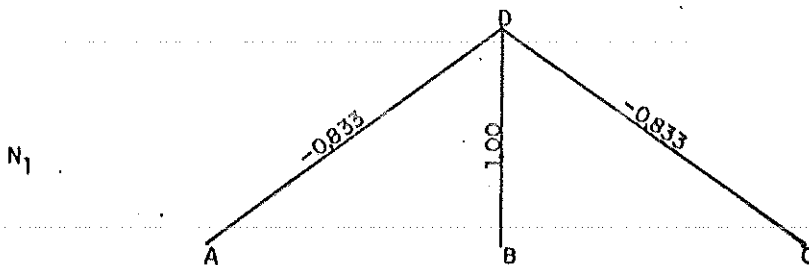
8-6 - Diagrama de esforços normais de tração (t)



9 - Problema(1)

Os únicos esforços internos no problema(1) correspondem ao esforço normal.

Diagrama de esforços normais de tração



10 - Cálculo de deslocamentos

10-1 - Expressão geral

$$\delta_{ij} = \int_{\text{estr}} M_i \cdot \frac{M_j ds}{E J} + \int_{\text{estr}} Q_i \cdot \frac{c Q_j ds}{G S} + \int_{\text{estr}} N_i \cdot \frac{N_j ds}{E S}$$

Como no problema(1) só existe esforço normal, tem-se

$$E \cdot B \cdot \delta_{1j} = \sum_k \frac{s}{S} N_i N_j \ell \text{ p/todos os k trachos de mesma seção.}$$

10-2 - Cálculo de δ_{10} e δ_{11}

$$E \cdot s \cdot \delta_{10} = 5,0 \cdot (-1,030) \cdot (-0,833) + 5,0 \cdot (-2,130) \cdot (-0,833) = 4,30 + 8,89 = 13,19$$

$$E \cdot s \cdot \delta_{11} = 2 \cdot 5,0 \cdot 0,833^2 + 3,0 \cdot 1,0^2 = 9,94$$

11 - Solução da equação de compatibilidade de deslocamentos

Multiplicando todos os termos da equação do Ítem 4 pelo fator $E \cdot s$, e substituindo os valores do Ítem 10-2, tem-se:

$$13,19 + X_1 \cdot 9,94 = 0$$

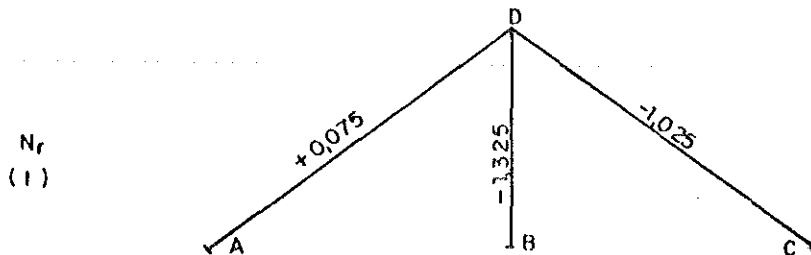
que tem como solução:

$$X_1 = -1,325 \text{ t}$$

12 - Superposição de efeitos

Os diagramas finais de momento fletor e esforço cortante são idênticos aos do problema(o), que constam dos Ítems 8-3 e 8-5. É desnecessário repetí-los.

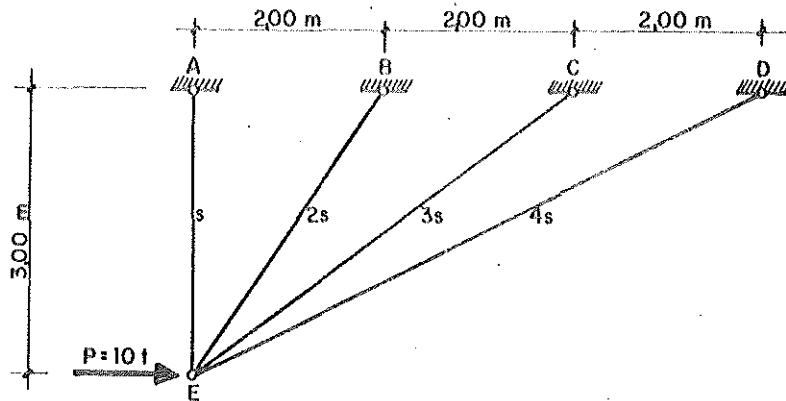
O diagrama de esforço normal, de tração, será:



EXERCÍCIO 23 - Processo dos Deslocamentos

1 - Enunciado e dados

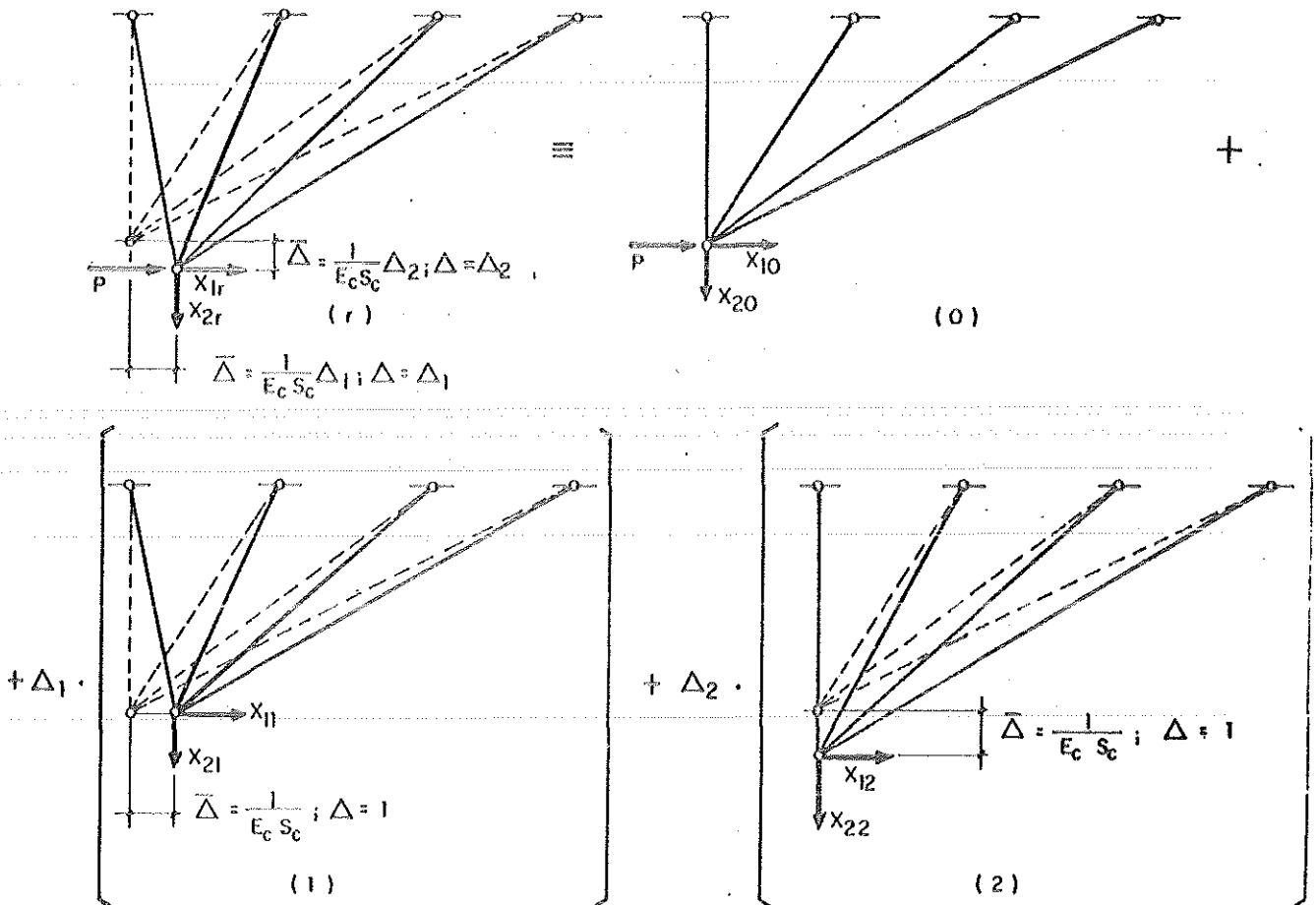
Determinar os esforços normais de tração na treliça da figura, onde tôdas as barras são do mesmo material.



2 - Número de deslocamentos possíveis dos nós

Apenas o nó E pode se deslocar, e este pode ter dois deslocamentos independentes, por exemplo, uma translação vertical e outra horizontal.

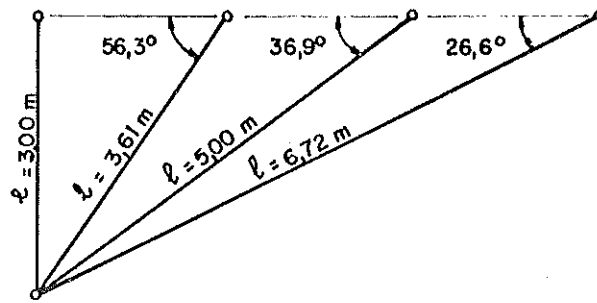
3 - Esquema de solução:



$\bar{\Delta} \rightarrow$ deslocamento

$\Delta \rightarrow$ deslocamento ampliado, tal que, $\Delta = E_c S_c \bar{\Delta}$

4 - Ângulos e comprimentos



5 - Equação de compatibilidade de esforços

$$X_{1r} = X_{10} + \Delta_1 \cdot X_{11} + \Delta_2 \cdot X_{12} = 0$$

$$X_{2r} = X_{20} + \Delta_1 \cdot X_{21} + \Delta_2 \cdot X_{22} = 0$$

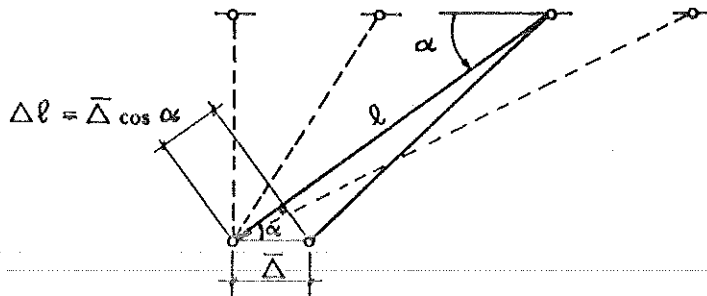
6 - Esforços no problema(o)

$$X_{10} = -P = -10,0 \text{ t}$$

$$X_{20} = 0$$

7 - Esforços no problema(1)

7-1 - Alongamento das barras



$$E_c = E = \text{constante}$$

$$S_c = s$$

$$\bar{\Delta} = \frac{\Delta}{E_c S_c} = \frac{1}{E_c S_c}, \text{ já que } \Delta = 1$$

$$\Delta l_{AE} = -\bar{\Delta} \cos 90,0^\circ = -\frac{1}{E_c S_c} \cdot 0,000$$

$$\Delta l_{BE} = -\bar{\Delta} \cos 56,3^\circ = -\frac{1}{E_c S_c} \cdot 0,555$$

$$\Delta l_{CE} = -\bar{\Delta} \cos 36,9^\circ = -\frac{1}{E_c S_c} \cdot 0,799$$

$$\Delta l_{DE} = -\bar{\Delta} \cos 26,6^\circ = -\frac{1}{E_c S_c} \cdot 0,894$$

7-2 - Esforços nas barras

$$N = ES \cdot \frac{\Delta l}{l} = \frac{E}{E_c} \cdot \frac{S}{S_c} \cdot \frac{E_c S_c \Delta l}{l}$$

$$\text{portanto: } N_{AE} = -1 \cdot 1 \cdot \frac{0}{3,00} = 0$$

$$N_{BE} = -1 \cdot 2 \cdot \frac{0,555}{3,61} = -0,307$$

$$N_{CE} = -1 \cdot 3 \cdot \frac{0,799}{5,00} = -0,479$$

$$N_{DE} = -1 \cdot 4 \cdot \frac{0,894}{6,72} = -0,532$$

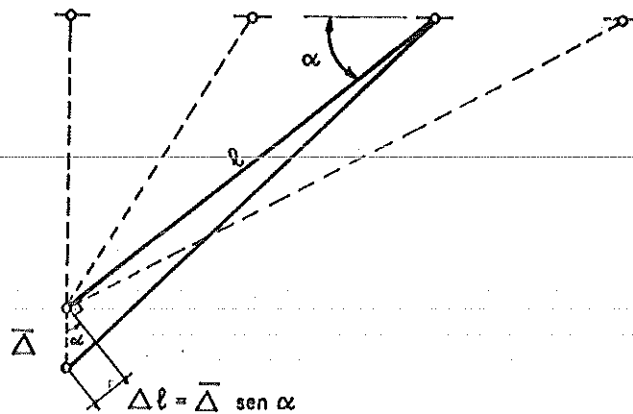
7-3 - Cálculo de X_{11} e X_{21}

$$X_{11} = 0 + 0,307 \cdot 0,555 + 0,479 \cdot 0,799 + 0,532 \cdot 0,894 = 1,029$$

$$X_{21} = -0 = 0,307 \cdot 0,832 - 0,479 \cdot 0,600 - 0,532 \cdot 0,447 = -0,781$$

8 - Esforços no problema(2)

8-1 - Alongamento das barras



$$E_c = E = \text{constante}$$

$$S_c = s$$

$$\bar{\Delta} = \frac{\Delta}{E_c S_c} = \frac{1}{E_c S_c}, \text{ já que } \Delta = 1$$

$$\Delta \ell_{AE} = \bar{\Delta} \cdot \text{sen} 90,09^\circ = \frac{1}{E_c S_c} \cdot 1,000$$

$$\Delta \ell_{BE} = \bar{\Delta} \cdot \text{sen} 56,39^\circ = \frac{1}{E_c S_c} \cdot 0,832$$

$$\Delta \ell_{CE} = \bar{\Delta} \cdot \text{sen} 36,99^\circ = \frac{1}{E_c S_c} \cdot 0,600$$

$$\Delta \ell_{DE} = \bar{\Delta} \cdot \text{sen} 26,69^\circ = \frac{1}{E_c S_c} \cdot 0,447$$

8-2 - Esforços nas barras

$$N = ES \cdot \frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{E}{E_c} \cdot \frac{S}{S_c} \cdot \frac{E_c S_c \Delta \ell}{\ell}$$

portanto

$$N_{AE} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1,000}{3,00} = 0,333$$

$$N_{BE} = 1 \cdot 2 \cdot \frac{0,832}{3,61} = 0,461$$

$$N_{CE} = 1 \cdot 3 \cdot \frac{0,600}{5,00} = 0,359$$

$$N_{DE} = 1 \cdot 4 \cdot \frac{0,447}{6,72} = 0,266$$

8-3 - Cálculo de X_{12} e X_{22}

$$X_{12} = -0,333 \cdot 0 - 0,461 \cdot 0,555 - 0,359 \cdot 0,799 - 0,266 \cdot 0,894 = -0,781$$

$$X_{22} = 0,333 \cdot 1,000 + 0,461 \cdot 0,832 + 0,359 \cdot 0,600 + 0,266 \cdot 0,447 = 1,050$$

9 - Solução do sistema de equações

Substituindo os valores dos itens 6, 7 e 8 no sistema do item 5,

tem-se:

$$-10,0 + \Delta_1 \cdot 1,029 - \Delta_2 \cdot 0,781 = 0$$

$$0 - \Delta_1 \cdot 0,781 + \Delta_2 \cdot 1,050 = 0$$

que tem como solução

$$\Delta_1 = 22,35$$

$$\Delta_2 = 16,63$$

10 - Superposição de efeitos

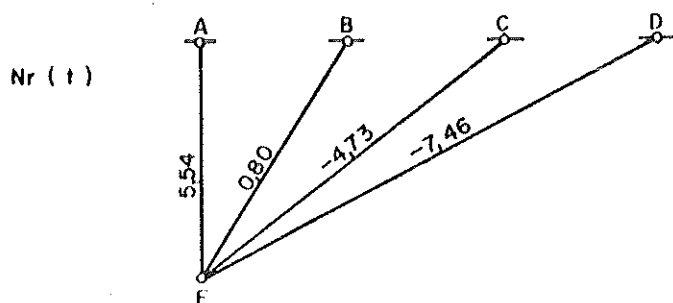
Como $(r) = (o) + \Delta_1 \cdot (1) + \Delta_2 \cdot (2)$

$$N_{AE} = 0 - 22,35 \cdot 0 + 16,63 \cdot 0,333 = 5,54 \text{ t}$$

$$N_{BE} = 0 - 22,35 \cdot 0,307 + 16,63 \cdot 0,461 = 0,80 \text{ t}$$

$$N_{CE} = 0 - 22,35 \cdot 0,479 + 16,63 \cdot 0,359 = -4,73 \text{ t}$$

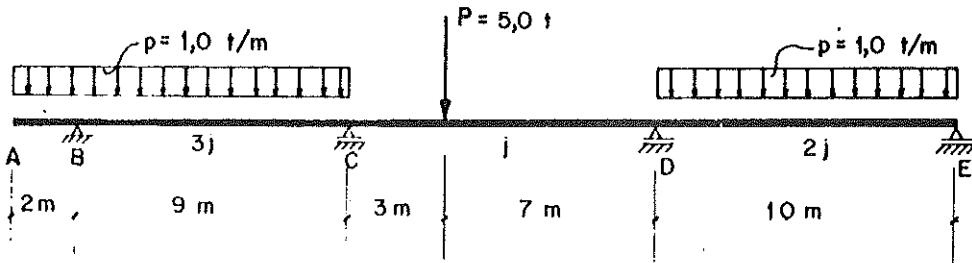
$$N_{DE} = 0 - 22,35 \cdot 0,532 + 16,63 \cdot 0,266 = -7,46 \text{ t}$$



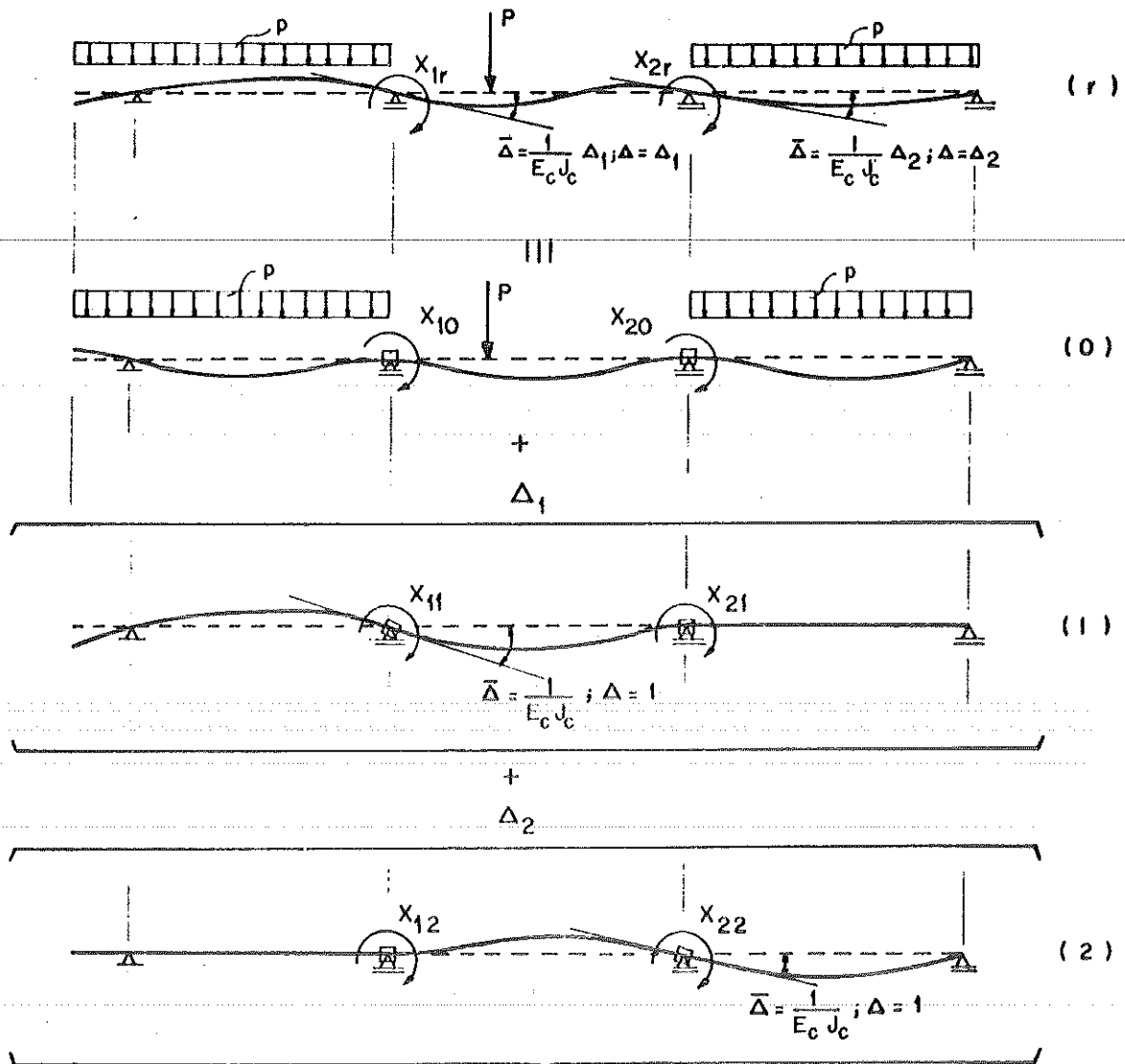
EXERCÍCIO 24 - Processo dos Deslocamentos

1 - Enunciado e dados

Determinar o diagrama de momentos fletores na viga contínua da figura



2 - Esquema de solução



onde:

$\bar{\Delta}$ → deslocamento

Λ → deslocamento ampliado tal que $\Lambda = E_c J_c \bar{\Delta}$

3 - Equações de compatibilidade

$$X_{1r} = X_{10} + \Lambda_1 \cdot X_{11} + \Lambda_2 \cdot X_{12} = 0$$

$$X_{2r} = X_{20} + \Lambda_1 \cdot X_{21} + \Lambda_2 \cdot X_{22} = 0$$

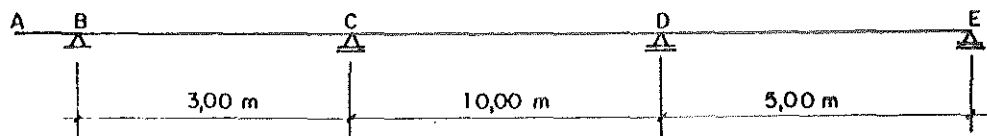
4 - Momentos de Engastamento perfeito devidos a deslocamentos ampliados unitários.

Das tabelas A3, A4 e A5 do anexo pode-se compor:

TABELA 24

TAB	ESQUEMA	$f(\bar{\psi})$		$f(\psi)$		$f(\psi=1)$	
		M_{AB}	M_{BA}	M_{AB}	M_{BA}	M_{AB}	M_{BA}
A3		$+\frac{2EJ\bar{\psi}}{l}$	$+\frac{4EJ\bar{\psi}}{l}$	$+\frac{2EJ\psi}{l E_c J_c}$	$+\frac{4EJ\psi}{l E_c J_c}$	$+\frac{2}{l'}$	$+\frac{4}{l'}$
A4		$-\frac{3EJ\bar{\psi}}{l}$	—	$-\frac{3EJ\psi}{l E_c J_c}$	—	$-\frac{3}{l'}$	—
A5		—	$+\frac{3EJ\bar{\psi}}{l}$	—	$+\frac{3EJ\psi}{l E_c J_c}$	—	$+\frac{3}{l'}$

5 - Comprimentos equivalentes, $l' = \frac{E_c J_c}{E J} l$
 $E_c = E = \text{constante}$
 $J_c = j$



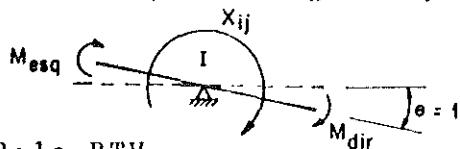
6 - Momentos nas extremidades das barras nos problemas(o), (1) e (2), na convenção de Grinter, em tm

Utilizando as tabelas A3, A4 e A5 e também a tabela 24, tem-se:



7 - Determinação dos esforços X_{ij}

7-1 - Expressão geral para X_{ij} , na direção i, no problema j.



Pelo PTV,

$$T_{ext} = T_{int} = 0$$

$$X_{ij} + M_{esq} + M_{dir} = 0 \therefore X_{ij} = -(M_{esq} + M_{dir})$$

7-2 - Valores numéricos

$$X_{10} = -(-9,15 + 7,35) = 1,80$$

$$X_{20} = -(-3,15 + 12,50) = -9,35$$

$$X_{11} = -(-1,00 - 0,40) = 1,40$$

$$X_{21} = -(-0,20 + 0,00) = 0,20$$

$$X_{12} = -(0,00 - 0,20) = 0,20$$

$$X_{22} = -(0,40 - 0,600) = 1,00$$

8 - Solução do sistema de equações de compatibilidade.

Substituindo os valores do item 7-2 nas equações do item 3, tem-se:

$$1,80 + \Delta_1 \cdot 1,40 + \Delta_2 \cdot 0,20 = 0$$

$$-9,35 + \Delta_1 \cdot 0,20 + \Delta_2 \cdot 1,00 = 0$$

que tem como solução:

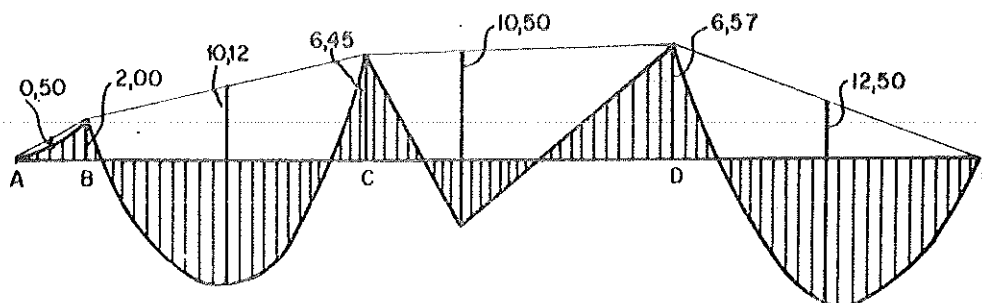
$$\Delta_1 = -2,70$$

$$\Delta_2 = 9,88$$

9 - Superposição de efeitos - Momentos de extremidade (tm)

	-9,15	7,35	-3,15	12,50
	2,70	1,08	0,54	
		-1,98	-3,96	-5,93
	<u>-6,45</u>	<u>6,45</u>	<u>-6,57</u>	<u>6,57</u>

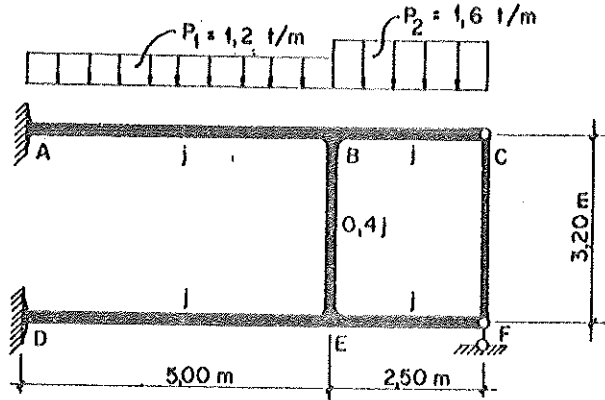
10 - Diagrama de momento fletor (tm)



EXERCÍCIO 25 - Processo dos Deslocamentos

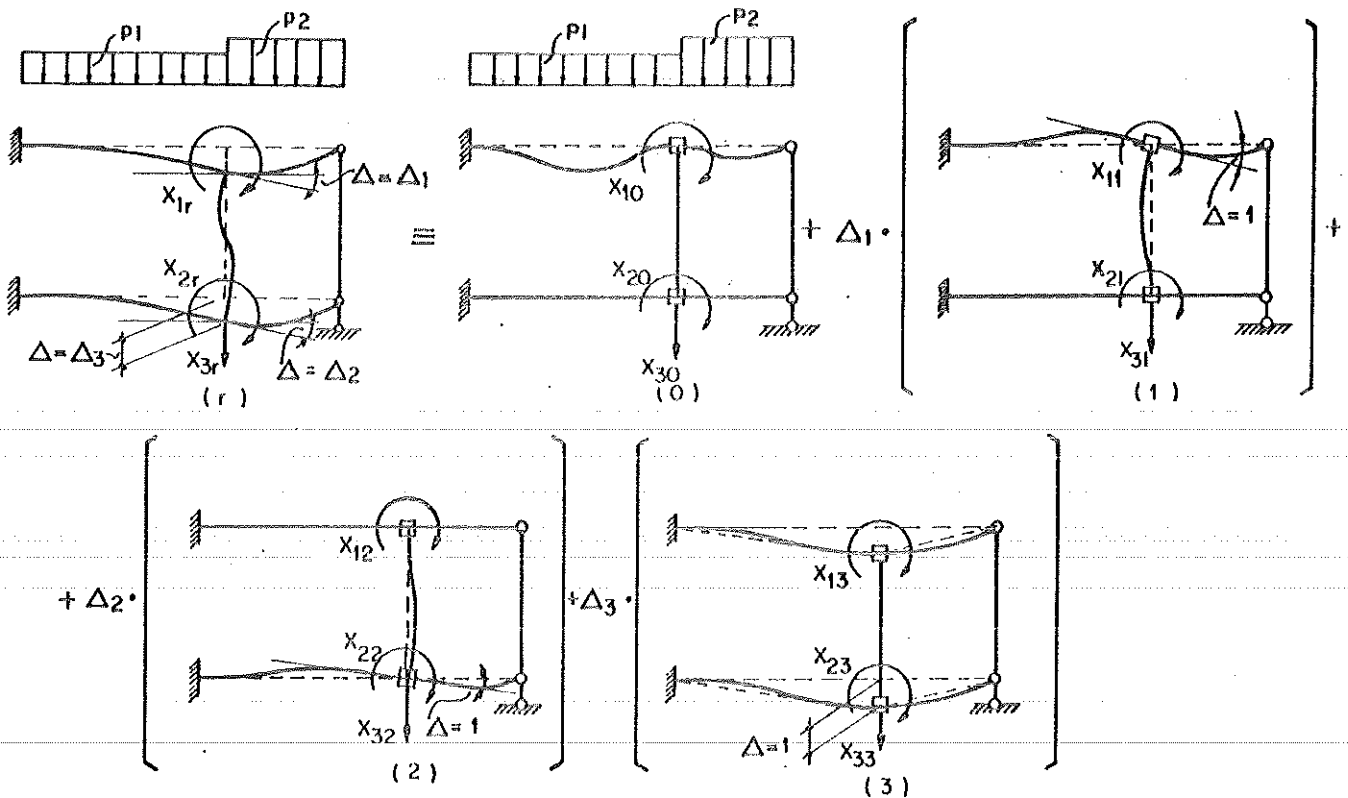
1 - Enunciado e dados

Para a estrutura da figura determinar o diagrama de momentos fletores.



E = constante

2 - Esquema de solução



onde: $\Delta = E_c J_c \bar{\Delta} + \text{deslocamento ampliado}$

3 - Equações de compatibilidade de esforços

$$X_{1r} = X_{10} + \Delta_1 \cdot X_{11} + \Delta_2 \cdot X_{12} + \Delta_3 \cdot X_{13} = 0$$

$$X_{2r} = X_{20} + \Delta_1 \cdot X_{21} + \Delta_2 \cdot X_{22} + \Delta_3 \cdot X_{23} = 0$$

$$X_{3r} = X_{30} + \Delta_1 \cdot X_{31} + \Delta_2 \cdot X_{32} + \Delta_3 \cdot X_{33} = 0$$

4 - Momentos de engastamento perfeito devidos a deslocamentos ampliados unitários nas extremidades.

Utilizando as tabelas A3, A4 e A5 podemos compor:

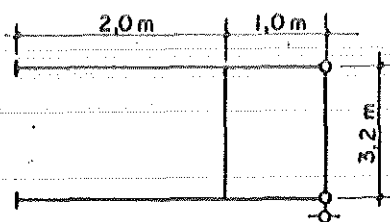
TABELA 25

TAB	ESQUEMA	f($\bar{\Delta}$)		f(Δ)		f($\Delta=1$)	
		M _{AB}	M _{BA}	M _{AB}	M _{BA}	M _{AB}	M _{BA}
A3		$+\frac{6EJ\bar{\Delta}}{\ell^2}$	$+\frac{6EJ\bar{\Delta}}{\ell^2}$	$+\frac{6EJ\Delta}{\ell^2 E_c J_c}$	$+\frac{6EJ\Delta}{\ell^2 E_c J_c}$	$+\frac{6}{\ell \ell'}$	$+\frac{6}{\ell \ell'}$
		$+\frac{2EJ\bar{\psi}}{\ell}$	$+\frac{4EJ\bar{\psi}}{\ell}$	$+\frac{2EJ\psi}{\ell E_c J_c}$	$+\frac{4EJ\psi}{\ell E_c J_c}$	$+\frac{2}{\ell'}$	$+\frac{4}{\ell'}$
A4		$+\frac{3EJ\bar{\Delta}}{\ell^2}$	—	$+\frac{3EJ\Delta}{\ell^2 E_c J_c}$	—	$+\frac{3}{\ell \ell'}$	—
		$-\frac{3EJ\bar{\psi}}{\ell}$	—	$-\frac{3EJ\psi}{\ell E_c J_c}$	—	$-\frac{3}{\ell'}$	—
A5		—	$+\frac{3EJ\bar{\Delta}}{\ell^2}$	—	$+\frac{3EJ\Delta}{\ell^2 E_c J_c}$	—	$+\frac{3}{\ell \ell'}$
		—	$+\frac{3EJ\bar{\psi}}{\ell}$	—	$+\frac{3EJ\psi}{\ell E_c J_c}$	—	$+\frac{3}{\ell'}$

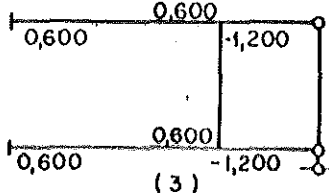
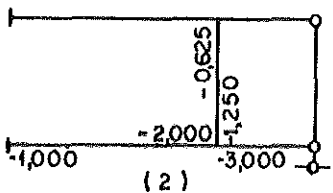
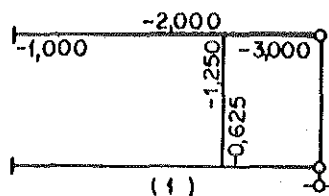
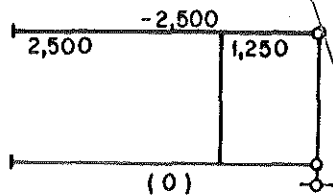
5 - Comprimentos equivalentes, $\ell' = \frac{E_c J_c}{EJ} \cdot \ell$

$E_c = E = \text{constante}$

$J_c = 0,4 j$

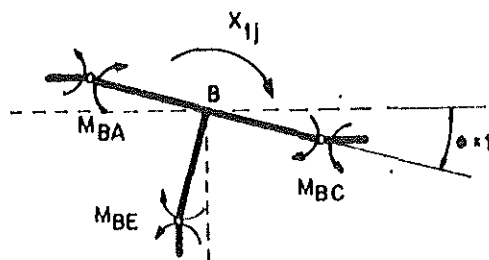
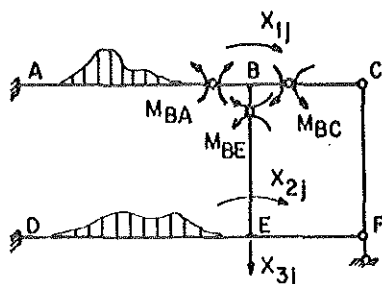


6 - Momentos nas extremidades das barras, (Convenção de Grinter), nos problemas (o), (1), (2) e (3), em tm



7 - Determinação dos esforços X_{ij}

7-1 - Esforços X_{1j}



Pelo PTV:

$$T_{\text{ext}} = T_{\text{int}} = 0$$

$$X_{1j} + M_{BA} + M_{BE} + M_{BC} = 0$$

$$X_{1j} = - \sum_i M_{Bi}$$

Substituindo os valores numéricos correspondentes:

$$X_{10} = 2,500 - 1,250 = 1,250$$

$$X_{11} = 2,000 + 3,000 + 1,250 = 6,250$$

$$X_{12} = 0,625$$

$$X_{13} = -0,600 + 1,200 = 0,600$$

7-2 - Esforços X_{2j}

Com procedimento análogo ao do item 7-1 podemos concluir que

$$X_{2j} = - \sum_i M_{Ei}$$

Substituindo os valores numéricos correspondentes:

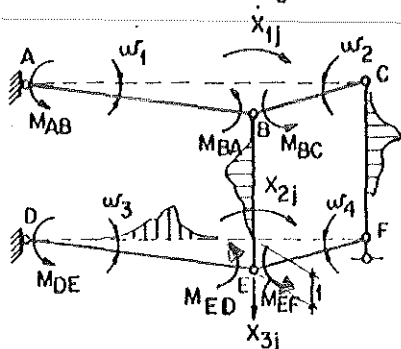
$$X_{20} = 0$$

$$X_{21} = 0,625$$

$$X_{22} = 2,000 + 1,250 + 3,000 = 6,250$$

$$X_{23} = -0,600 + 1,200 = 0,600$$

7-3 - Esforços X_{3j}



$$w_1 = w_3 = \frac{1}{5,00} = 0,2 \text{ m}^{-1}$$

$$w_2 = w_4 = \frac{1}{2,50} = 0,4 \text{ m}^{-1}$$

Pelo PTV:

$$T_{\text{ext}} = T_{\text{int}} = 0$$

$$X_{3j} \cdot 1 + T_{cargas} - w_1(M_{AB} + M_{BA}) + w_2(M_{BC}) - w_3(M_{DE} + M_{ED}) + w_4(M_{EF}) = 0$$

$$X_{3j} = 0,2 \cdot (M_{AB} + M_{BA} + M_{DE} + M_{ED}) - 0,4(M_{BC} + M_{EF}) - T_{cargas}$$

Substituindo os valores numéricos correspondentes:

$$X_{30} = 0,2(2,500 - 2,500) - 0,4(1,25) - (5,0 \cdot 1,2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + 2,5 \cdot 1,6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1) = -5,500$$

$$X_{31} = 0,2(-1,000 - 2,000) - 0,4(-3,00) - 0 = 0,600$$

$$X_{32} = 0,2(-1,000 - 2,000) - 0,4(-3,00) - 0 = 0,600$$

$$X_{33} = 0,2(0,600 + 0,600 + 0,600 + 0,600) - 0,4(-1,200 - 1,200) - 0 = 1,440$$

8 - Solução do sistema de equações

Substituindo os valores numéricos do item 7 nas equações do item 3 tem-se:

$$6,250 \cdot \Delta_1 + 0,625 \cdot \Delta_2 + 0,600 \cdot \Delta_3 = -1,250$$

$$0,625 \cdot \Delta_1 + 6,250 \cdot \Delta_2 + 0,600 \cdot \Delta_3 = 0$$

$$0,600 \cdot \Delta_1 + 0,600 \cdot \Delta_2 + 1,440 \cdot \Delta_3 = 5,500$$

cuja solução é:

$$\Delta_1 = -0,569$$

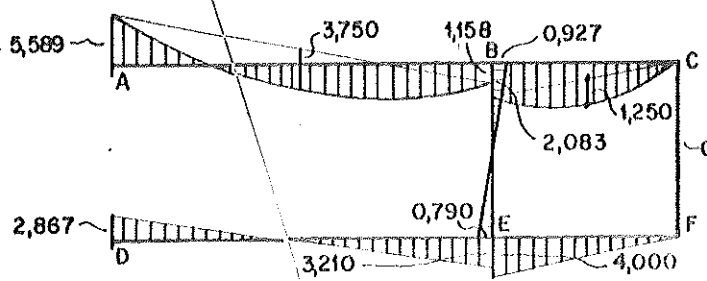
$$\Delta_2 = -0,347$$

$$\Delta_3 = 4,200$$

9 - Superposição de efeitos - Momentos de extremidade (tm)

A	B	C	
2,500	-2,500	1,250	
0,569	1,138	1,707	
0	0	0	
2,520	2,520	-5,040	
<u>5,589</u>	<u>1,158</u>	<u>-2,083</u>	
D	E	F	
0	0	0	
0	0	0	
0,347	0,690	1,040	
<u>2,520</u>	<u>2,520</u>	<u>-5,040</u>	
<u>2,867</u>	<u>3,210</u>	<u>-4,000</u>	
			0,790

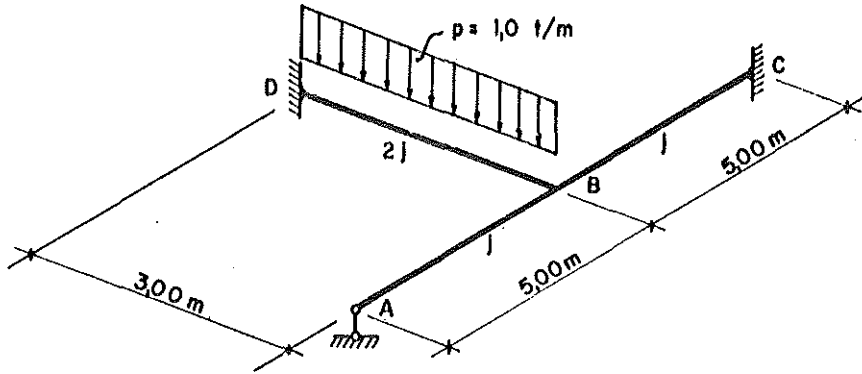
10 - Diagrama de momentos fletores (tm)



EXERCÍCIO 26 - Processo dos Deslocamentos

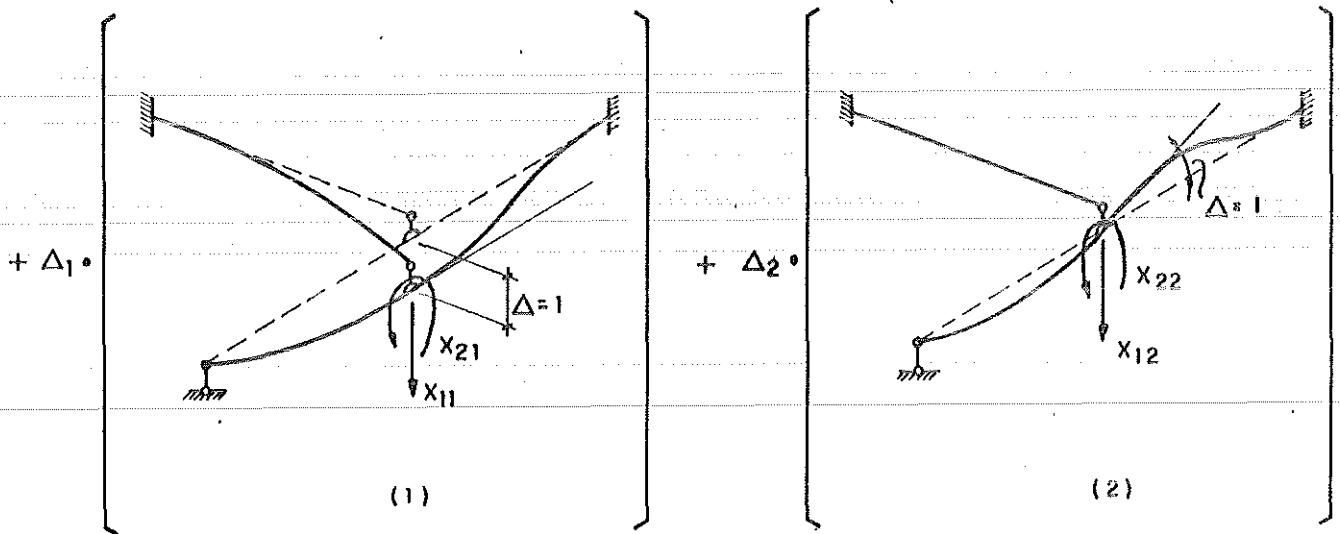
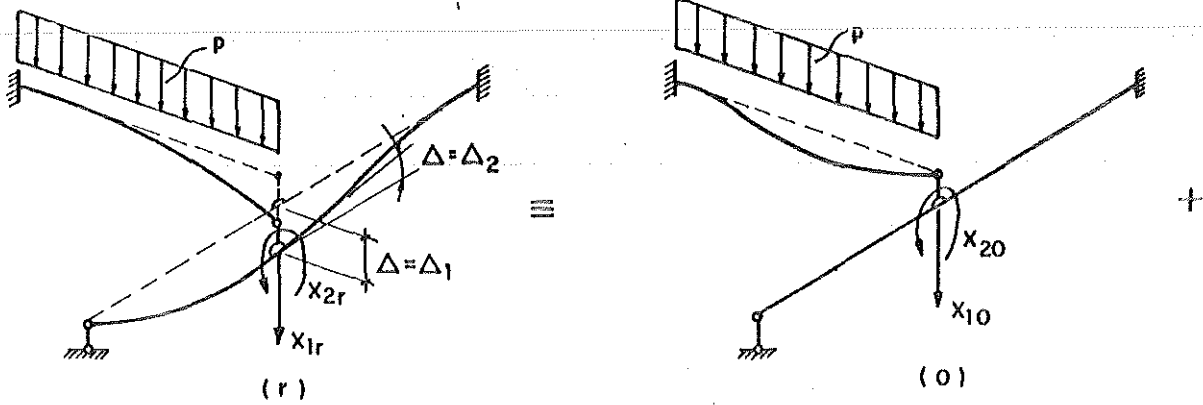
1 - Enunciado e dados

Determinar o diagrama de momentos fletores para a grelha da figura. Admitir que o vínculo em A e B sã transmita esforço vertical



E = constante

2 - Esquema de solução



3 - Equações de compatibilidade de esforços

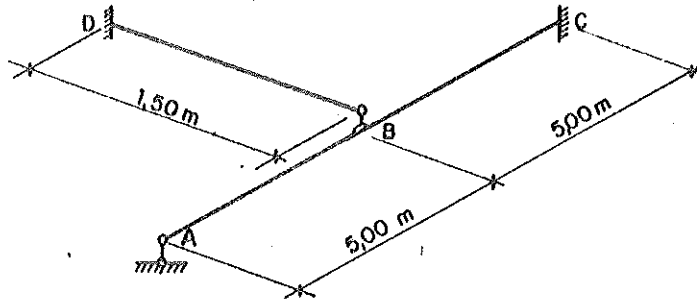
$$X_{1r} = X_{10} + \Delta_1 \cdot X_{11} + \Delta_2 \cdot X_{12} = 0$$

$$X_{2r} = X_{20} + \Delta_1 \cdot X_{21} + \Delta_2 \cdot X_{22} = 0$$

4 - Comprimentos fictícios, $l' = \frac{E_c J_c}{EJ} l$

$E_c = E = \text{constante}$

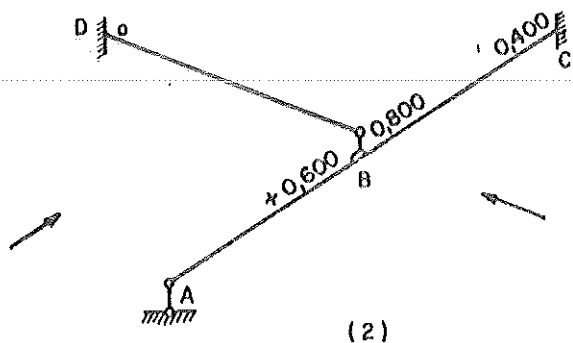
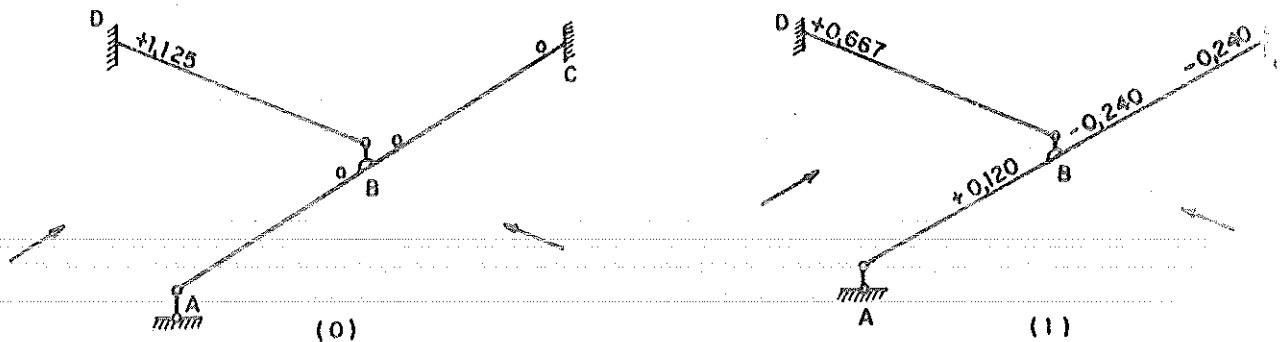
$J_c = j$



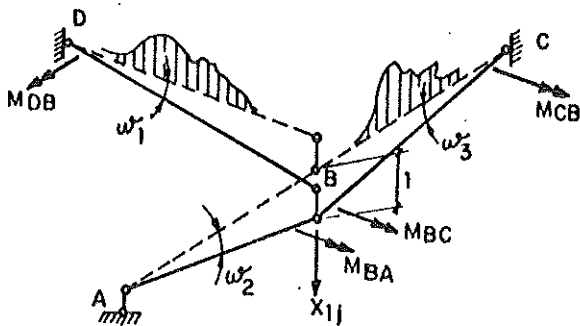
5 - Momentos nas extremidades das barras, convenção de Grinter, nos problemas (o), (1) e (2), em tm

Observação:

A convenção de Grinter é válida exclusivamente para momentos flettores perpendiculares ao plano que contém uma estrutura plana. Neste caso para que ela seja válida convencionar-se-á que a barra DB seja vista no sentido de A para B e a barra ABC seja vista no sentido de B para D.



Para o problema (o) foi utilizada a tabela A4, e para os problemas (1) e (2) a tabela 25, Ítem 4 do exercício 25.

6 - Determinação dos esforços X_{ij} 6-1 - Esforços X_{1j} 

$$w_1 = \frac{1}{3,0} = 0,333 \text{ m}^{-1}$$

$$w_2 = w_3 = \frac{1}{5,0} = 0,200 \text{ m}^{-1}$$

Pelo PTV:

$$T_{\text{ext}} = T_{\text{int}} = 0$$

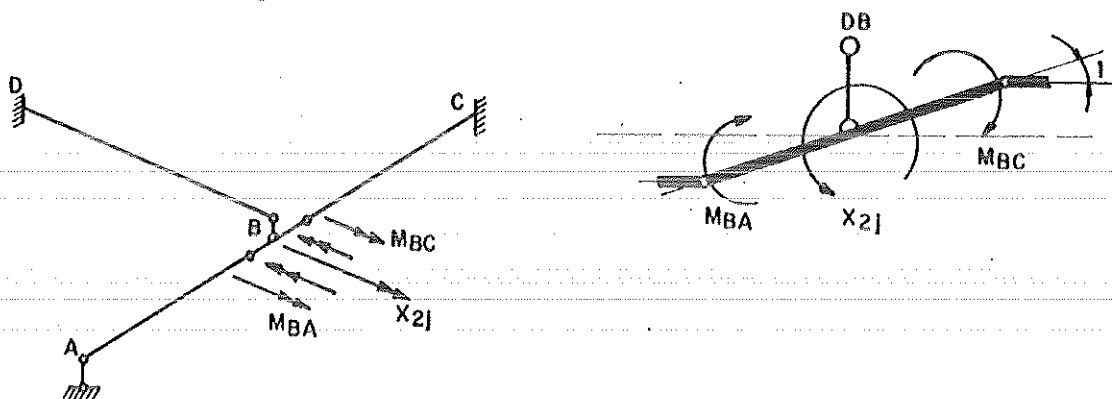
$$X_{1j} + T_{\text{cargas}} - w_1(M_{DB}) - w_2(M_{BA}) + w_3(M_{BC} + M_{CB}) = 0$$

$$X_{1j} = 0,333(M_{DB}) + 0,200(M_{BA}) - 0,200(M_{BC} + M_{CB}) - T_{\text{cargas}}$$

$$X_{10} = 0,333(1,125) + 0 - 0 - 3,0 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1,0 = -1,125$$

$$X_{11} = 0,333(0,667) + 0,200(0,120) - 0,200(-0,240 - 0,240) - 0 = 0,342$$

$$X_{12} = 0,333(0) + 0,200(0,600) - 0,200(0,800 + 0,400) - 0 = -0,120$$

6-2 - Esforços X_{2j} 

Pelo PTV:

$$T_{\text{ext}} = T_{\text{int}} = 0$$

$$X_{2j} - M_{BC} - M_{BA} = 0$$

$$X_{2j} = M_{BC} + M_{BA}$$

$$X_{20} = 0$$

$$X_{21} = -0,240 + 0,120 = -0,120$$

$$X_{22} = 0,800 + 0,600 = 1,400$$

7 - Solução do sistema de equações

Substituindo os valores do Ítem 6 para as equações do Ítem 3 tem:

-se:

$$0,342 \cdot \Delta_1 - 0,120 \cdot \Delta_2 = 1,125$$

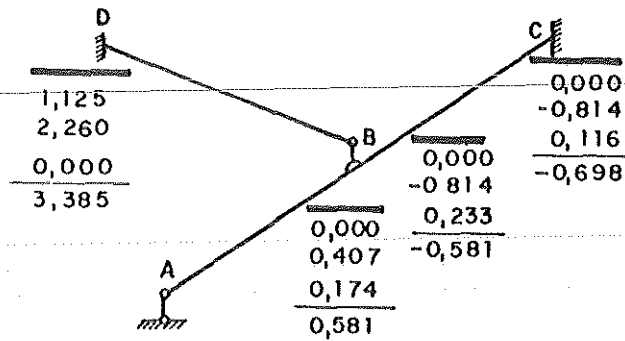
$$-0,120 \cdot \Delta_1 + 1,400 \cdot \Delta_2 = 0$$

cuja solução é

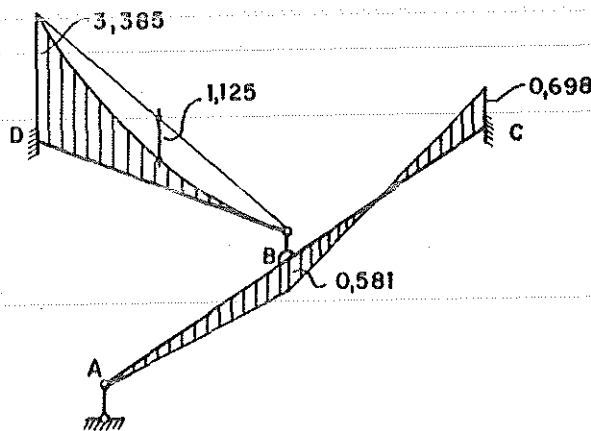
$$\Delta_1 = 3,390$$

$$\Delta_2 = 0,291$$

8 - Superposição de efeitos - Momentos de extremidade (tm)



9 - Diagrama de momentos fletores (tm)



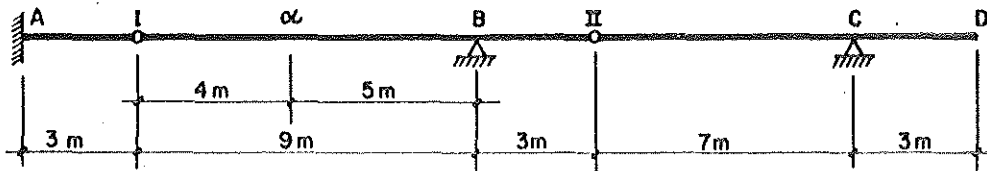
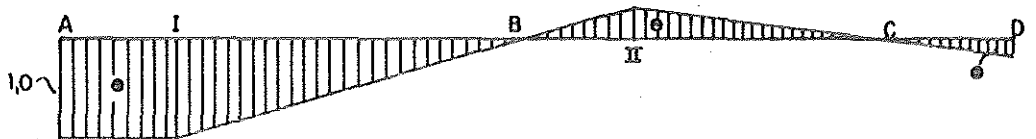
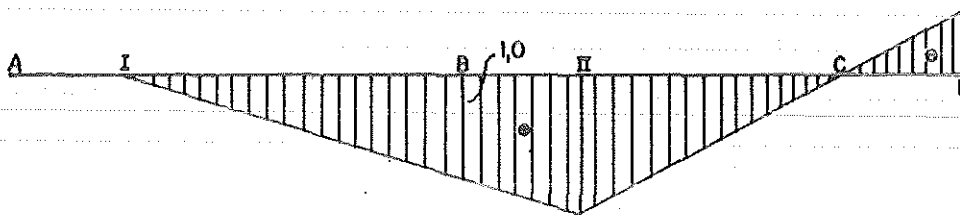
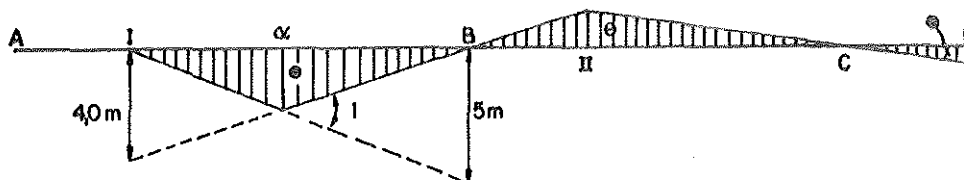
EXERCÍCIO 27 - Linhas de Influência de Estruturas Isostáticas

1 - Enunciado e dados

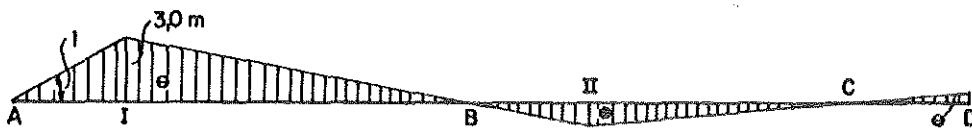
Na viga "Gerber" da figura determinar as linhas de influência das reações em A, (R_A), em B, (R_B), dos momentos fletores em α , (M_α), em A, (M_A), em B, (M_B), em C, (M_C), dos esforços cortantes em α , (Q_α), à esquerda de B, ($Q_{B\text{esq}}$), à direita de B, ($Q_{B\text{dir}}$), à direita de C, ($Q_{C\text{dir}}$).

Convencionar como positivos:

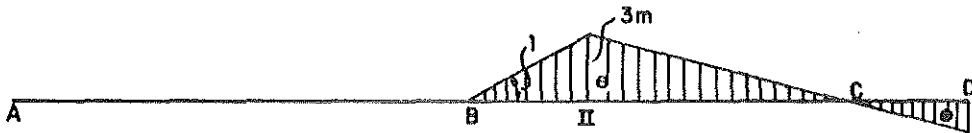
- Reações orientadas para cima
- Esforços Cortantes horários sôbre as seções
- Momentos fletores que provocam tração embaixo

2 - Linha de Influência de R_A 3 - Linha de influência de R_B 4 - Linha de influência de M_α 

5 - Linha de Influência de M_A



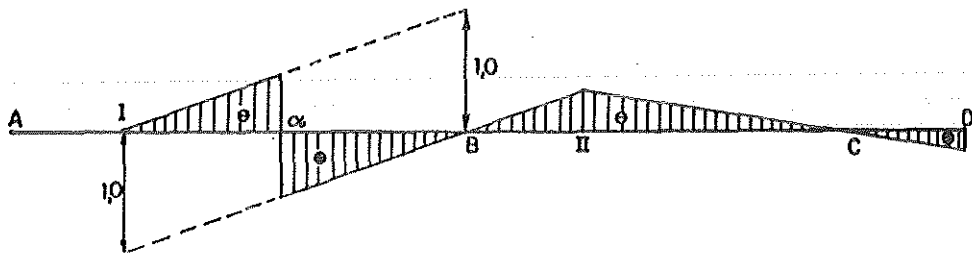
6 - Linha de Influência de M_B



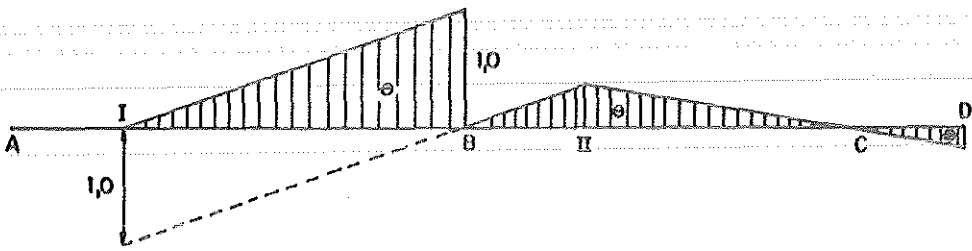
7 - Linha de Influência de M_C



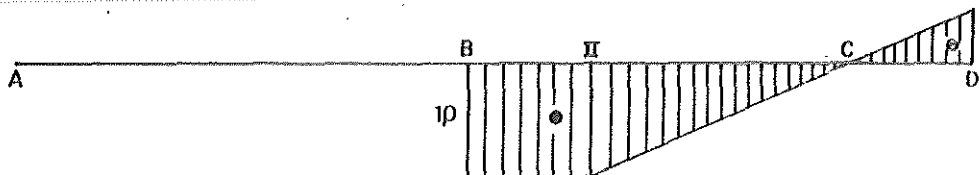
8 - Linha de Influência de Q_α



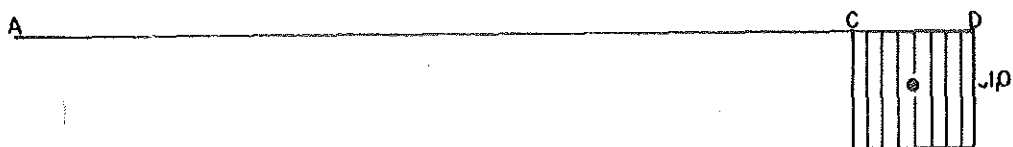
9 - Linha de Influência de Q_{Besq}



10 - Linha de Influência de Q_{Bdir}



11 - Linha de Influência de Q_{Cdir}

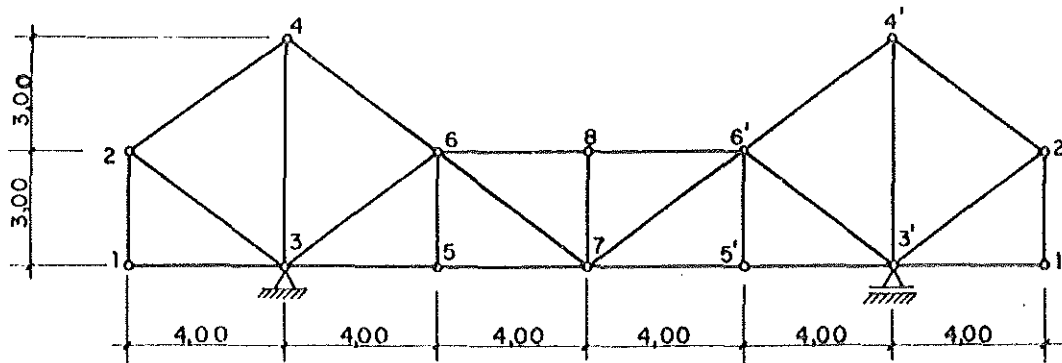
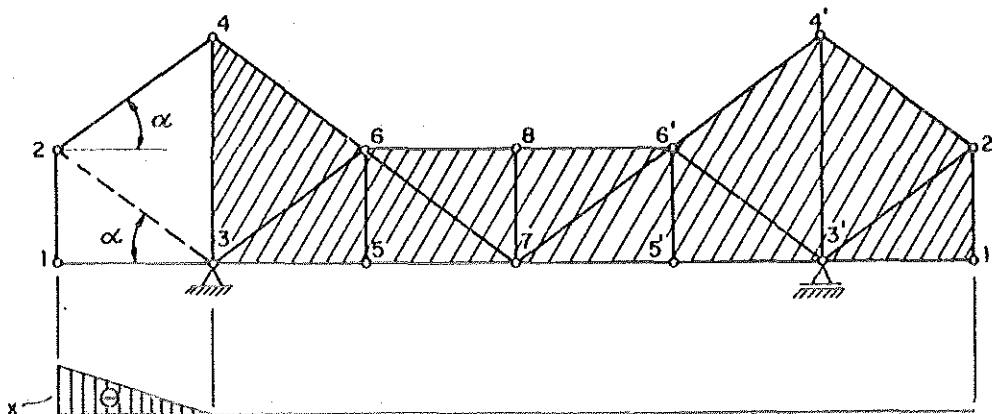


EXERCÍCIO 28 - Linhas de Influência de Estruturas Isostáticas

1 - Enunciado e dados

Determinar as linhas de influência para os esforços normais de tração nas barras 2-3; 3-4; 7-8; 5-6; 3-6; 4-6; 5-7 e 6-7 da treliça da figura, para carga percorrendo o banzo inferior.

As dimensões são dadas em metros

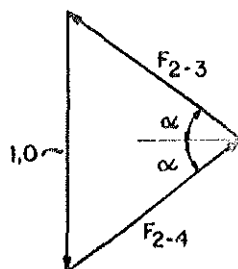
2 - Linha de Influência de F_{2-3} 

2-1 - Cálculo de x aplicando carga unitária ao nó 1 e verificando o valor de F_{2-3} pelo equilíbrio do nó 2.

$$\text{sen} \alpha = 0,6$$

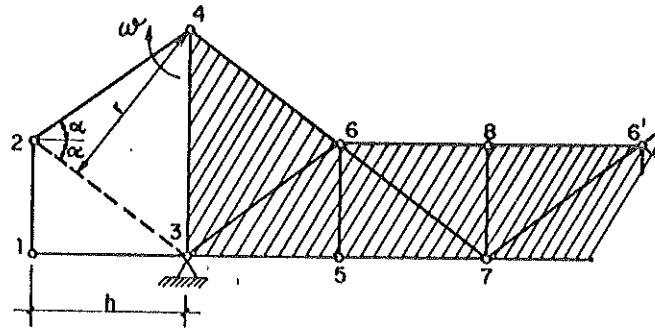
$$\text{cos} \alpha = 0,8$$

$$\text{tg} \alpha = 0,75$$



$$x = \frac{0,5}{\text{sen} \alpha} = \frac{0,5}{0,6} = 0,833$$

2-2 - Cálculo de x pelo deslocamento do nó 2 calculado através do giro da barra 2-4



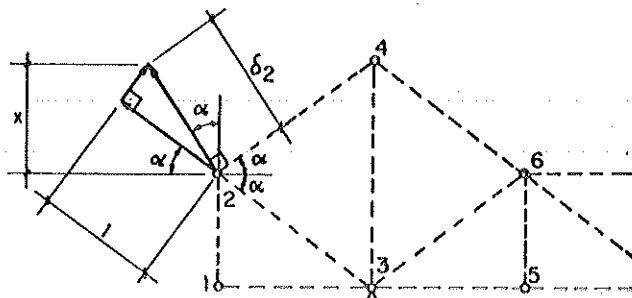
$$w = \frac{l}{r}$$

$$x = \frac{1}{r} \cdot h$$

$$r = 5,00 \cdot \sin 2\alpha = 5,00 \cdot 2 \cdot 0,8 \cdot 0,6 = 4,80 \text{ m}$$

$$x = \frac{4,00}{4,80} = 0,833$$

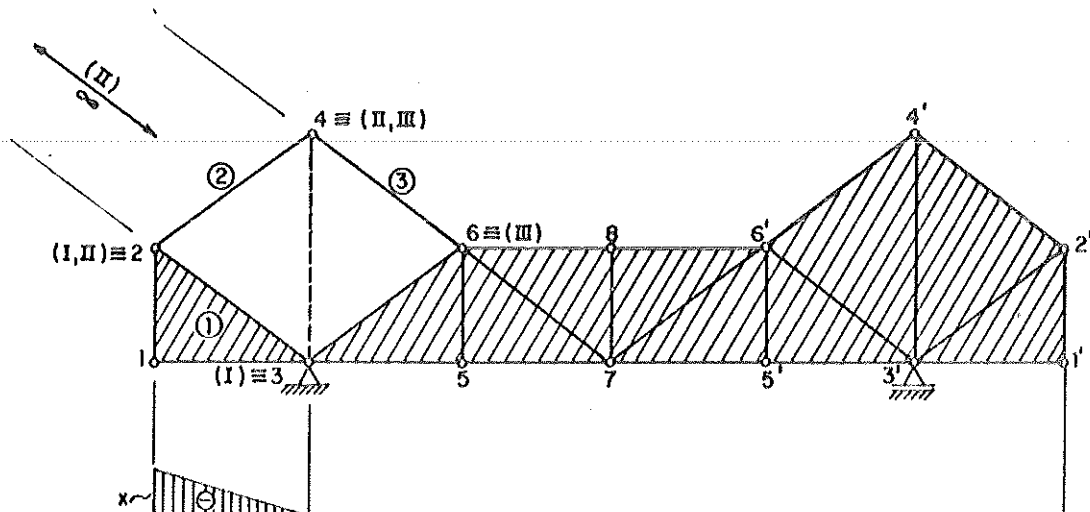
2-3 - Cálculo de x pelo deslocamento do nó 2, sabendo que o nó 2 se desloca na perpendicular à barra 2-4



$$\delta_2 = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)} = \frac{1}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{2 \cdot 0,8 \cdot 0,6} = 1,042$$

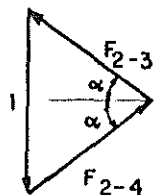
$$x = \delta_2 \cdot \cos \alpha = 1,042 \cdot 0,8 = 0,833$$

3 - Linha de Influência de F_{3-4}

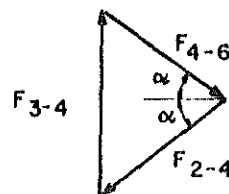


3-1 - Cálculo de x aplicando carga unitária ao nó 1 e verificando o valor de F_{2-3} pela imposição das condições de equilíbrio.

Equilíbrio do nó 2:



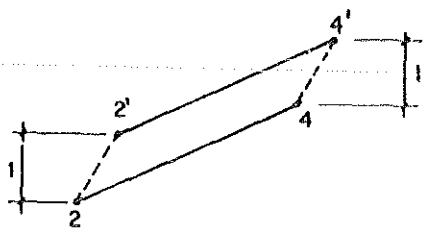
Equilíbrio do nó 4:



Pela igualdade dos dois triângulos de forças:

$$x = F_{3-4} = 1$$

3-2 - Cálculo de x pelo movimento da barra 2-4, que é um movimento de translação. A componente vertical do deslocamento do ponto 2 é igual à do ponto 4



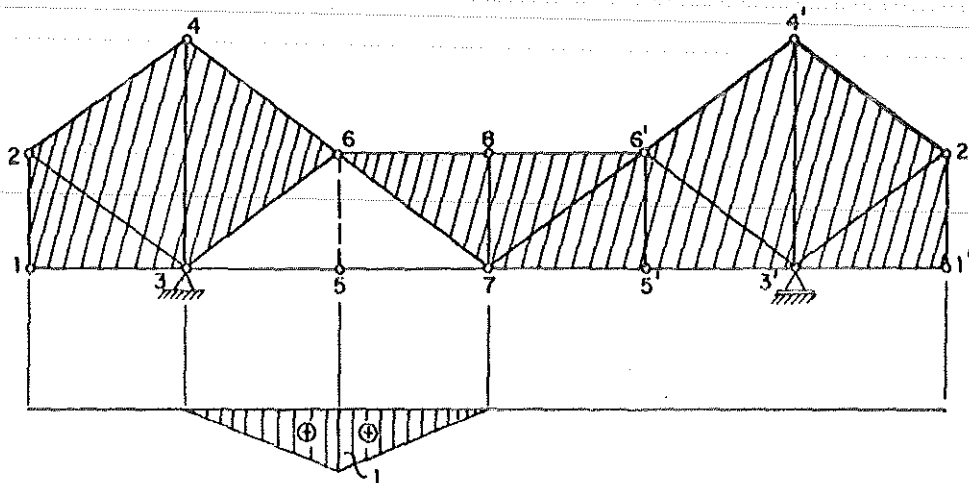
Portanto:

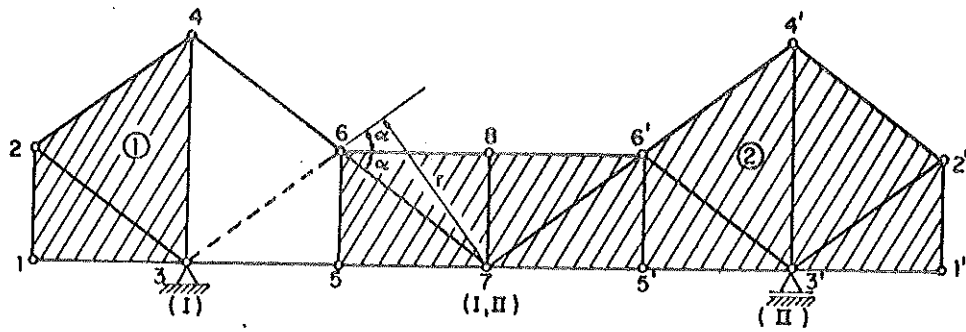
$$x = 1$$

4 - Linha de Influência de F_{7-8}

Pelo equilíbrio do nó 8 tem-se que $F_{7-8} = 0$ qualquer que seja a posição da carga no banzo inferior.

5 - Linha de Influência de F_{5-6}

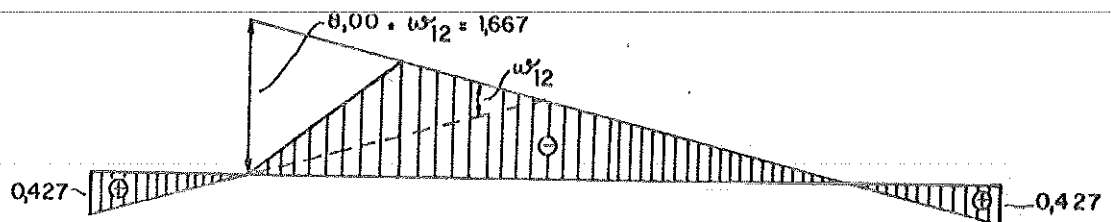
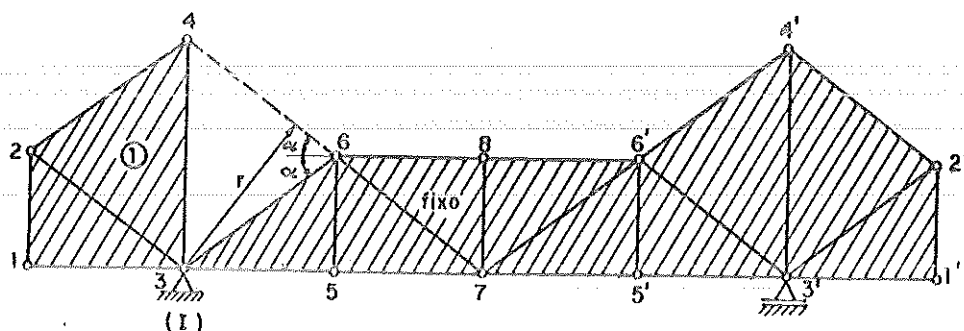


6 - Linha de Influência de F_{3-6} 

$$r = 5,0 \operatorname{sen} 2\alpha = 5,0 \cdot 2 \cdot 0,8 \cdot 0,6 = 4,8 \text{ m}$$

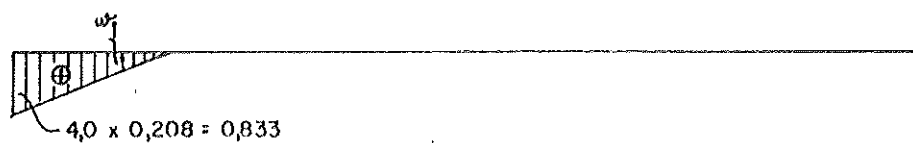
Pode-se calcular então o giro relativo entre as chapas 1 e 2:

$$w_{12} = \frac{1}{r} = \frac{1}{4,8} = 0,208 \text{ m}^{-1}$$

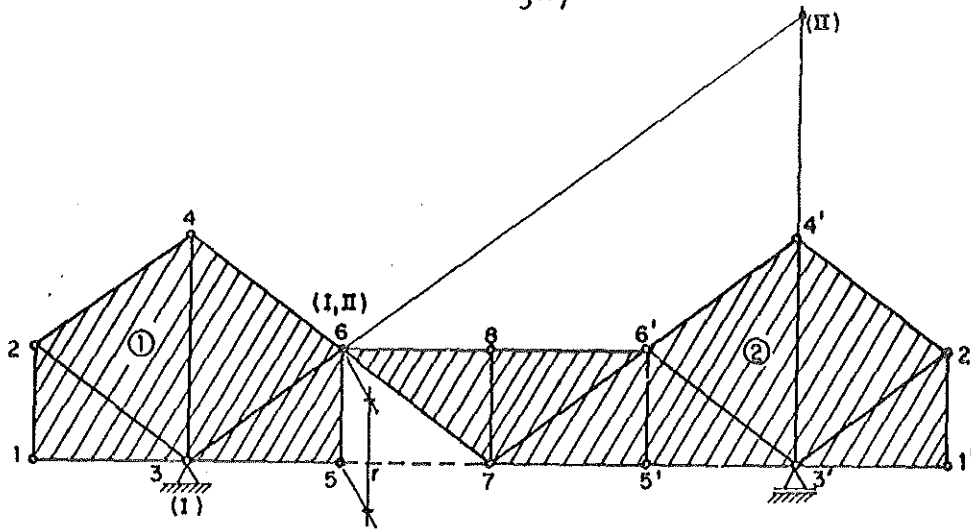
7 - Linha de Influência de F_{4-6} 

$$r = 5,0 \operatorname{sen} 2\alpha = 4,8 \text{ m}$$

$$w_1 = w_{12} = \frac{1}{r} = \frac{1}{4,8} = 0,208 \text{ m}^{-1}$$

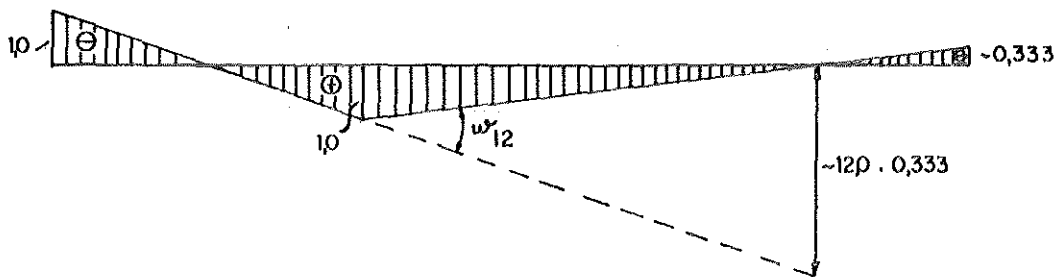


8 - Linha de Influência de F_{5-7}

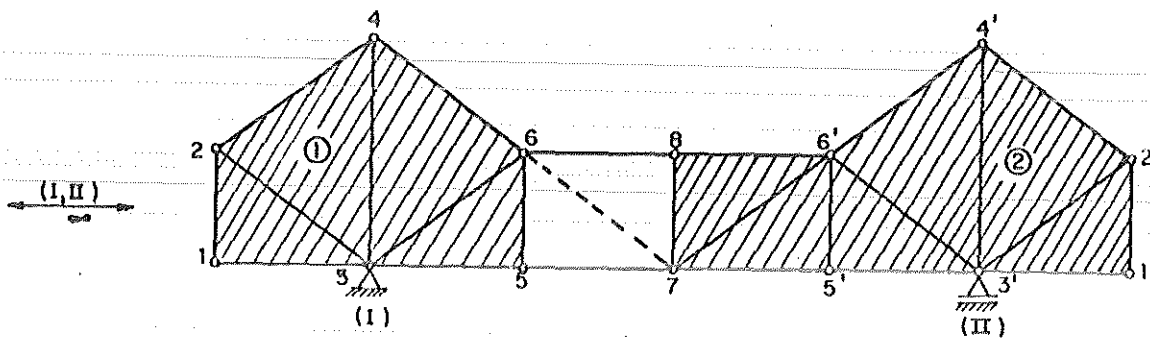


O giro relativo entre as chapas 1 e 2 é

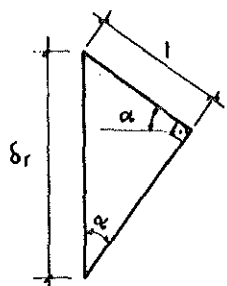
$$w_{12} = \frac{1}{r} = \frac{1}{3,00} = 0,333 \text{ m}^{-1}$$



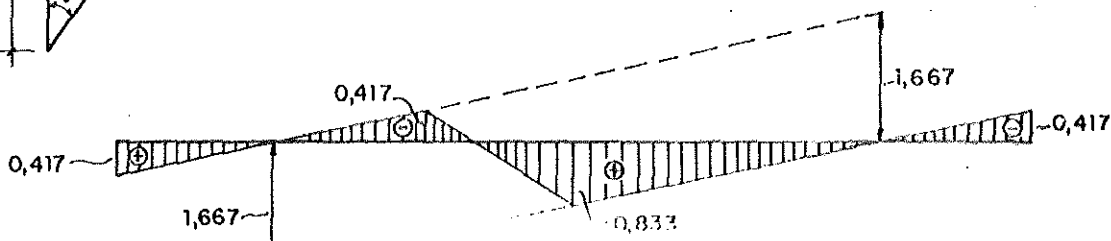
9 - Linha de Influência de F_{6-7}



O deslocamento relativo entre os nós 6 e 7 é vertical

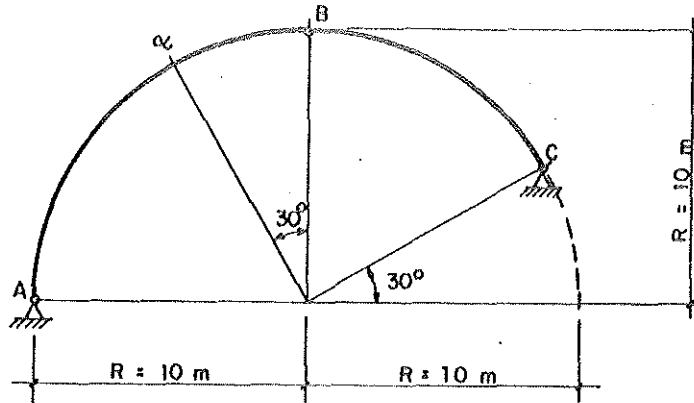


$$\delta_v = \frac{1}{\text{sen}\alpha} = \frac{1}{0,6} = 1,667$$



EXERCÍCIO 29 - Linhas de Influência de Estruturas Isostáticas
1 - Enunciado e dados

Determinar as linhas de influência para os esforços abaixo especificados no arco triarticulado de eixo circular da figura, para carga vertical.



Esforços:

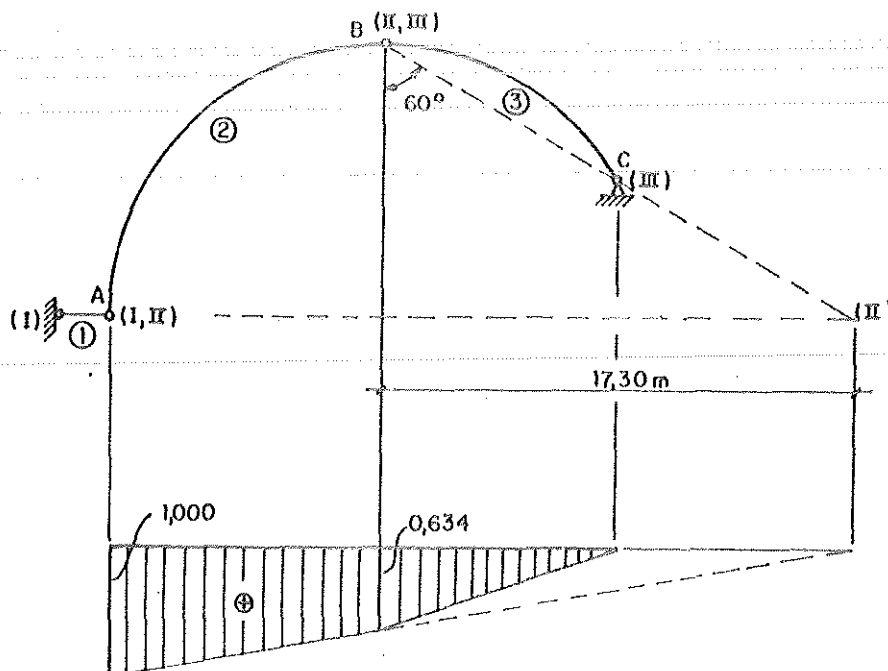
$$R_{VA}, R_{HA}$$

$$N_{\alpha}, N_B$$

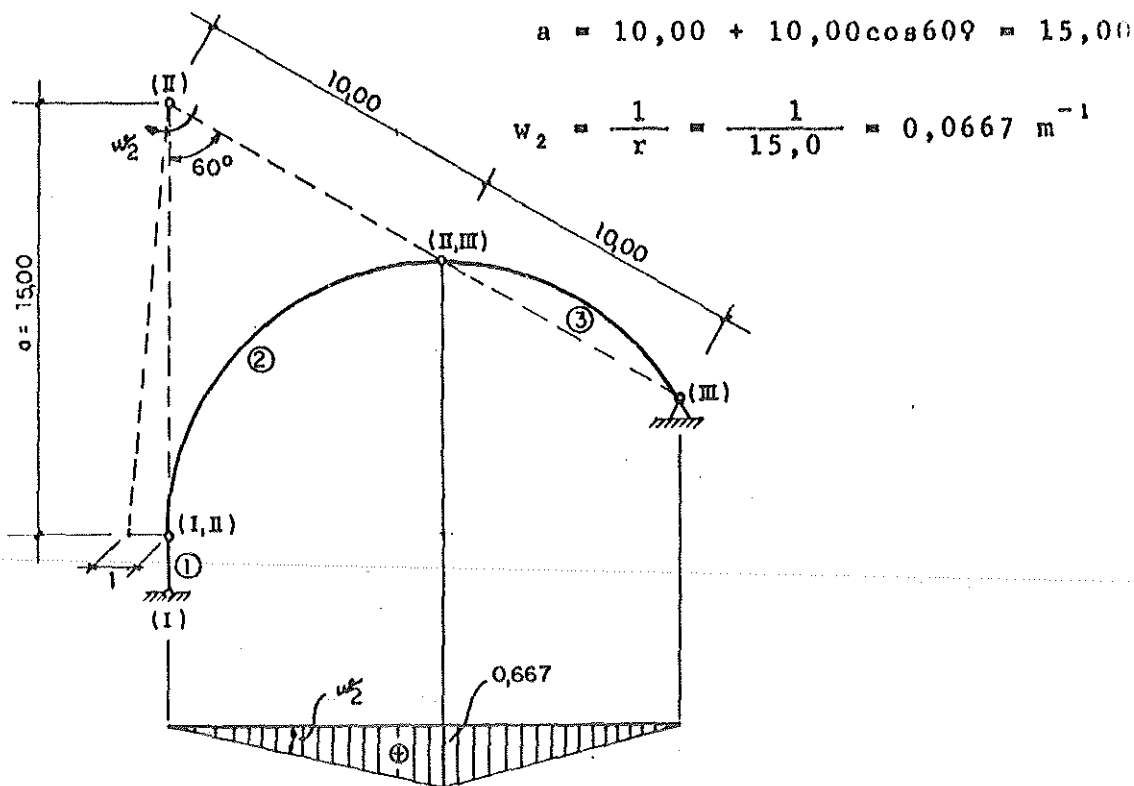
$$Q_{\alpha}, Q_B$$

$$M_{\alpha}$$

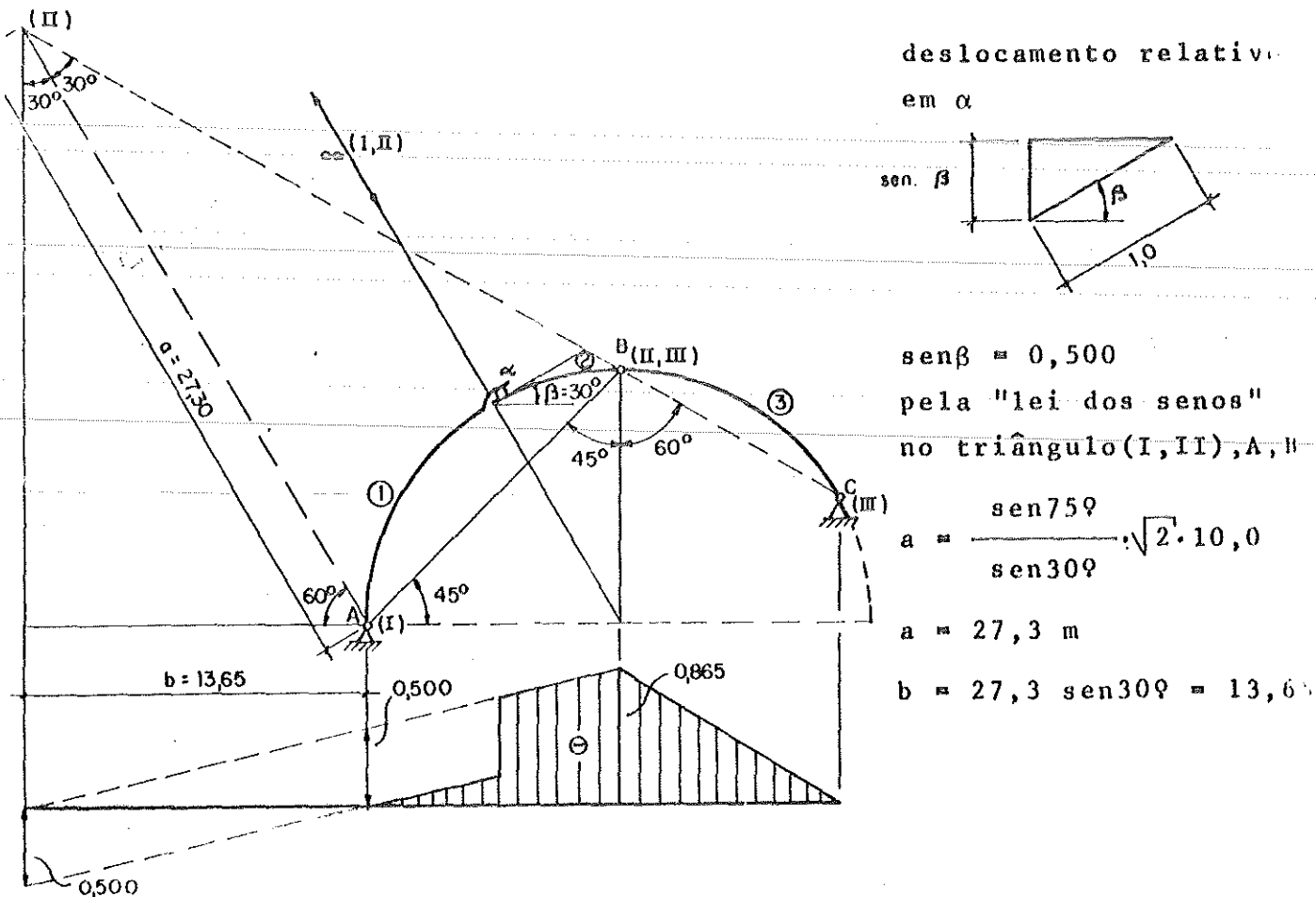
2 - Linha de Influência da reação vertical em A, R_{VA} (>0 para cima)



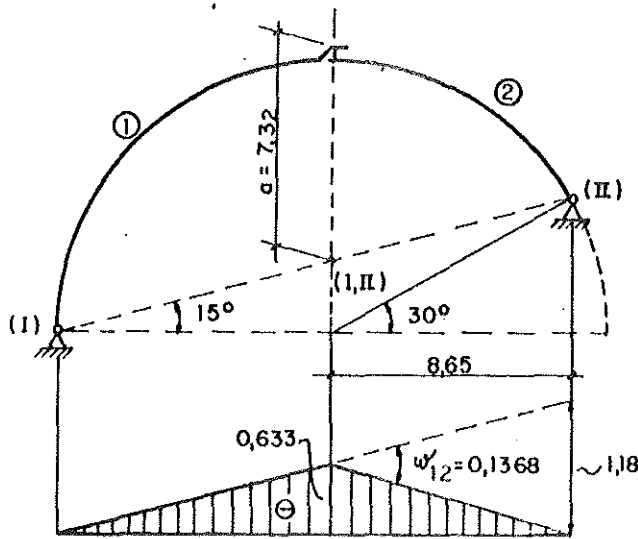
3 - Linha de Influência da Reação Horizontal em A, R_{HA} (>0 para dentro)



4 - Linha de Influência do Esforço Normal no Ponto α , N_α , (>0 de tração)



5 - Linha de Influência do Esforço Normal no ponto B, N_B , (>0 de tração)

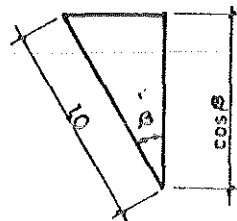


$$a = 10,0 - 10 \operatorname{tg} 15^\circ = 7,32 \text{ m}$$

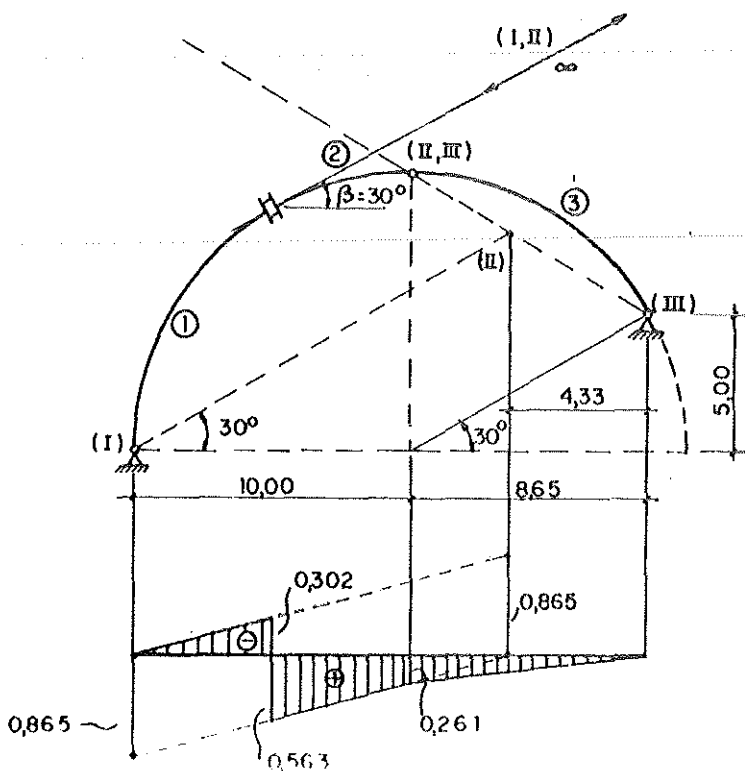
$$w_{12} = \frac{1}{a} = \frac{1}{7,32} = 0,1368 \text{ m}^{-1}$$

6 - Linha de Influência do Esforço Cortante no ponto α , Q_α (>0 se horário)

deslocamento relativo em α



$$\cos \beta = 0,865$$

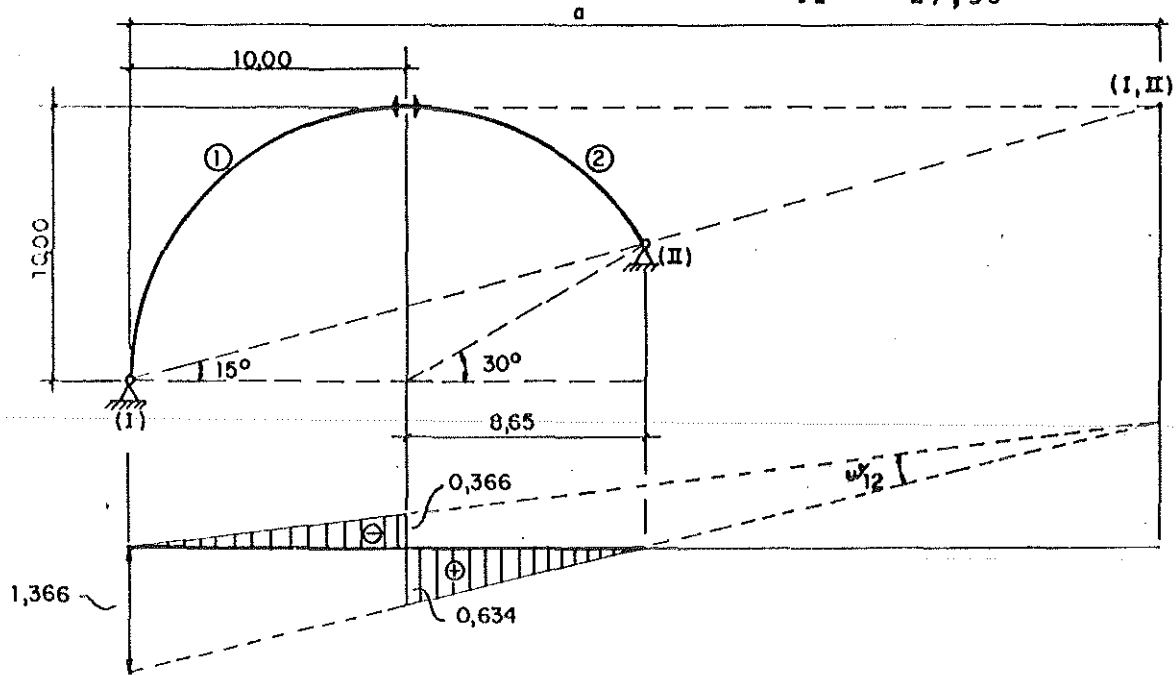


7 - Linha de Influência do Esfôrço Cortante no ponto B, Q_B , (>0 se horário)

$$t_g \ 15^\circ = \frac{10,0}{a}$$

$$a = \frac{10,0}{0,268} = 37,30 \text{ m}$$

$$w_{12} = \frac{1}{27,30} = 0,0366 \text{ m}^{-1}$$

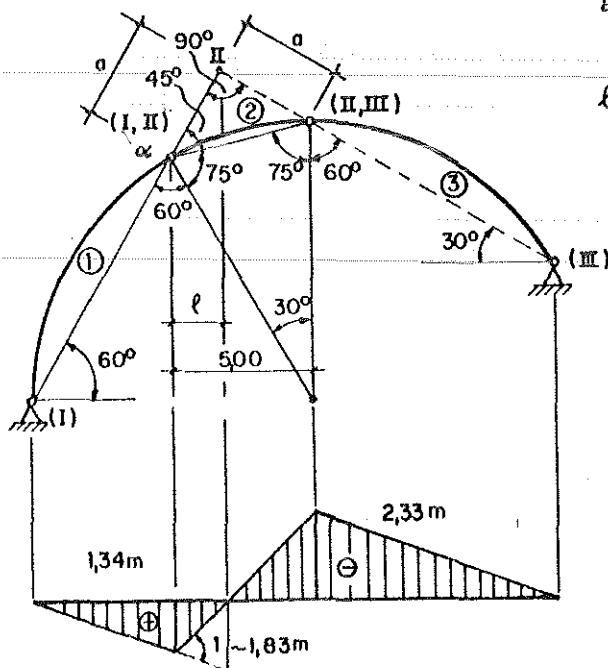


8 - Linha de Influência do Momento Fletor no ponto α , M_α , (>0 se provocar tração embaixo)

$$a(\cos 30^\circ + \cos 60^\circ) = 5,00$$

$$a = \frac{5,00}{1,365} = 3,66 \text{ m}$$

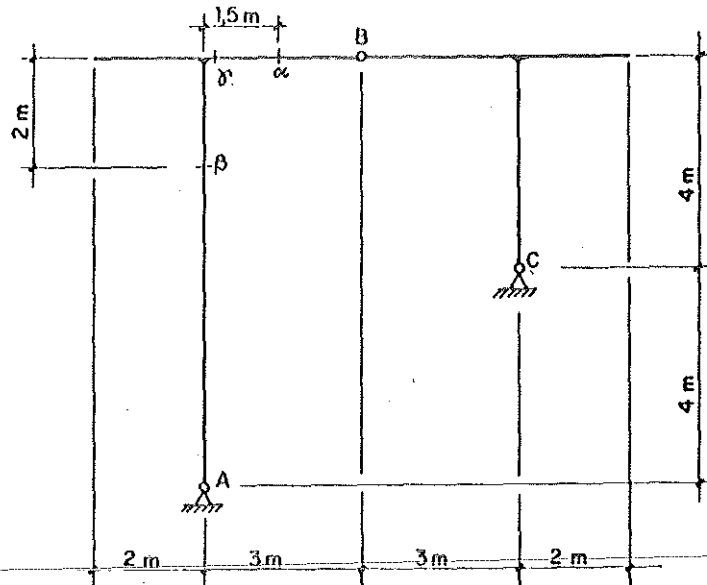
$$l = 3,66 \cos 60^\circ = 1,83 \text{ m}$$



EXERCÍCIO 30 - Linhas de Influência de Estruturas Isostáticas

1 - Enunciado e dados

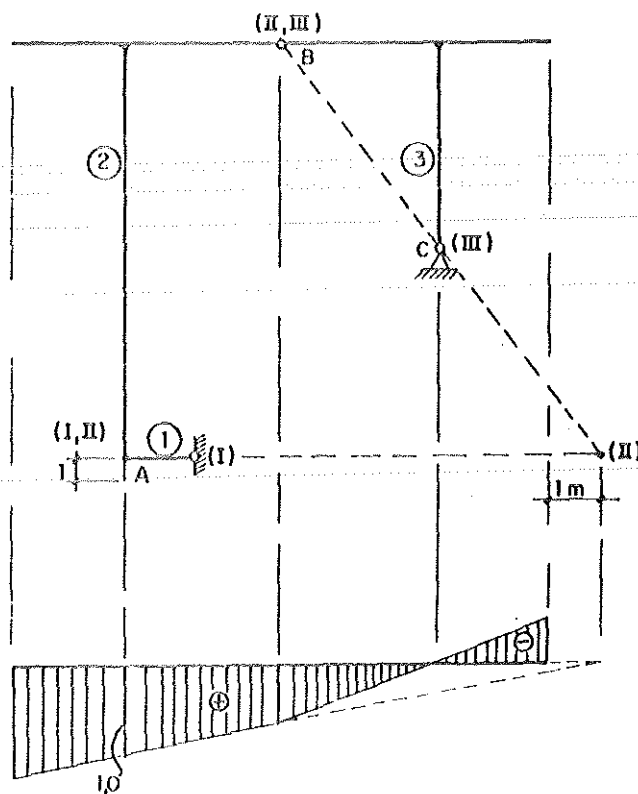
Determinar as linhas de influência para os esforços abaixo especificados no pórtico isostático da figura, para carga vertical percorrendo o banzo superior.



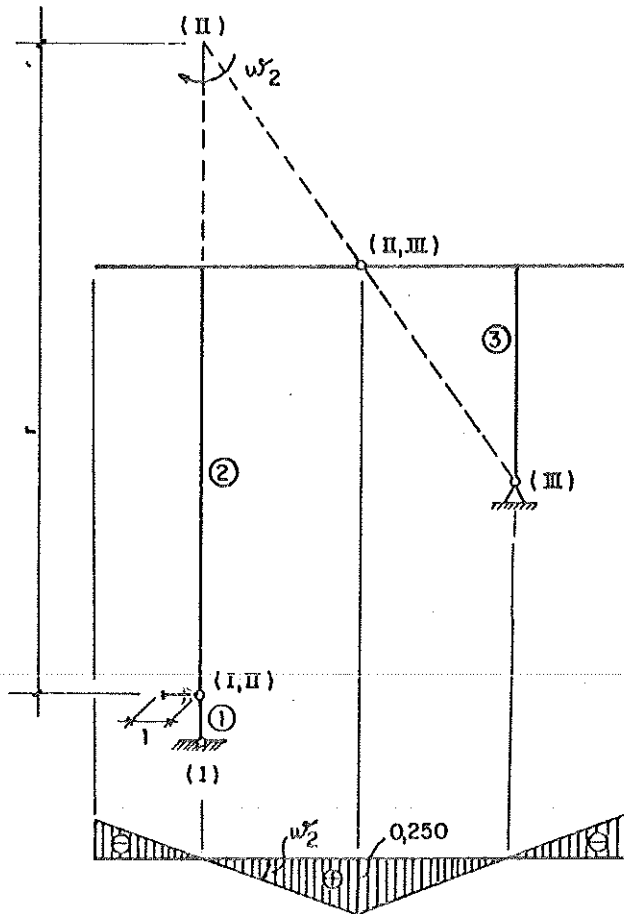
Serão traçadas as linhas de influência dos esforços:

$$R_{VA}, R_{HA}, M_{\alpha}, M_{\beta}, M_{\gamma}, N_{\alpha}, N_{\beta}, N_B, Q_{\alpha}, Q_{\beta}, Q_B$$

2 - Linha de Influência da reação vertical em A, R_{VA} (>0 para cima)



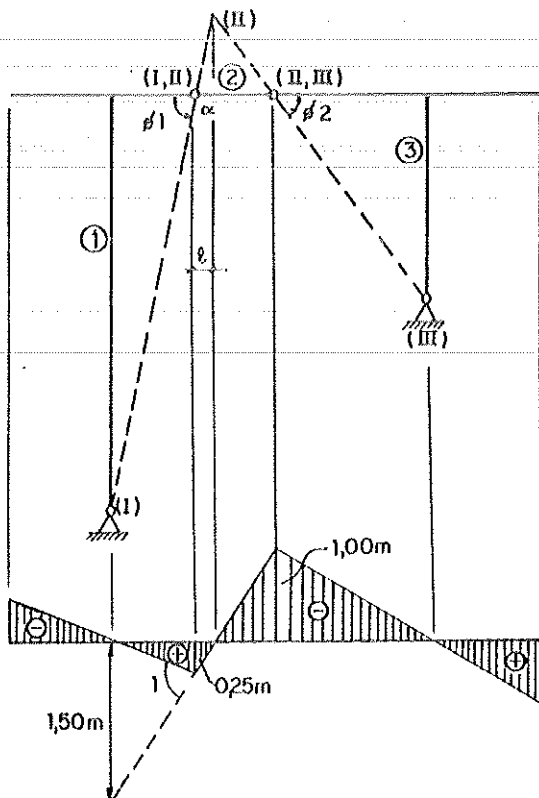
3 - Linha de Influência da reação horizontal em A (>0 para a direita)



$$r = 12,0 \text{ m}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{r} = \frac{1}{12,0} = 0,0833 \text{ m}^{-1}$$

4 - Linha de Influência do momento fletor em α, M_α , (>0 se provoca tração embaixo)



$$\text{tg} \phi_1 = \frac{8}{1,5}$$

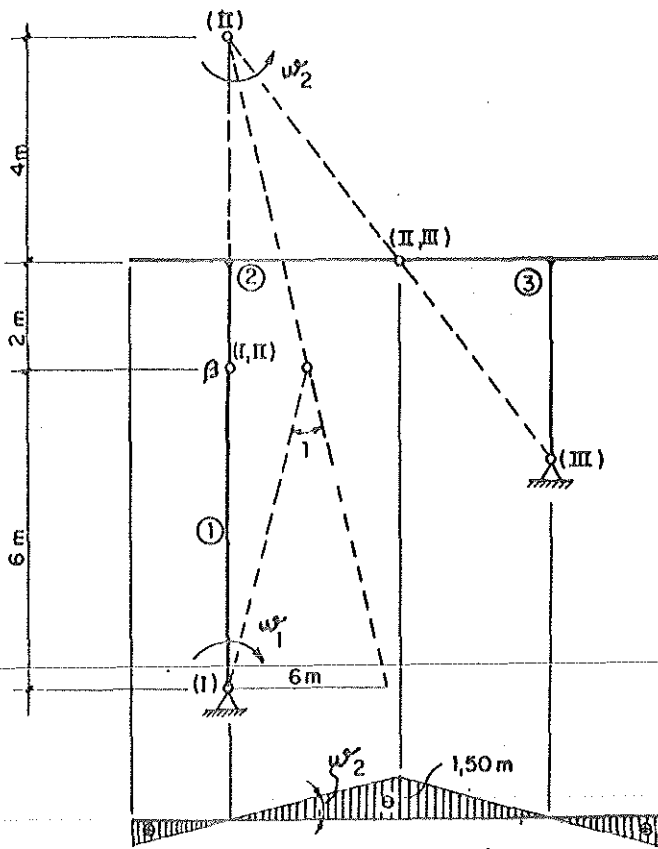
$$\text{tg} \phi_2 = \frac{4}{3}$$

$$\ell \text{tg} \phi_1 = (1,50 - \ell) \text{tg} \phi_2$$

$$\ell \left(\frac{\text{tg} \phi_1}{\text{tg} \phi_2} + 1 \right) = 1,50$$

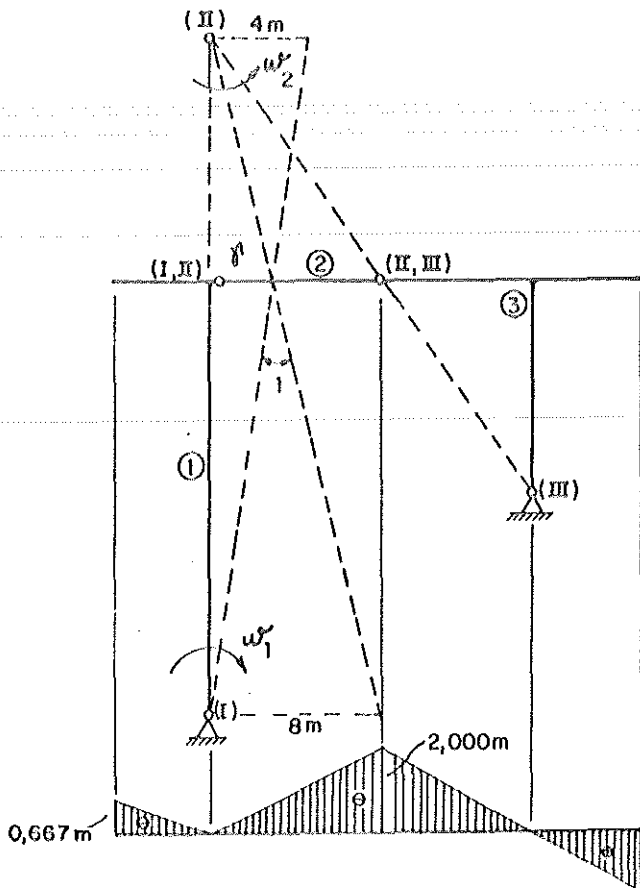
$$\ell = \frac{1,50}{4 + 1} = 0,3 \text{ m}$$

5 - Linha de Influência do momento fletor em β, M_β , (>0 se provoca tração no lado interno)



$$w_2 = \frac{3}{6} = 0,5 \text{ m}^{-1}$$

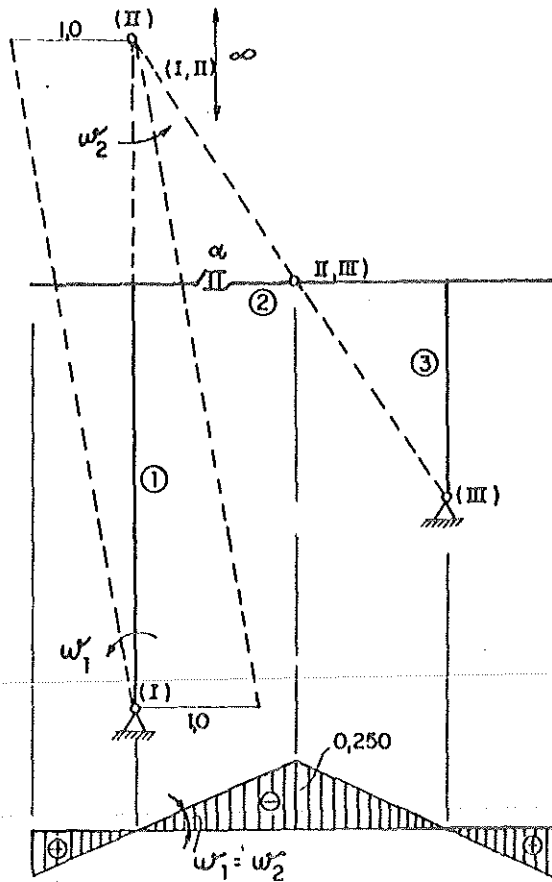
6 - Linha de Influência do momento fletor em γ, M_γ , (>0 se provoca tração embaixo)



$$w_1 = \frac{4}{12} = 0,333 \text{ m}^{-1}$$

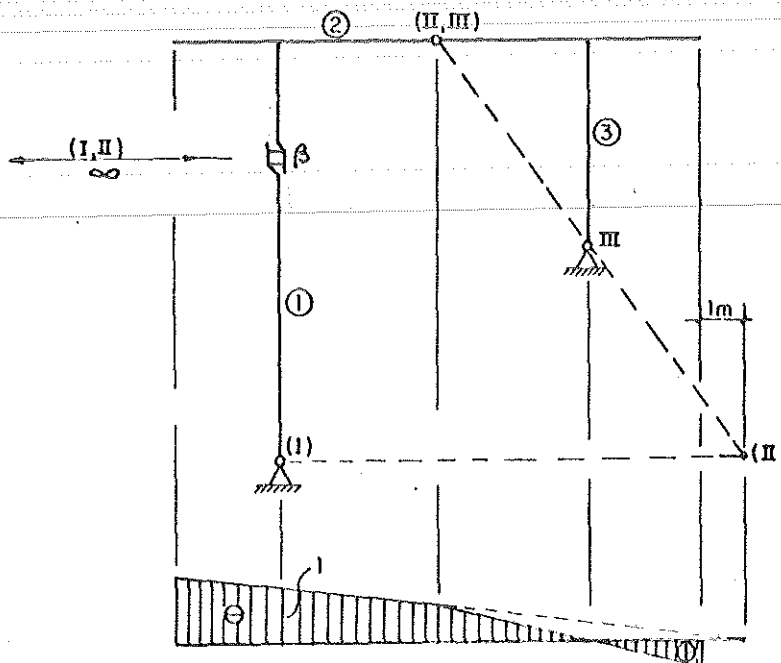
$$w_2 = \frac{8}{12} = 0,667 \text{ m}^{-1}$$

7 - Linha de Influência do esforço normal em α (>0 se de tração)

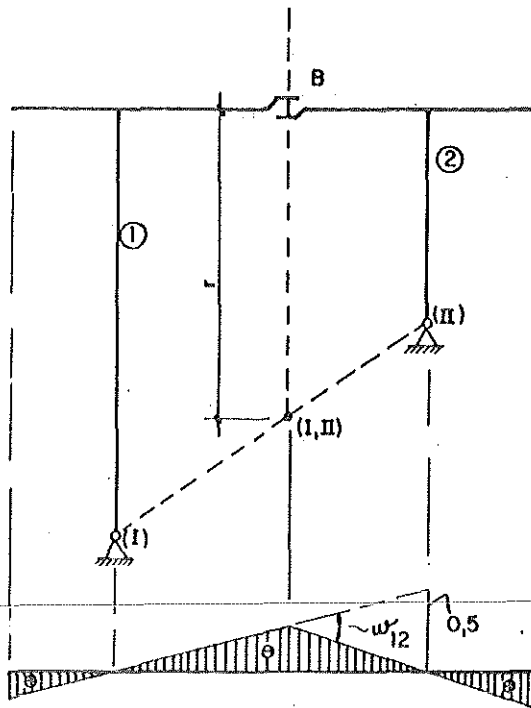


$$w_1 = w_2 = \frac{1}{12} = 0,0833 \text{ m}^{-1}$$

8 - Linha de Influência do esforço normal em β, N_β , (>0 se de tração)



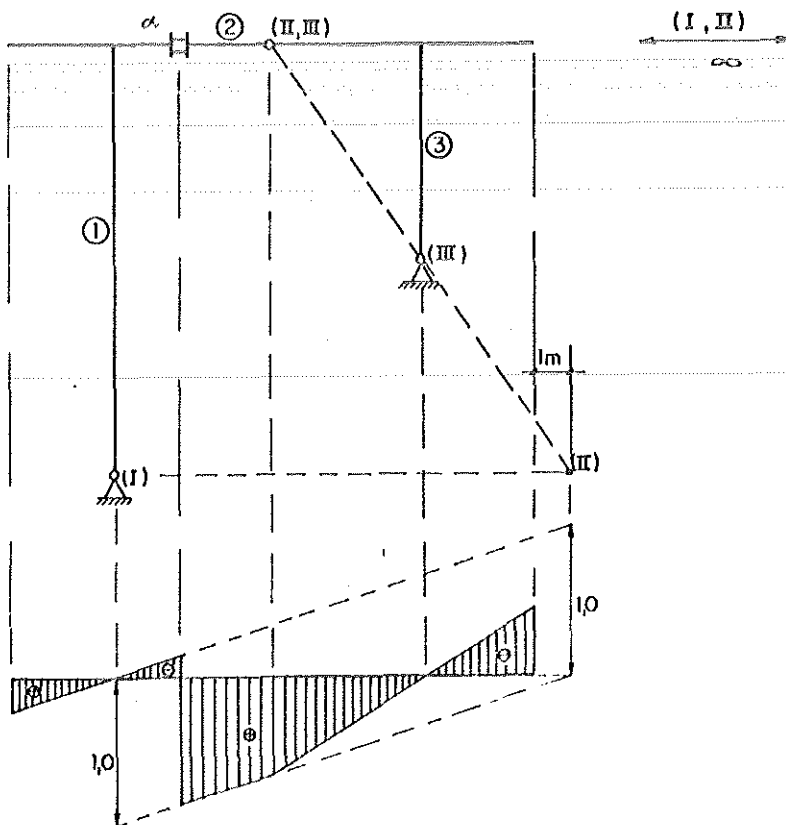
9 - Linha de Influência do esforço normal em B, $N_B (>0$ se de tração)



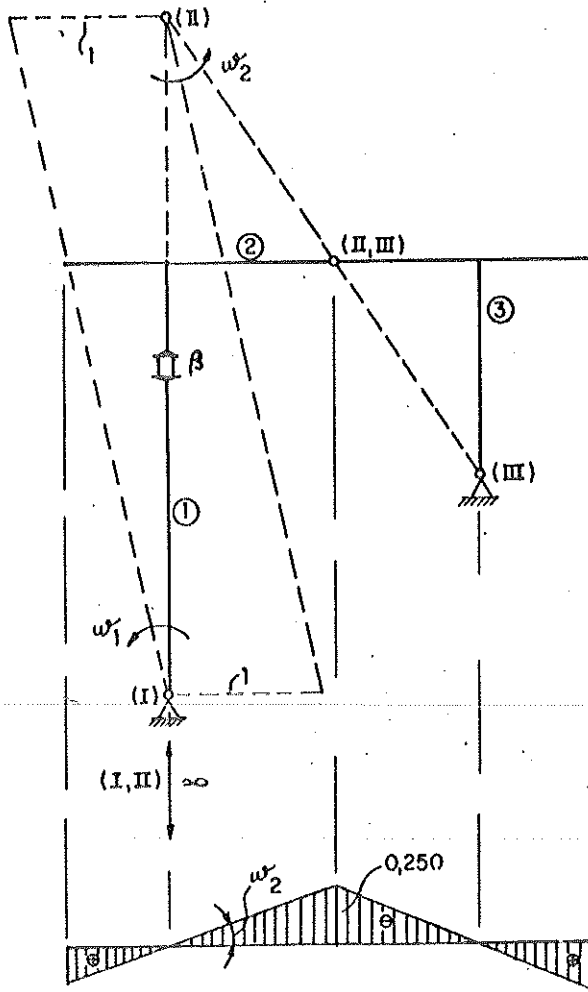
$$r = 6 \text{ m}$$

$$w_{12} = \frac{1}{6} = 0,167 \text{ m}^{-1}$$

10 - Linha de Influência da força cortante em α , $Q_\alpha (>0$ se horário)

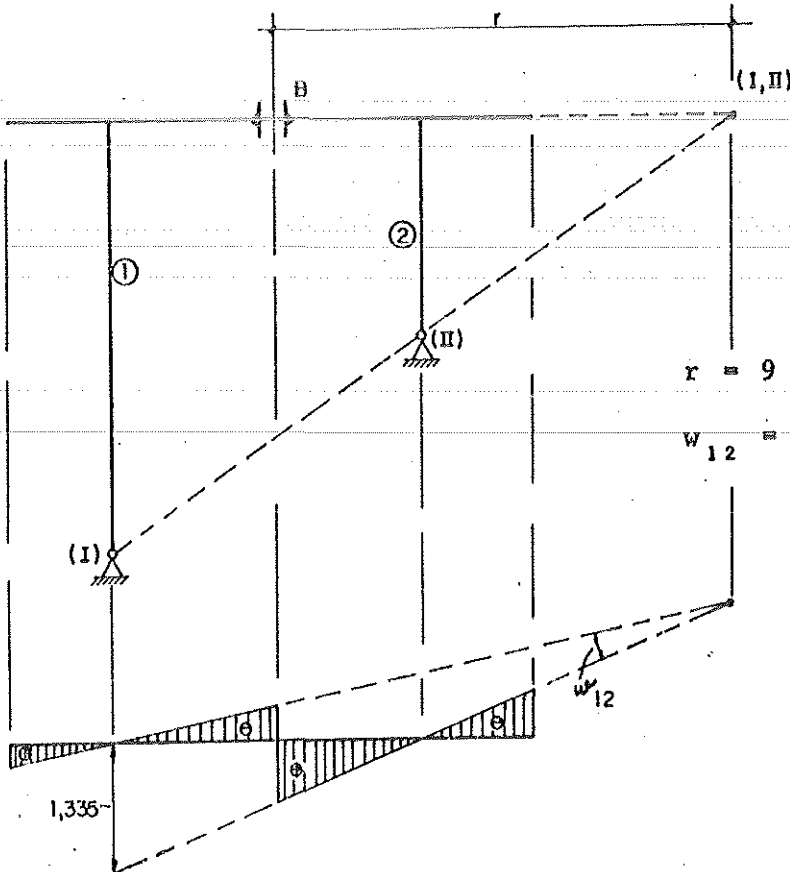


11 - Linha de Influência de esforço cortante em $\beta, Q_\beta, (>0$ se horário)



$$w_1 = w_2 = \frac{1}{12} = 0,0833 \text{ m}^{-1}$$

12 - Linha de Influência do esforço cortante em $B, Q_B, (>0$ se horário)



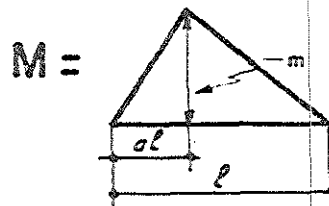
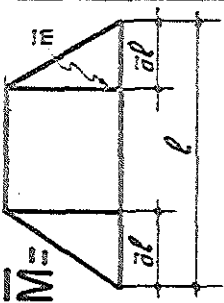
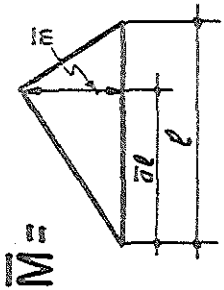
$$r = 9 \text{ m}$$

$$w_{12} = \frac{1}{r} = \frac{1}{9,0} = 0,1111 \text{ m}^{-1}$$

TABELA I - INTEGRAIS DE PRODUTOS DE DUAS FUNÇÕES						
Número	$\varphi(x) = \alpha$		α	α	par. quadrática $\frac{l}{2} \gamma$	par. quad. α
	0	$\int_0^l [\varphi(x)]^2 dx = l\alpha^2$		$l\frac{1}{3}\alpha^2$	$l\frac{1}{3}(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$	$l\frac{8}{15}\gamma^2$
1	Número	I	II	III	IV	V
1	$f(x) =$ l	$l\frac{1}{2}\alpha\alpha$	$l\frac{1}{3}\alpha\alpha$	$\int_0^l f(x)\varphi(x) dx =$ $l\frac{1}{6}a(2\alpha + \beta)$	$l\frac{1}{3}a\gamma$	$l\frac{1}{4}a\alpha$
2	b	$l\frac{1}{2}b\alpha$	$l\frac{1}{6}b\alpha$	$l\frac{1}{6}b(\alpha + 2\beta)$	$l\frac{1}{3}b\gamma$	$l\frac{1}{12}b\alpha$
3	b	$l\frac{1}{2}(a+b)\alpha$	$l\frac{1}{6}(2a+b)\alpha$	$l\frac{1}{6}[a(2\alpha + \beta) + b(\alpha + 2\beta)]$	$l\frac{1}{3}(a+b)\gamma$	$l\frac{1}{12}(3a+b)\alpha$
4	paráb. quad. b	$l\frac{1}{3}a\alpha$	$l\frac{1}{4}a\alpha$	$l\frac{1}{12}a(3\alpha + \beta)$	$l\frac{1}{5}a\gamma$	$l\frac{1}{5}a\alpha$
5	par. quad. b	$l\frac{1}{3}b\alpha$	$l\frac{1}{12}b\alpha$	$l\frac{1}{12}b(\alpha + 3\beta)$	$l\frac{1}{5}b\gamma$	$l\frac{1}{30}b\alpha$
6	par. quad. b	$l\frac{2}{3}a\alpha$	$l\frac{5}{12}a\alpha$	$l\frac{1}{12}a(5\alpha + 3\beta)$	$l\frac{7}{15}a\gamma$	$l\frac{3}{10}a\alpha$
7	par. quad. b	$l\frac{2}{3}b\alpha$	$l\frac{1}{4}b\alpha$	$l\frac{1}{12}b(3\alpha + 5\beta)$	$l\frac{7}{15}b\gamma$	$l\frac{2}{15}b\alpha$
8	par. quad. $\frac{l}{2}$ c	$l\frac{2}{3}c\alpha$	$l\frac{1}{3}c\alpha$	$l\frac{1}{3}c(\alpha + \beta)$	$l\frac{8}{15}c\gamma$	$l\frac{1}{5}c\alpha$
9	c	$l\frac{1}{2}c\alpha$	$l\frac{1}{4}c\alpha$	$l\frac{1}{4}c(\alpha + \beta)$	$l\frac{5}{12}c\gamma$	$l\frac{7}{48}c\alpha$
10	l c	$l\frac{1}{2}c\alpha$	$l\frac{2-\xi}{6}c\alpha$	$l\frac{1}{6}c[(2-\xi)\alpha + (1+\xi)\beta]$	$l\frac{1+\xi-\xi^2}{3}c\gamma$	$l\frac{1+\xi+\xi^2}{12}c\gamma$
11	par. cúbica b	$l\frac{1}{4}a\alpha$	$l\frac{1}{5}a\alpha$	$l\frac{1}{20}a(4\alpha + \beta)$	$l\frac{2}{15}a\gamma$	$l\frac{1}{6}a\alpha$
12	par. cúbica b	$l\frac{1}{4}b\alpha$	$l\frac{1}{20}b\alpha$	$l\frac{1}{20}b(\alpha + 4\beta)$	$l\frac{2}{15}b\gamma$	$l\frac{1}{60}b\alpha$

ou : : o ponto significa que a tangente à curva é horizontal

$a\ell$ = Distância do pico \bar{m} à extremidade mais próxima ao pico m



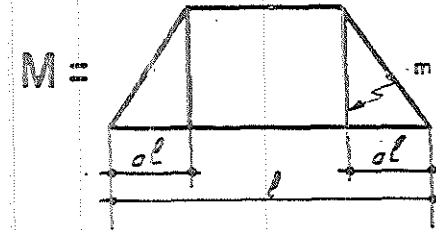
$a\ell$ = Distância do pico à extremidade mais próxima

INTEGRAL DO PRODUTO DE DUAS FUNÇÕES

$$\int_0^{\ell} \bar{M}M dx = K \bar{m}\ell$$

A tabela fornece os valores de K

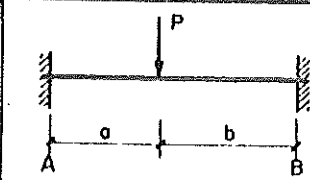
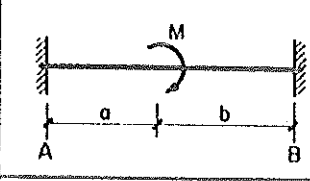
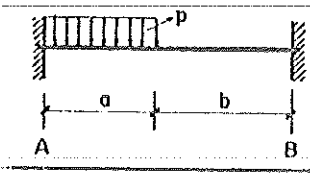
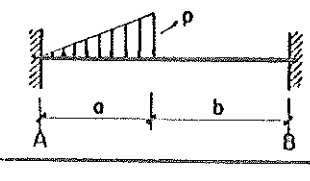
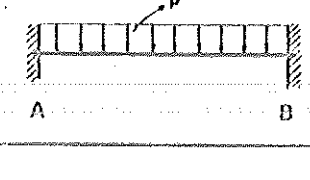
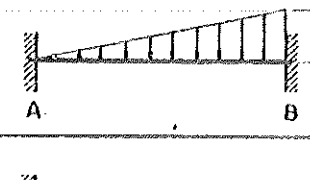
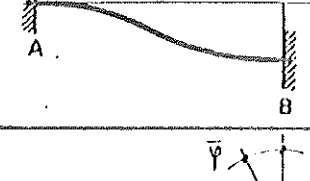
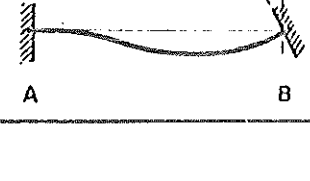
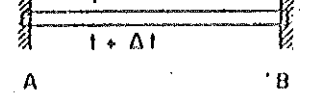
	$a = 1/2$	$a = 1/3$	$a = 1/4$	$a = 1/5$	$a = 2/5$	$a = 1/6$					
$\bar{a} = 1/2$	0,333	0,319	0,306	0,296	0,328	0,289					
$\bar{a} = 1/3$	0,319	0,333	0,329	0,322	0,331	0,317					
$\bar{a} = 2/3$	0,319	0,292	0,275	0,265	0,304	0,258					
$\bar{a} = 1/4$	0,306	0,329	0,333	0,331	0,321	0,328					
$\bar{a} = 3/4$	0,306	0,275	0,259	0,249	0,288	0,243					
$\bar{a} = 1/5$	0,296	0,322	0,331	0,333	0,313	0,332					
$\bar{a} = 2/5$	0,328	0,331	0,321	0,313	0,333	0,306					
$\bar{a} = 3/5$	0,328	0,304	0,288	0,278	0,315	0,271					
$\bar{a} = 4/5$	0,296	0,265	0,249	0,240	0,278	0,233					
$\bar{a} = 1/6$	0,289	0,317	0,328	0,332	0,306	0,333					
$\bar{a} = 5/6$	0,289	0,258	0,243	0,233	0,271	0,227	$a = 1/3$	$a = 1/4$	$a = 1/5$	$a = 2/5$	$a = 1/6$
$\bar{a} = 1/3$	0,426	0,417	0,403	0,392	0,423	0,383	0,556	0,604	0,626	0,507	0,639
$\bar{a} = 1/4$	0,458	0,453	0,444	0,435	0,456	0,428	0,604	0,667	0,697	0,548	0,713
$\bar{a} = 1/5$	0,473	0,470	0,464	0,458	0,472	0,452	0,627	0,697	0,733	0,567	0,754
$\bar{a} = 2/5$	0,394	0,381	0,365	0,354	0,389	0,346	0,507	0,548	0,567	0,467	0,577
$\bar{a} = 1/6$	0,482	0,479	0,475	0,471	0,481	0,467	0,639	0,713	0,754	0,577	0,778



MOMENTOS DE ENGASTAMENTO PERFEITO EM BARRAS PRISMÁTICAS (J = const.)

Convensão de Grinter

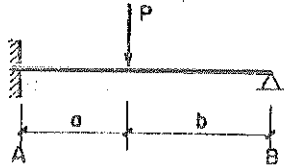
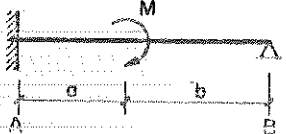
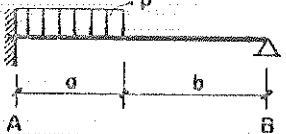
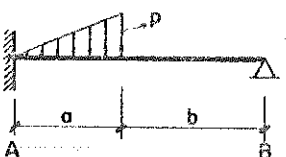
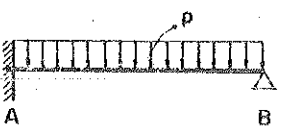
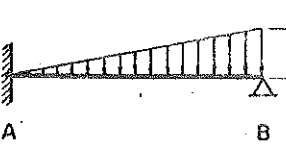
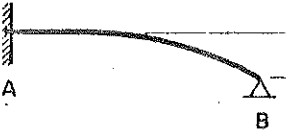

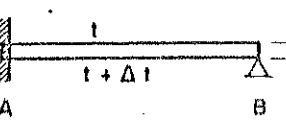
$l =$ vão da barra

	M_{AB}	M_{BA}
	$\frac{Pab^2}{l^2}$	$-\frac{Pa^2 b}{l^2}$
	$\frac{M b}{l^2} \cdot (3b - 2l)$	$-\frac{Ma}{l^2} \cdot (2l - 3a)$
	$\frac{pa^2}{12l^2} \cdot (6l^2 - 8la + 3a^2)$	$-\frac{pa^3}{12l^2} \cdot (4l - 3a)$
	$\frac{pa^2}{30l^2} \cdot (10l^2 - 15la + 6a^2)$	$-\frac{pa^3}{20l^2} \cdot (5l - 4a)$
	$+\frac{pl^2}{12}$	$-\frac{pl^2}{12}$
	$+\frac{pl^2}{30}$	$-\frac{pl^2}{20}$
	$+\frac{6EJ\bar{\Delta}}{l^2}$	$+\frac{6EJ\bar{\Delta}}{l^2}$
	$+\frac{2EJ\bar{\varphi}}{l}$	$+\frac{4EJ\bar{\varphi}}{l}$
	$+\frac{EJ}{h} \alpha_l \Delta l$	$-\frac{EJ}{h} \alpha_l \Delta l$

MOMENTOS DE ENGASTAMENTO PERFEITO EM BARRAS PRISMÁTICAS (J = const.)

Convenção de Grinter

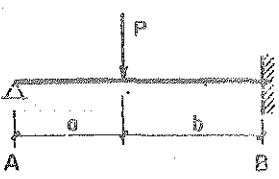
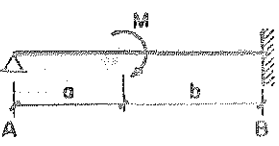
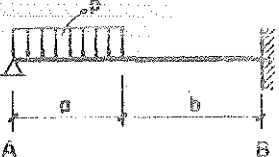
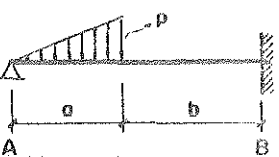
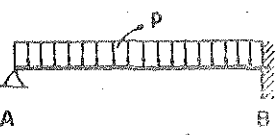
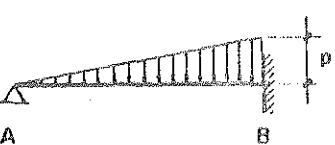
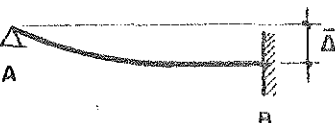
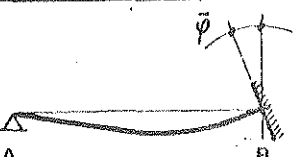
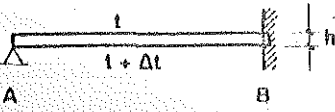
l = vão da barra

	M'_{AB}
	$\frac{Pab}{2} \frac{l+b}{l^2}$
	$\frac{M}{2l^2} \cdot (3b^2 - l^2)$
	$\frac{pa^2}{8l^2} \cdot (2l - a)^2$
	$\frac{pa^2}{120l^2} (40l^2 - 45la + 12a^2)$
	$+\frac{pl^2}{8}$
	$+\frac{7pl^2}{120}$
	$+\frac{3EJ\Delta}{l^2}$
	$-\frac{3EJ\phi}{l}$
	$+\frac{3EJ}{2h} \cdot \alpha_t \Delta t$

MOMENTOS DE ENGASTAMENTO PERFEITO EM BARRAS PRISMÁTICAS (J = const.)

Convenção de Grinter

l = vão da barra

	M'_{BA}
	$-\frac{Pab}{2} \frac{l+a}{l^2}$
	$-\frac{M}{2l^2} \cdot (l^2 - 3a^2)$
	$-\frac{pa^2}{8l^2} \cdot (2l^2 - a^2)$
	$-\frac{pa^2}{30l^2} \cdot (5l^2 - 3a^2)$
	$-\frac{pl^2}{8}$
	$-\frac{pl^2}{15}$
	$+\frac{3EJ\Delta}{l^2}$
	$+\frac{3EJ\bar{\varphi}}{l}$
	$-\frac{3EJ}{2h} \alpha_t \Delta t$