

ANÁLISE ESTÁTICA DAS PONTES CURVAS

Franco, Mario



ANÁLISE ESTÁTICA DAS PONTES CURVAS

Prof. Mario Franco

1. Introdução.

As exigências de traçado das modernas vias de comunicação levam cada vez mais frequentemente à necessidade de se construírem obras de arte curvas em planta. Onde o crescente interesse pela análise estática deste tipo de estrutura, que pode ser medido pelo grande número de trabalhos publicados a êste respeito nos últimos anos.

Os sistemas estruturais mais comumente utilizados nas pontes curvas são os seguintes:

1.1. Laje curva sustentada por vigas retas paralelas (fig.1)

Só empregado no caso de curvaturas muito fracas, apresenta como vantagem a simplicidade de sua geometria, do que decorre um custo comparável ao das pontes retas. Entretanto, tal sistema é de fracas qualidades estéticas.

1.2. Laje curva sustentada por vigas curvas paralelas (fig.1)

Êste sistema, como o anterior, só é empregado em pontes de grande raio de curvatura, devido à sua reduzida eficiência frente aos esforços de torção. Sua análise é, em princípio, análoga à das grelhas ortogonais, com as complicações decorrentes da curvatura em planta. Embora existam processos aproximados de cálculo (1) (2), é aconselhável o emprego de computador eletrônico através da aplicação de programas como o STRESS ou o STRUDL, que permitem levar em conta a solidarização das vigas entre si pela laje e pelas eventuais transversinas; as vigas curvas são então substituídas por vigas poligonais inscritas, devendo-se, como veremos adiante, ter cuidados no tocante à análise dos resultados, em virtude de tal aproximação.

* - A presente publicação resume aulas ministradas pelo Autor em 1975 na disciplina de pós-graduação "Atualização do Cálculo das Estruturas de Concreto Armado".

Nêste caso, como no anterior, a curvatura apresenta uma influência nula (1.1.) ou reduzida (1.2.), não se constituindo num problema específico. Sua análise não será abordada nêste artigo.

1.3. Vigas de secção celular. São largamente utilizadas nas pontes em curva, devido à sua grande rigidez à torção, aliada à eficiência na absorção dos momentos fletores, quer positivos, quer negativos, assumindo particular importância êstes últimos uma vez que, nas obras de pequeno raio de curvatura, a continuidade constitue um fator essencial de redução dos momentos torsores. Êste sistema estrutural será o tema central de nossas discussões. (Fig. 2 a 5).

2. Etapas da análise.

Dividiremos o estudo em duas etapas:

a) Determinação das reações de apoio e dos esforços solicitantes.

b) Estudo das tensões internas.

No primeiro dêstes capítulos, serão apresentados diversos processos de cálculo, com a indicação de suas vantagens, limitações e grau de aproximação. Quanto ao segundo, limitar-nos-emos a esboçar sua problemática, visto que tal assunto constitue o tema de outra palestra programada para êste seminário.

3. Reações de apoio e esforços solicitantes.

3.1. Generalidades. O problema da determinação das reações de apoio e dos esforços solicitantes tem merecido a atenção de inúmeros autores, a maioria dos quais abordou o mesmo, de forma rigorosa e dentro das hipóteses da Resistência dos Materiais, para o caso de vigas contínuas curvas, contidas em plano perpendicular às cargas, e tendo, em cada tramo, secção transversal e raio de curvatura constantes. Se por um lado as soluções são "exatas", as limitações geométricas impostas ao problema restringem consideravelmente sua aplicação. Com efeito, as imposições de traçado levam frequentemente a tramos de raio variável; e, por outro lado, o próprio andamento dos esforços solicitantes obriga os projetistas a preverem secções

transversais de geometria variável ao longo do eixo. Nessas condições, não é possível aplicar os referidos processos "exatos".

Outra abordagem, de grande generalidade e de precisão controlável, consiste no emprego de computadores digitais, através da substituição do eixo curvo da ponte por um eixo poligonal, geralmente inscrito; alguns cuidados são necessários na interpretação dos resultados, como veremos adiante.

Finalmente, é possível conseguir resultados suficientemente exatos através de um processo aproximado, proposto por diversos autores⁽³⁾ ⁽⁴⁾ em variantes ligeiramente diferentes entre si, e que apresenta vantagens de generalidade, rapidez de cálculo e fácil controle de todos os parâmetros intervenientes.

3.2. Os processos "exatos". Embora apresentando as limitações acima apontadas, oferecem, nos casos em que são aplicáveis, a vantagem de um cálculo relativamente simples através do emprego de tabelas e ábacos. São particularmente indicados nos casos de curvaturas acentuadas, quando, como veremos, os processos mais gerais têm precisão menor.

3.2.1. Processos analíticos. Citaremos o de Wittfoht⁽⁵⁾ e o de Vreden⁽⁶⁾.

3.2.1.1. Processo de Wittfoht. O referido autor aborda o problema da viga contínua curva de geometria e raio de curvatura constantes em cada tramo, sobre apoios rígidos à torção. O sistema fundamental é obtido praticando cortes nos apoios, com o que se transforma a estrutura numa série de vigas isoladas, apoiadas livremente à flexão e rigidamente à torção. Por meio de tabelas, calculam-se, em cada tramo isostático, os momentos fletores e de torção, bem como as rotações de apoio. A continuidade é restabelecida através da aplicação, nos apoios, de momentos fletores calculados através de um sistema de equações análogas à equação dos três momentos das vigas retas. Os esforços solicitantes são obtidos, obviamente, superpondo os da estrutura fundamental aos provenientes dos momentos hiperestáticos de flexão, cujo efeito é determinado por tabelas apresentadas pelo autor do trabalho.

3.2.1.2. Processo de Vredan. Consiste de um roteiro de cálculo que permite, dentro das mesmas limitações geométricas do anterior, resolver vigas contínuas curvas com apoios quer engastados à torção quer esféricos. No dizer do próprio autor, as equações que permitem determinar os esforços reativos e sollicitantes são apropriadas para uma programação prevendo uso de computador eletrônico; efetivamente, a ausência de tabelas de qualquer tipo obrigaria a um cálculo manual extremamente penoso, o que, a nosso ver, torna desaconselhável o emprego do processo, a não ser que tal programação seja efetivamente implantada.

3.2.2. Processos iterativos. Representam sem dúvida um passo no sentido da simplificação dos cálculos do tipo de estrutura em estudo, e permitem a consideração de apoios elásticos

3.2.2.1. Processo de Schulz⁽⁷⁾. Os apoios, neste processo, podem ser engastados ou livres, tanto à flexão como à torção; todos êles são inicialmente supostos bloqueados, calculando-se, mediante tabelas e ábacos:

-momentos fletores e torsões de engastamento perfeito em cada tramo;

-coeficientes de distribuição dos momentos fletores (para relaxação de um nó à flexão, mantendo-se os demais nós bloqueados) em cada apoio;

-coeficientes de distribuição dos momentos torsões (para relaxação de um nó à torção, mantendo-se os demais nós bloqueados) em cada apoio;

-coeficientes de transmissão para momentos fletores e torsões, de um apoio para os adjacentes, supostos bloqueados;

-coeficientes que ligam o momento fletor aplicado a um nó determinado, ao momento torsor que nêle aparece (óbvia-mente nesta situação o nó se encontra liberado à flexão e bloqueado à torção, entendendo-se que os nós adjacentes permanecem totalmente bloqueados);

-idem, ligando momento torsor aplicado, ao momento fletor que o mesmo causa no próprio nó, agora bloqueado à flexão e livre à torção.

Partindo, como dissemos, da estrutura totalmente bloqueada, procede-se à relaxação dos nós, um a um, alternadamente à flexão e à torção, até se conseguir a relaxação completa. É fácil, no cálculo dos coeficientes de distribuição, considerar a presença de apoios elásticos, quer à flexão, quer à torção.

Embora evidentemente o procedimento seja muito mais trabalhoso do que o método de Cross para vigas contínuas prismáticas, sua convergência é rápida.

3.2.2.2. Processo de Maffei⁽⁸⁾. É semelhante ao anterior, embora desenvolvido independentemente. Apresenta sobre aquele a vantagem de a compensação dos nós ser efetuada simultaneamente à flexão e à torção, o que o torna mais rápido. Por outro lado, embora sejam apresentadas numerosas tabelas com variação de 1º ou de 5º para o ângulo central do tramo, o emprego das mesmas é ligeiramente mais trabalhoso. Uma simplificação está sendo estudada pelo autor, o que virá a tornar o processo de aplicação bastante vantajosa.

3.3. O emprego de computadores digitais. A possibilidade de utilização de programas de cálculo como o STRESS e o STRUDL, que abriu novos horizontes no campo da análise das estruturas, torna viável a análise eletrônica das vigas contínuas curvas, como se verá a seguir. É possível, sem maiores dificuldades, levar-se em conta uma variação das características geométricas da seção transversal ao longo do eixo da estrutura, bem como do raio de curvatura dentro de um mesmo tramo; além disto, os apoios podem ser livres, engastados ou elásticos, quer à flexão quer à torção, não havendo limitações quanto ao tipo de carregamento. O procedimento é o seguinte:

3.3.1. Substitue-se o eixo curvo por um eixo poligonal inscrito, mantendo-se inalterados o carregamento e a geometria das seções. A análise eletrônica é levada a efeito para esta estrutura poligonal.

3.3.2. Ao se interpretarem os resultados, é preciso considerar o seguinte:

a) o pequeno ângulo formado, em cada nó, por um determinado lado da poligonal e pela tangente à estrutura inicial, pouco influe no valor do momento fletor no referido nó; basta observar, como o fizemos em diversas estruturas que analisamos com este processo, que é pequena a diferença entre o momento fletor à esquerda e o momento fletor à direita de um determinado nó; basta então, em cada nó, adotar a média aritmética entre os momentos fletores calculados na estrutura poligonal.

b) O mesmo não ocorre com relação aos momentos torsores, que são muito afetados por pequenas variações angulares do eixo. Isto se explica pela predominância dos momentos flectores em relação aos torsores, como se verifica na fig. 6. Para êstes últimos, pode-se afirmar sem grande êrro que os valores determinados na estrutura poligonal coincidem com os da estrutura curva, nos pontos onde há paralelismo entre as mesmas, o que em geral ocorre nos pontos médios dos lados do polígono. Basta então adotar, nêstes pontos, o momento torsor correspondente, calculado facilmente por interpolação linear a partir dos valores calculados para os extremos dos segmentos correspondentes. Os momentos torsores nos vértices da poligonal (e em particular nos apoios) são finalmente encontrados através da aplicação da equação

$$-\frac{dM_t}{ds} = \frac{M}{R} + m_t$$

adiante demonstrada, onde

M_t é o momento torsor numa secção de coordenada curvilínea s ,

M é o momento fletor na mesma secção,

R é o raio de curvatura, em planta, do eixo da viga na secção considerada, e

m_t é o momento torsor unitário aplicado à viga, na mesma secção.

Concluindo, é possível a análise de uma estrutura curva por meio de computador, através da substituição da mesma por outra, poligonal, desde que o número de divisões seja apropriado e que os resultados sejam corretamente interpretados. Geralmente, obtem-se bôa precisão com 4 ou 5 divisões por tramo, devendo-se aumentar êste número no caso de curvaturas muito acentuadas.

3.4. Um processo aproximado. É possível a determinação analítica dos esforços solicitantes numa viga contínua curva contida em plano perpendicular às cargas, através de um processo simplificado, que oferece bôa aproximação no caso, quasi sempre verificado em pontes, em que o angulo central (isto é, o angulo formado pelas perpendiculares ao eixo da viga passantes pelos apoios) de cada tramo, é suficientemente pequeno.

Diversos autores (4) (5) trataram do assunto, abordando diversos aspectos do mesmo. Adiante daremos um tratamento geral ao processo, para o caso, não citado na literatura, em que o momento de inércia à torção é variável. Estabeleceremos uma sistemática de cálculo, e daremos indicações acerca da precisão a ser esperada.

3.4.1. Hipótese fundamental. Supõe-se que, para ângulos centrais pequenos, os momentos fletores da estrutura curva são aproximadamente iguais aos que se obtêm calculando, para o mesmo carregamento, uma estrutura de mesma geometria e igualmente vinculada, porém retificada. Verifica-se que, para ângulos da ordem de 30° , o erro cometido é da ordem de 3%, êsso êste que passa a $\sim 10\%$ para ângulos de 60° . Ora, dificilmente se encontram pontes em que o raio de curvatura é menor do que o vão correspondente (caso em que o ângulo central é ligeiramente inferior a 30°), de modo que usualmente o processo é aplicável na quasi totalidade das estruturas curvas de pontes.

3.4.2. Equação diferencial fundamental. Uma vez conhecidos a priori os momentos fletores, calculados para a viga retificada por qualquer dos processos usuais aplicáveis a vigas de momento de inércia variável (incluindo nos mesmos o emprego de computador eletrônico), o problema passa a residir exclusivamente na determinação dos momentos de torção. A seguir deduziremos uma relação diferencial entre momentos fletores e torsões, que permitirá chegar ao cálculo dêstes últimos.

Estabeleçamos na viga curva uma coordenada curvilínea s , com origem numa das extremidades (por exemplo, a esquerda), da mesma. Analizando o equilíbrio de um elemento ds (fig. 7), submetido em suas secções s e $s + ds$ aos momentos fletores M e $M + dM$, e aos momentos torsões M_t e $M_t + dM_t$, e com momento torsor unitário m_t aplicado ao longo de seu comprimento ds , podemos escrever, a menos de diferenciais de ordem superior:

$$-\frac{dM_t}{ds} = \frac{M}{R} + m_t \quad (1)$$

Decorre imediatamente a expressão de M_t :

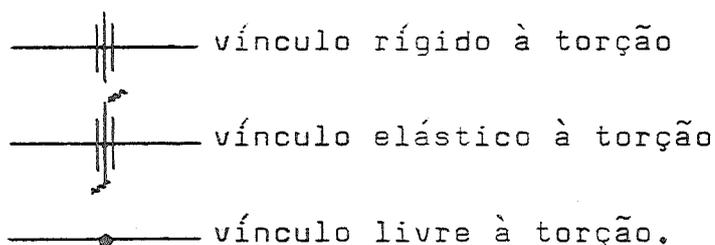
$$M_t = M_{ot} - \int_0^s \left(\frac{M}{R} + m_t \right) ds \quad (2)$$

onde M_t é o momento torsor em s , M_{ot} é o momento torsor, a determinar, na secção $s = 0$, e M , R e m_t são, respectivamente, o momento fletor, o raio de curvatura e o momento torsor unitário aplicado, na secção s .

A precisão da fórmula acima depende do grau de aproximação obtido na determinação de M , e é pouco sensível, devido à sua forma integral, aos erros, que como vimos são pequenos, cometidos no cálculo daquele esforço solicitante.

É necessário agora determinar M_{ot} e em seguida calcular M_t por meio de uma integração numérica.

3.4.3. Tipos de apoio. Vão de torção. A viga pode ser apoiada livremente, elásticamente ou rigidamente, tanto à flexão como à torção. No cálculo dos momentos flectores da viga retificada, sua vinculação à flexão já se supõe devidamente levada em conta, bastando daqui em diante considerar apenas os vínculos à torção, que representaremos com a seguinte convenção gráfica:



Definiremos vão de torção como sendo o trecho da viga compreendido entre dois apoios consecutivos, não se contando, para fins desta definição, os apoios livres intermediários. A viga fica assim subdividida num certo número de vãos de torção, como se mostra na fig. 8. Os vãos de torção serão definidos pelo símbolo L_{ti} . Estabelece-se para cada L_{ti} uma coordenada s_i tendo origem no apoio esquerdo do vão de torção, A integração de (2) será efetuada, como veremos adiante, separadamente para cada vão de torção.

3.4.4. Linhas de influência dos momentos torsores nos apoios. Apoios rígidos e elásticos à torção. O primeiro passo para realizar a referida integração consiste no cálculo dos M_{oti} , isto é, dos momentos torsores nos apoios esquerdos de cada vão de torção. Para tanto consideremos (fig.9) um vão genérico L_{ti} , supondo inicialmente que seus apoios sejam rígidos à torção. No que segue, eliminaremos, por simplicidade, o índice i .

Suponhamos que na secção de coordenada s seja aplicado o momento torsor concentrado de intensidade unitária indicado na fig. 9. Parte do mesmo é absorvida pelo trecho à esquerda do ponto de aplicação; seja ela ΔM_{ot} . A parte absorvida pelo trecho direito será $\Delta M_{st} = 1 - \Delta M_{ot}$. Sejam θ_o e θ_s as rotações que os quinhões de momento torsor provocariam em seus respectivos trechos, supondo que a barra seja cortada na secção considerada de coordenada s . As referidas rotações valem:

$$\theta_o = \int_0^s \frac{\Delta M_{ot}}{GJ_t} ds = \frac{\Delta M_{ot}}{G} \int_0^s \frac{ds}{J_t} \quad (3)$$

$$\theta_s = \frac{\Delta M_{st}}{G} \int_s^{L_t} \frac{ds}{J_t} = \frac{1 - \Delta M_{ot}}{G} \int_s^{L_t} \frac{ds}{J_t} \quad (4)$$

A compatibilidade de deslocamentos angulares requer que

$$\theta_o = \theta_s \quad (5)$$

o que conduz a:

$$\Delta M_{ot} = \frac{\int_s^{L_t} \frac{ds}{J_t}}{\int_0^{L_t} \frac{ds}{J_t}} = \frac{j_s}{j_o} \quad (6)$$

que nada mais é do que a expressão da linha de influência do momento de torção no apoio o . As integrais j_s e j_o podem ser facilmente calculadas numericamente pela regra dos trapézios.

O momento torsor M_{ot} é agora obtido a partir desta linha de influência, através de

$$M_{ot} = \int_0^{L_t} \left(\frac{M}{R} + m_t \right) \frac{j_s}{j_0} ds \approx \sum_0^{L_t} \left(\frac{M}{R} + m_t \right) \frac{j_s}{j_0} \Delta s \quad (7)$$

Uma vez conhecido, no trecho considerado, o valor de M_{ot} , os momentos torsores ao longo do mesmo são deduzidos numericamente através da equação (2). Supondo-se porém que alguns dos apoios inicialmente supostos rígidos sejam efetivamente elásticos, após calcularmos em cada vão de torção os M_{ot} , determinaremos por diferença os M_{st} . Teremos assim, em cada apoio, momentos de engastamento perfeito à torção que serão diferentes à esquerda e à direita do referido apoio. Supondo agora desbloqueado um determinado apoio (à torção, bem entendido), o momento desequilibrado distribuir-se-á parte para o trecho à esquerda, parte para o trecho à direita e parte para o próprio apoio elástico, proporcionalmente às respectivas rigidezes.

A rigidez à torção de um determinado vão de torção, ou seja "o momento torsor que, aplicado numa extremidade suposta livre, produz, nesta, uma rotação unitária", é dada por

$$K = \frac{G}{j_0} \quad (8)$$

como se deduz facilmente da observação de (3) e de (6).

Por outro lado, a rigidez do apoio será calculada a partir de suas características geométricas e mecânicas, não apresentando maior dificuldade sua determinação. Por exemplo, no caso de aparelho de apoio de neoprene, de planta retangular, temos

$$K_N = \frac{4 \left(\frac{b}{e_1} \right)^2 J_N}{n \cdot e_1} \quad (9)$$

sendo

- b a menor dimensão, em planta, do aparelho de apoio
- e_1 a espessura de uma das placas de neoprene
- n o número de placas de neoprene
- J_N o momento de inércia do aparelho em relação à tangente ao eixo da estrutura no apoio considerado. (9)

Nesta expressão, as unidades são o kgf e o cm.

Obviamente, quando um determinado vão de torção tiver uma extremidade livre, o que, por definição, só pode ocorrer no primeiro ou no último vão, o momento torsor no apoio livre será nulo, calculando-se o do outro apoio com (7), pondo-se $j_s = j_0$ se o apoio engastado for o esquerdo, e $j_s = -j_0$, em caso contrário.

3.4.5. Momentos torsores ao longo da viga. São encontrados, como dissemos, a partir de (2), após a determinação dos momentos de torção nos apoios. Mais uma vez, o cálculo numérico revela-se suficiente. De maneira geral, é aconselhável dividir cada tramo em 10 partes; quando um vão de torção contiver mais de um tramo, o mesmo terá 10 t divisões, sendo t o número de tramos do vão.

3.4.6. Precisão do processo. Como já dissemos, para ângulos internos inferiores a 30° , o erro máximo do processo é da ordem de 3%, valor perfeitamente tolerável. Para ângulos maiores, pode ser aconselhável introduzir uma correção, devida a Bretthauer e Nötzold⁽⁴⁾ que consiste em se calcular, para determinados casos de carga, a relação entre os momentos fletores da viga circular e os da viga retificada, quer para viga engastada num apoio e livre no outro, quer para viga biengastada à flexão. Para vigas contínuas, os autores aconselham a calcular o valor da correção dos momentos de apoio para cada tramo, como se os apoios fossem bloqueados, e em seguida adotar em cada apoio a média aritmética das correções dos tramos adjacentes. Em nossa opinião, todavia, o trabalho adicional não se justifica, sendo preferível, neste caso, o emprego de computador, como se viu em 3.3. De qualquer maneira, os ângulos superiores a 30° são extremamente raros nas pontes curvas.

A análise dos deslocamentos angulares efetuada em 3.4.4. supõe implicitamente a validade da teoria de Saint-Venant para a viga em estudo. Embora em se tratando de secção transversal delgada, o fato de a mesma ser fechada, o que sempre ocorre nas vigas de secção celular, assegura a franca predominância da torção de Saint-Venant, como veremos em 4.

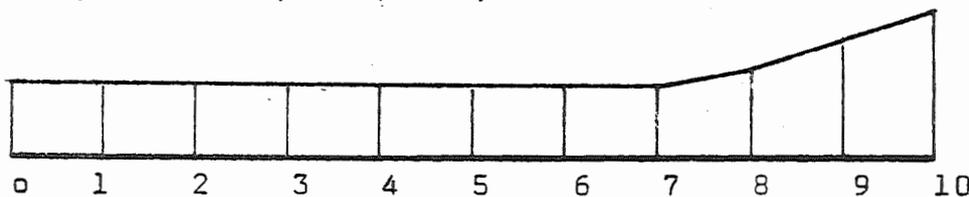
3.4.7. Damos a seguir, como exemplo numérico, o cálculo dos momentos de torção numa viga de secção variável, de 30 m de vão, suposta conhecida a lei de variação de $(\frac{M}{R} + m_t)$.

i	J_t	$1/J_t$	$2j_s$	j_s/j_o	$(\frac{M}{R} + m_t)$	$(\frac{M}{R} + m_t) \frac{j_s}{j_o}$	M_t
0	0,5	2,00	36,84	1,0000	0	0,0000	67
1	0,5	2,00	32,84	0,8914	0	0,0000	67
2	0,5	2,00	28,84	0,7829	0	0,0000	67
3	0,5	2,00	24,84	0,6743	5	3,3715	52
4	0,5	2,00	20,84	0,5657	10	5,6570	22
5	0,5	2,00	16,84	0,4571	10	4,5710	- 8
6	0,5	2,00	12,84	0,3485	10	3,4850	-38
7	0,5	2,00	8,84	0,2400	11	2,6400	-71
8	0,6	1,67	5,17	0,1403	12	1,6863	-107
9	0,8	1,25	2,25	0,0611	13	0,7943	-146
10	1,0	1,00	0,00	0,0000	12	0,0000	-182
Σ					83	22,2024	

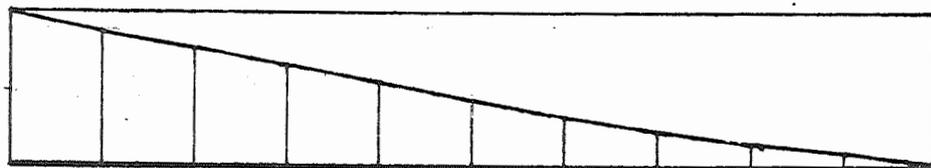
$L_t = 30 \text{ m} \quad s = 3 \text{ m}$

$M_{ot} = 22,2024 \times 3,00 \cong 67 \text{ tfm}$

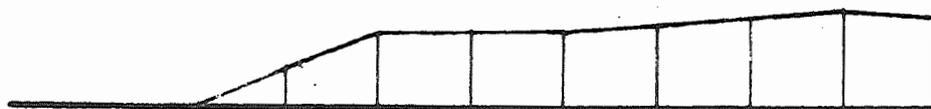
$M_{10t} = -(83,0000 - 22,2024) \times 3,00 \cong -182 \text{ tfm}$



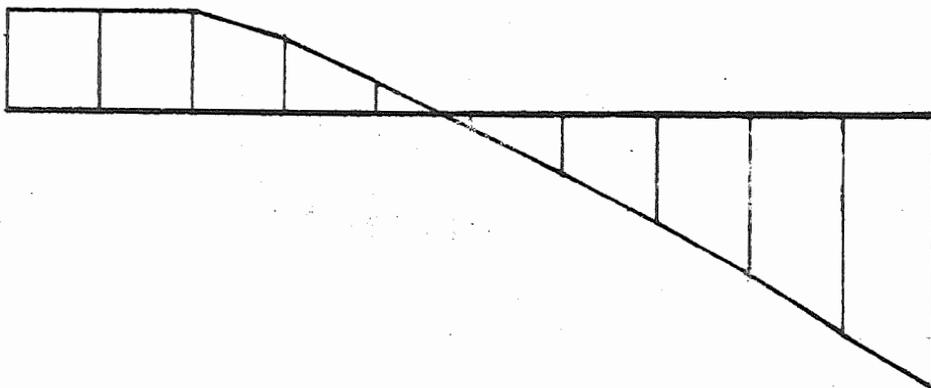
J_t



j_s/j_o
(linha de influencia de M_{ot})



$(\frac{M}{R} + m_t)$



M_t

3.5. Influência da protensão. Se a estrutura retificada for isostática, a protensão não influe nas reações de apoio, e portanto não altera o andamento dos momentos fletores. Sua influência nos momentos torsores pode ser analisada através da observação da fig.10, onde se apresenta um elemento curvo ds de raio R e de ângulo central $d\beta = ds/R$, indicando-se também a força N de protensão aplicada pelo cabo resultante com excentricidade e .

O momento fletor introduzido pela protensão é

$$M_p = - N \cdot e \quad (10)$$

O momento torsor unitário aplicado pelo cabo provém da força excêntrica unitária de intensidade n e de excentricidade e . Podemos escrever:

$$n = \frac{N}{R} \quad (11)$$

(fórmula dos tubos)

sendo o momento torsor unitário correspondente m_{tp} calculado por

$$m_{tp} = n \cdot e = \frac{N}{R} \cdot e \quad (12)$$

As expressões (10) e (12), introduzidas em (1) levam a:

$$- \frac{dM_{tp}}{ds} = \left(- \frac{N}{R} e + \frac{N}{R} e \right) = 0 \quad (13)$$

o que mostra que, neste caso, a protensão não influe nos momentos torsores.

Por outro lado, quando a estrutura retificada é hiperestática, a protensão introduz momentos hiperestáticos de flexão, os quais terão influência nos momentos torsores através de (3).

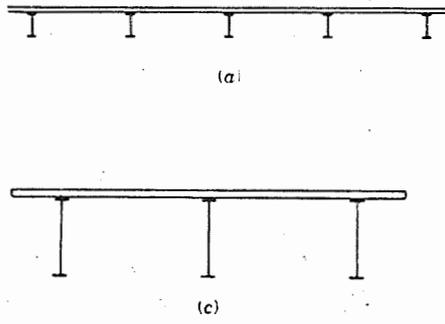


FIGURA 1

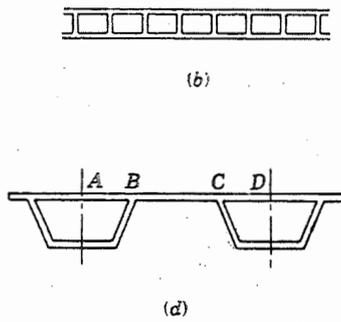


FIGURA 2

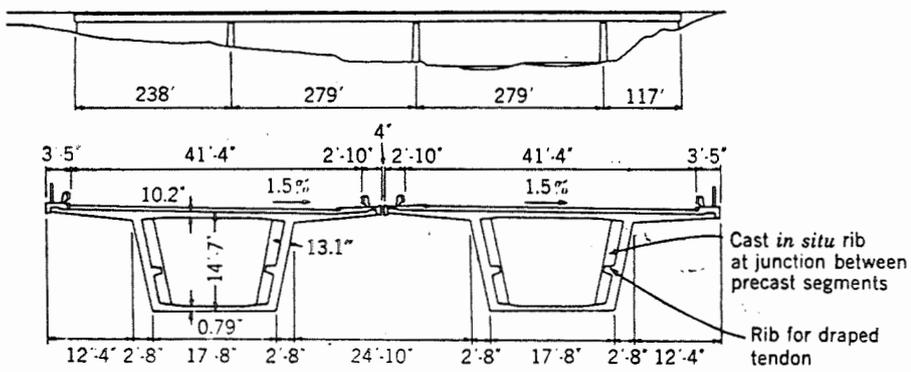


FIGURA 3

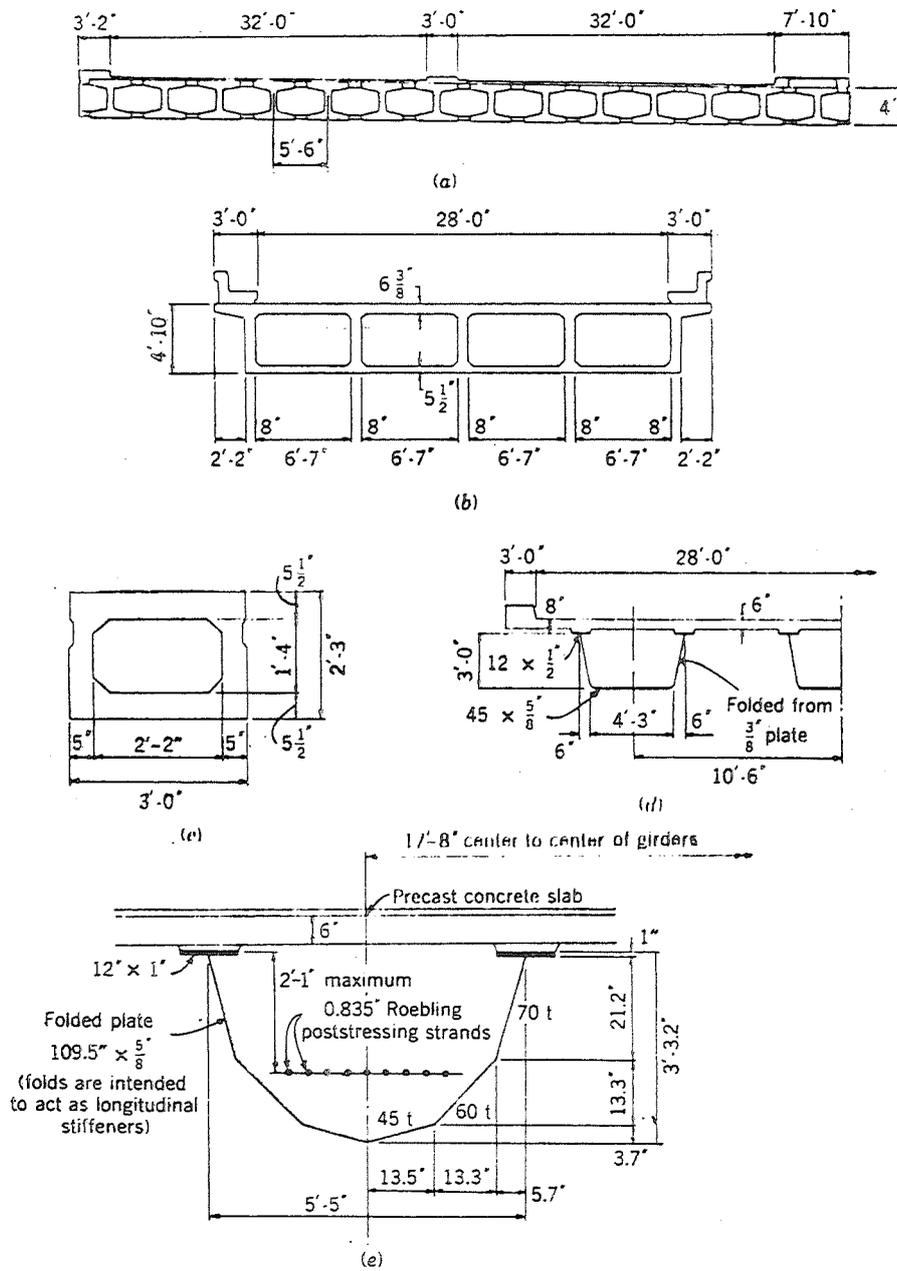


FIGURA 4

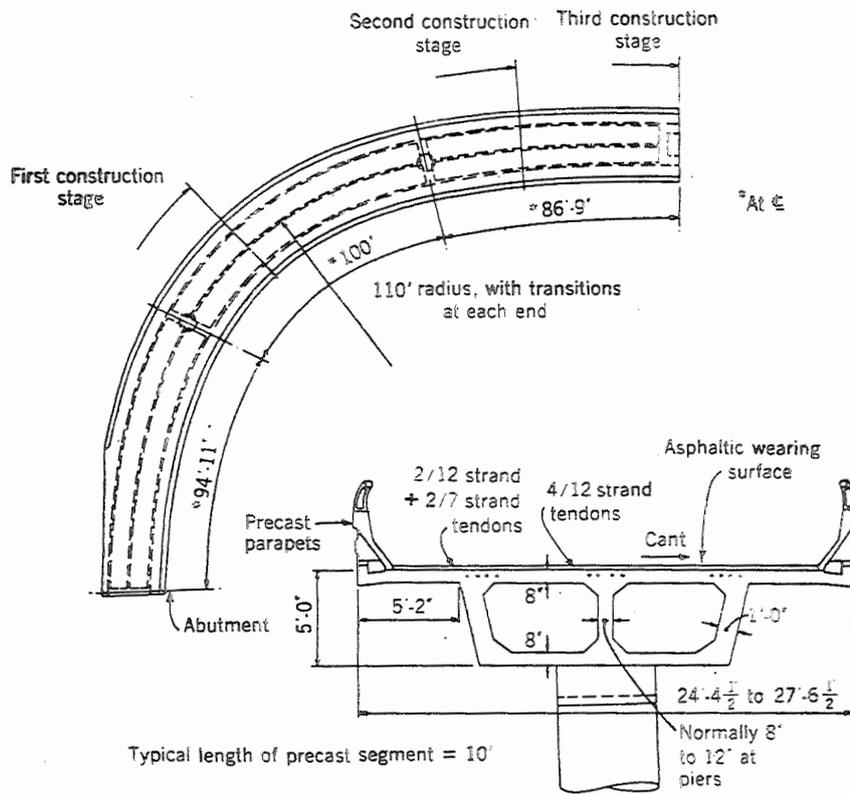
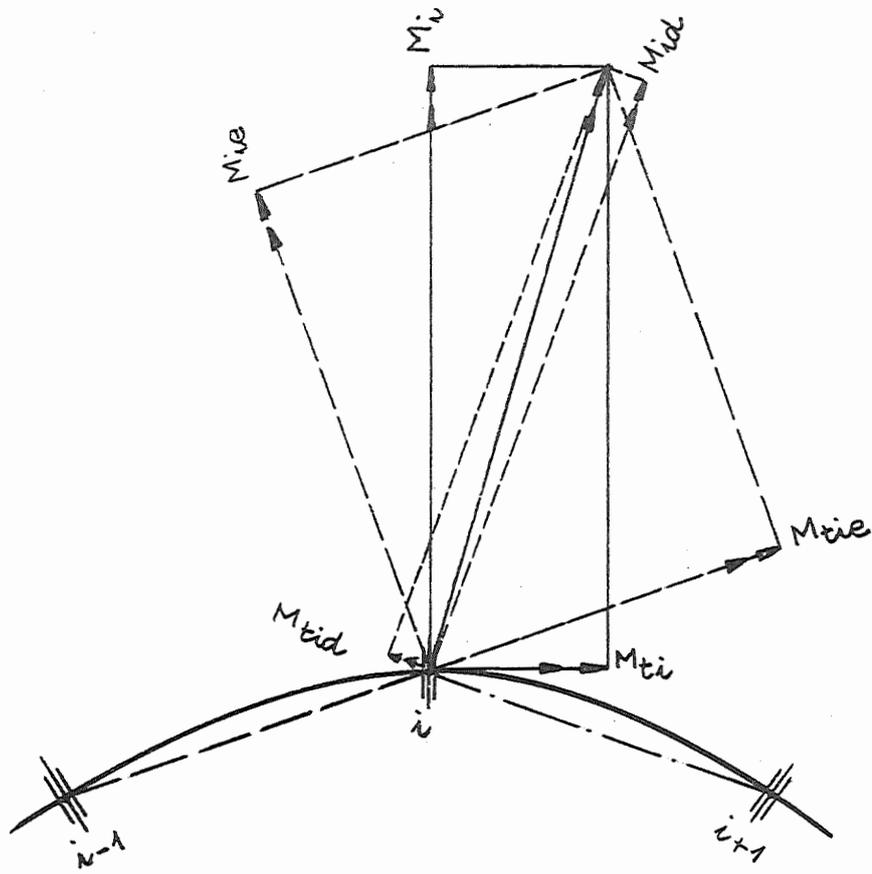


FIGURA 5

FIGURA 6

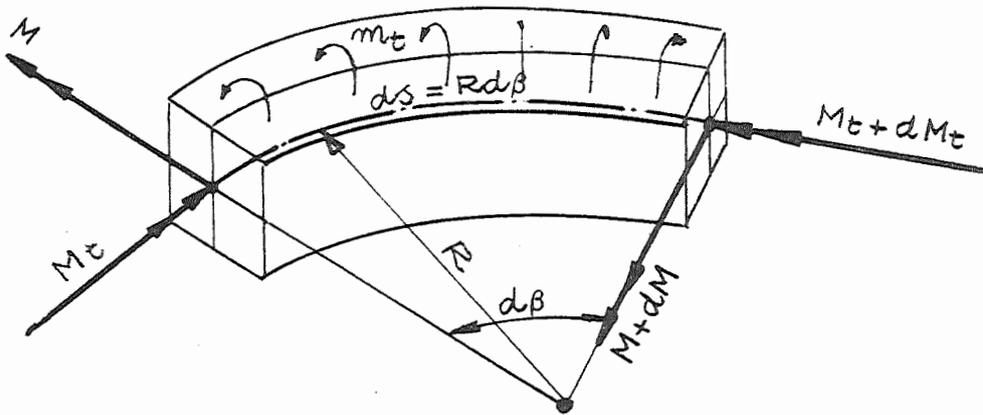


FIGURA 7

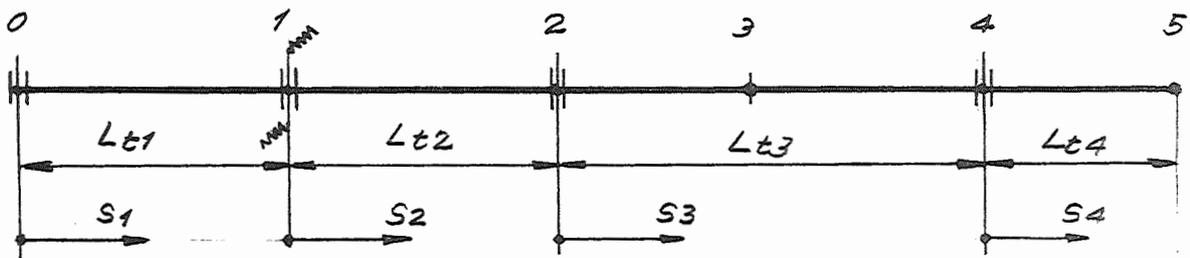
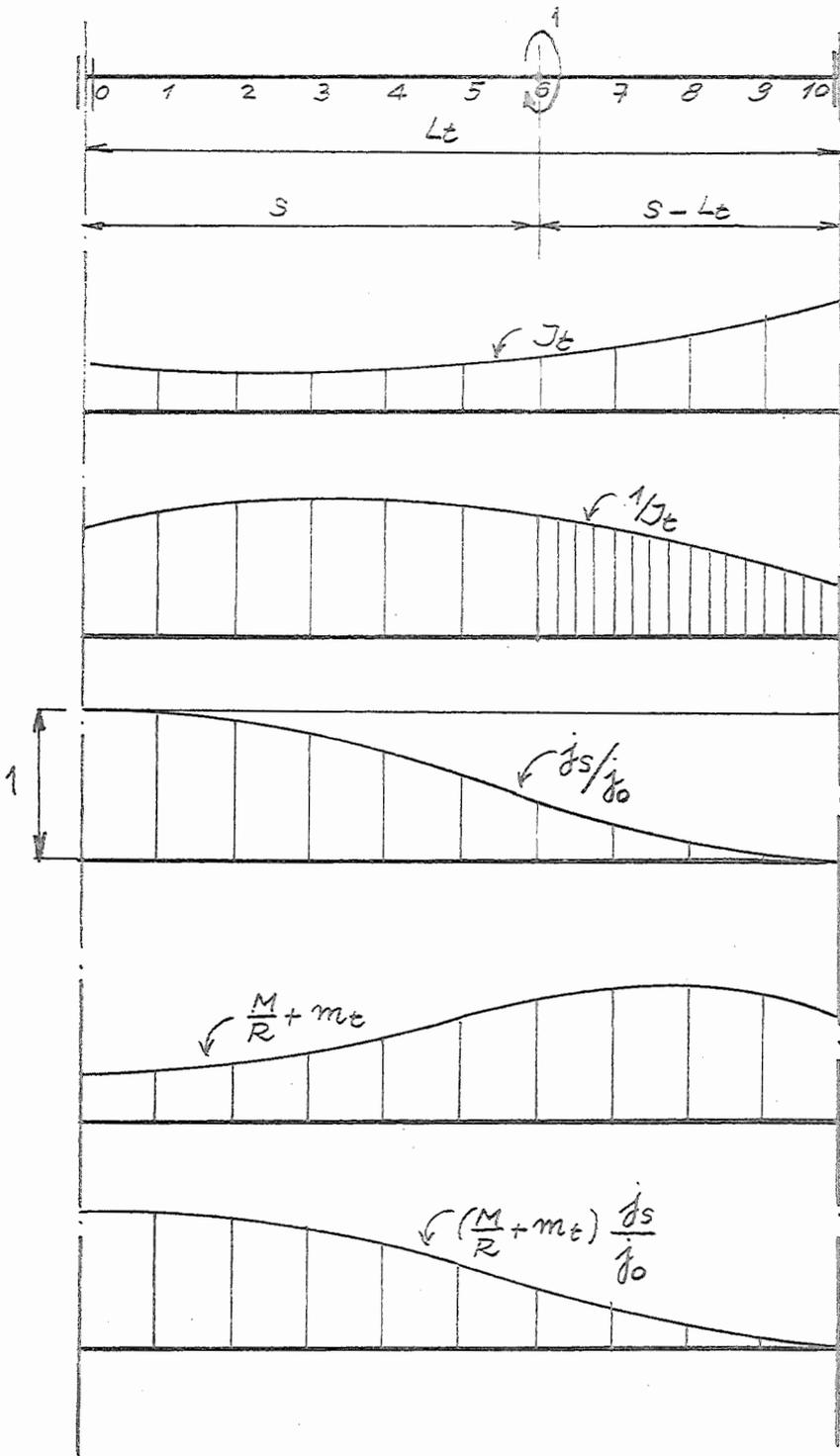


FIGURA 8



$$J_0 = \Delta s \sum_0^{L_t} \frac{1}{J_0}$$

$$J_s = \Delta s \sum_s^{L_t} \frac{1}{J_0}$$

$$M_{0t} = \Delta s \sum_0^{L_t} (\frac{M}{R} + m_t) \frac{\delta s}{J_0}$$

FIGURA 9

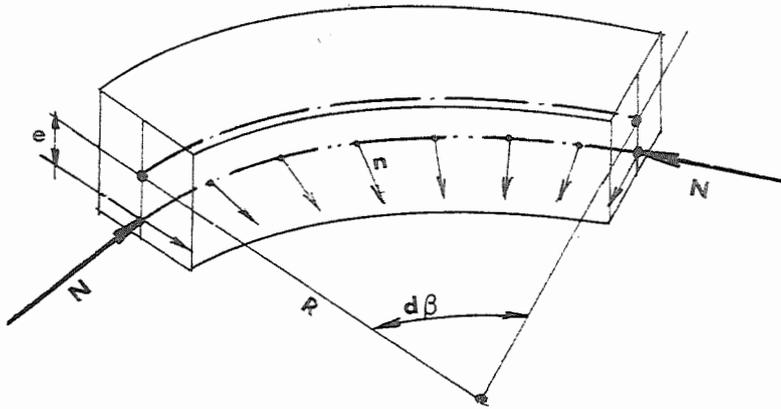


FIGURA 10

Bibliografia da I PARTE

- (1) O'DONNOR, Colin, : Design of Bridge Superstructures, New York/London/Sydney/Toronto 1971, John Wiley & Sons, Inc.
- (2) Highway Structures Design Handbook, 2 vols, 1965, United States Steel Corporation.
- (3) WITECKI, A.A., : Simplified Method for the analysis of torsional moment. Concrete Bridge Design, Detroit, 1969.
- (4) BRETTHAUER, Georg e NÖTZOLD, Fritz, : Ein Beitrag zur Berechnung von gekrümmten Durchlaufträgern mit starrer und elastischer Torsioneinspannung über den Stützen, 1964, Der Bauingenieur Heft 10, pag. 402.
- (5) WITTFOHT, Hans, : Kreisförmig gekrümmte Träger mit starrer Torsioneinspannung an den Auflagerpunkten, Berlin/Göttingen/Heidelberg/New York, 1964, Springer-Verlag.
- (6) VREDEN, Werner, : Neues allgemeines Berechnungsverfahren beliebig gelagerter gekrümmter Träger, Berlin/München, 1966, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn.
- (7) SCHULZ, Martin, : Die praktische Berechnung von Kreisringträgern mittels Momentenausgleich, Berlin/München/Düsseldorf 1970, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn.
- (8) MAFFEI, Carlos Eduardo Moreira, : Resolução de vigas contínuas curvas - Método de Cross -, São Paulo, 1972, Tese de Doutorado, não publicada.
- (9) BRAGA, Walter de Almeida, Fôrças Horizontais em pontes, São Paulo, 1972, Tese de Doutorado, não publicada.

4. Tensões internas.

4.1. Secções transversais indeformáveis em seu plano.

Consideremos a barra de secção celular da fig. 11, de módulo de elasticidade longitudinal E , e transversal G , e tendo momento de inércia à torção J_t ; suponhamos inicialmente que a mesma tenha, além dos diafragmas extremos, um grande número de diafragmas intermediários rígidos, de modo que suas secções transversais, embora podendo sofrer empenamento, permaneçam indeformadas em seu plano.

Na determinação das tensões internas, tanto normais como tangenciais, somar-se-ão, àquelas determinadas através da Resistência dos Materiais, outras calculáveis pela teoria da flexo-torção de Vlassov⁽¹⁰⁾ (11) (12). Tais tensões adicionais aparecem sempre que a torção não é uniforme, ou quando há impedimento ao empenamento.

Em particular, o momento torsor M_t é equilibrado, em cada secção transversal, em parte por tensões tangenciais de Saint-Venant, calculáveis pela conhecida fórmula de Bredt⁽¹²⁾, e em parte por tensões tangenciais oriundas da flexo-torção.

Sejam M_{ts} a parcela de M_t equilibrada por torção de Saint-Venant, e M_{tt} aquela equilibrada por flexo-torção; teremos:

$$M_t = M_{ts} + M_{tt} \quad (14)$$

Como se sabe, M_{ts} é proporcional à primeira derivada, segundo x , do ângulo de torção θ :

$$M_{ts} = G J_t \theta' , \quad (15)$$

ao passo que M_{tt} pode ser escrito na forma

$$M_{tt} = - (E J_{\omega\omega} \theta'')' = - M_{\omega}' \quad (16)$$

onde $J_{\omega\omega}$ é o "momento de inércia sectorial" da secção, e M_{ω} é o "bimomento de flexo-torção".

Quando o produto $G J_t$ é grande, como no caso das secções celulares, M_{tt} pode ser desprezado, predominando a torção de Saint-Venant; por outro lado, nas secções delgadas abertas, há predominância da flexo-torção.

Kollbrunner⁽¹²⁾ estudou a influência do parametro

$$x = l \sqrt{\frac{G J_t}{E J_{\omega\omega}}} \quad (17)$$

para vigas simplesmente apoiadas de vão l , com três carregamentos diferentes, a saber

- momento torsor uniformemente distribuído
- momento torsor concentrado no meio do vão

- bimomento aplicado nas extremidades.

Determinou, no meio do vão, o valor do bimomento M_w , comparando-o com o que se teria fazendo $x = 0$ (caso de flexo-torção pura). Os resultados são apresentados na fig. 17, onde se verifica que, para as secções cheias ou celulares, predomina a torção de Saint-Venant.

Assim sendo, quando, nas secções delgadas fechadas a deformação das mesmas, em seu próprio plano, é impedida pela presença de diafragmas, as tensões internas podem ser determinadas, sem erro apreciável, através das fórmulas da Resistência dos Materiais.

4.2. Secções deformáveis em seu plano. Retirando agora todos os diafragmas (exceto os das extremidades), as secções transversais passam a sofrer uma deformação em seu próprio plano, acompanhada por um empenamento adicional.

Esta deformação se deve ao fato de, num elemento genérico ds da barra, o carregamento $p = -dQ/ds$, de resultante excêntrica, se transmitir à secção $s + ds$ através de tensões tangenciais $d\tau$ que não se distribuem necessariamente segundo o fluxo de Saint-Venant.

É o que se verifica nas figuras 12, 13, 14 e 15, onde se indica o efeito de um carregamento excêntrico p atuando num elemento $ds = 1$. O fluxo de cisalhamento transmitido da secção s para a secção $s + ds$ pode ser decomposto em três partes:

- um fluxo correspondente ao carregamento simétrico da fig. 13 (b),
- um fluxo de Saint-Venant (fig. 14 (b)), e
- um fluxo auto-equilibrado (fig. 14 (c)).

O fluxo proveniente do carregamento simétrico é determinado, nas secções formadas por várias células, sem maior dificuldade; o mesmo provoca um deslocamento linear vertical da secção, como se indica na fig. 15 (a).

O fluxo de Saint-Venant é calculado pela já mencionada fórmula de Bredt, e provoca uma rotação rígida da secção, como na fig. 15 (b).

Resta considerar o fluxo da fig. 14 (c), o qual, como dissemos, constitui um carregamento auto-equilibrado atuante no elemento $ds = 1$, deformando o mesmo conforme se mostra na fig. 15 (c), e provocando o aparecimento de momentos fletores transversais importantes. Além disto, mobilizam-se tensões normais e tangenciais que irão se somar às devidas à flexão e à torção pura.

O problema acima descrito foi abordado pela primeira vez com generalidade por Vlassov⁽¹⁰⁾ para o caso de secção celular de contorno poligonal.

No caso das pontes curvas, além do carregamento vertical excêntrico acima mencionado, aparece num elemento ds o momento torsor aplicado $\frac{M}{R} ds$ que se transmite ao elemento através de forças horizontais iguais e de sinais contrários que, com suficiente aproximação, podem ser consideradas atuando nas mesas da secção. O tratamento dos efeitos dêste binário é análogo ao que se viu para o carregamento da fig. 13 (c), que é constituído por um binário de forças verticais.

4.4. Esforços devidos à deformação da secção.

Convém inicialmente observar que o carregamento auto-equilibrado que provoca a deformação do elemento ds não depende dos esforços solicitantes na secção s , mas da carga externa atuante naquêle elemento, nela se incluindo o efeito de curvatura acima mencionado.

Quando a barra é suficientemente alongada, a secção transversal pode ser analisada, para o carregamento da fig. 14(c), sem se levar em conta a presença dos elementos vizinhos, o que constitui uma aproximação razoável e a favor da segurança. Caso contrário, é preciso decompor o referido carregamento em dois quinhões: um dêles resistido por flexão das placas em seus próprios planos, e outro por flexão transversal dos elementos atuando como pórticos.

Tung⁽¹³⁾ aborda o problema das secções unicelulares trapezoidais. Scordelis, Davis e Lo⁽¹⁴⁾ analisam vigas tubulares como fôlhas poliédricas, ao passo que Pama e Cusens⁽¹⁵⁾ desenvolvem um processo de cálculo de tabuleiros de grande largura considerando-os como placas ortótropas.

Quando a largura da ponte é grande frente ao vão, as tensões normais longitudinais devidas à deformação das secções, não são desprezíveis, como se observa na fig. 19, onde são apresentados resultados teóricos obtidos da análise de fôlha po-

teórica, e onde se nota a influência favorável de um diafragma intermediário central.

4.5. Considerações finais. Do acima exposto, conclue-se que:

4.5.1. Nas vigas de secção celular, as tensões devidas à flexo-torção são desprezíveis.

4.5.2. Havendo um número suficiente de diafragmas rígidos, as secções transversais não se deformam, podendo as tensões normais e tangenciais ser determinadas pelas equações da Resistência dos Materiais.

4.5.3. Na ausência de diafragmas, as secções transversais se deformam, aparecendo esforços solicitantes de pórtico. No caso de tabuleiros largos, as tensões longitudinais que se mobilizam concomitantemente devido a esta deformação não são desprezíveis.

4.5.4. A deformação transversal de um elemento depende apenas do carregamento do elemento, devendo portanto sua análise ser efetuada para as condições mais desfavoráveis no tocante à carga aplicada ao elemento considerado.

4.5.5. Nas pontes curvas, além da excentricidade das cargas móveis, e de uma pequena excentricidade da própria carga permanente (devida ao fato de o elemento ds ser de planta trapezoidal), aparece no elemento o momento torsor aplicado de intensidade $\frac{M}{R} ds$, que pode ter grande influência na distorção do mesmo. Neste caso consideramos conveniente prever diafragmas rígidos intermediários (pelo menos três) a fim de eliminar, ou pelo menos reduzir, os efeitos desfavoráveis de tal distorção.

4.5.6. A análise da deformação transversal pode ser feita por processo simplificado (caso de pontes alongadas), existindo métodos mais exatos que permitem resolver o problema em grande número de casos.

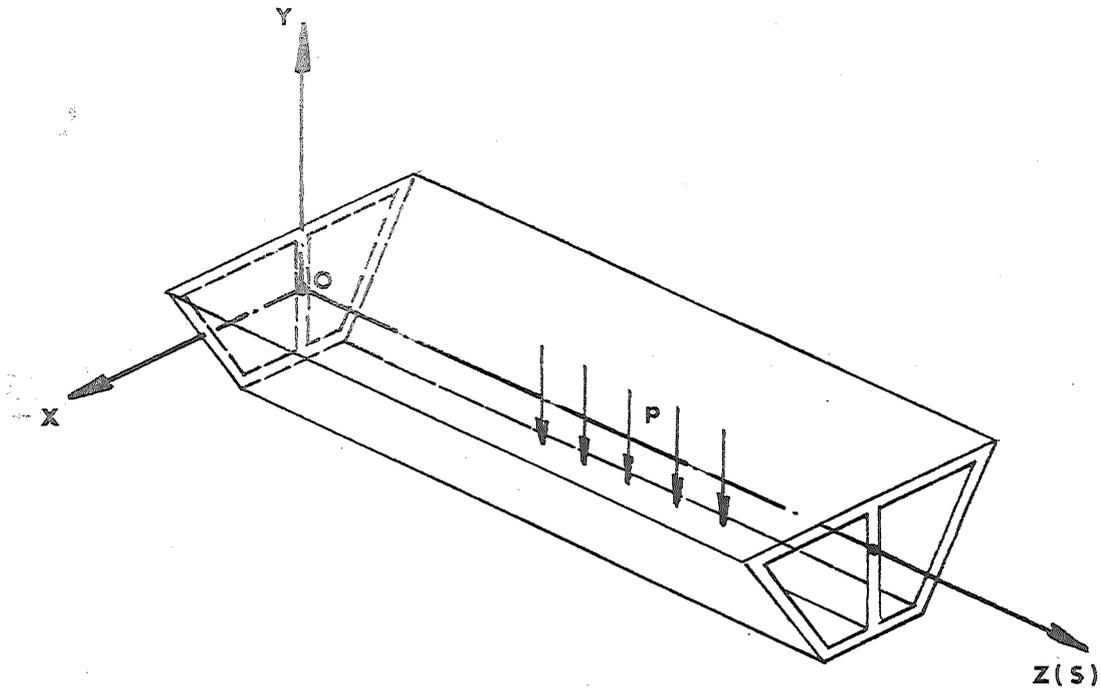


FIGURA 11

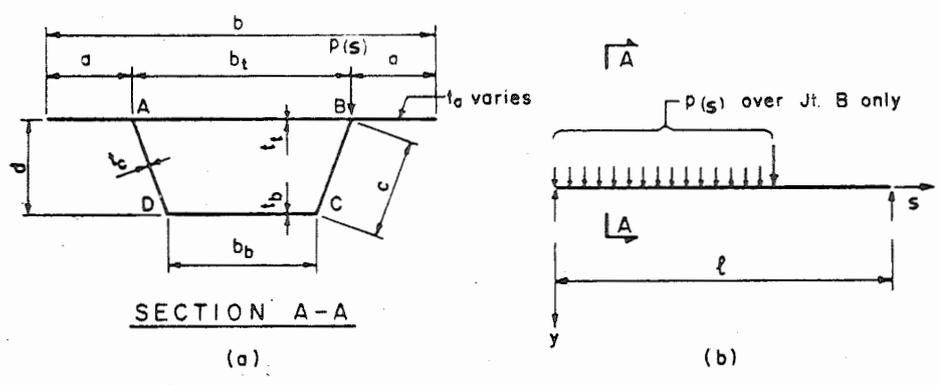


FIGURA 12

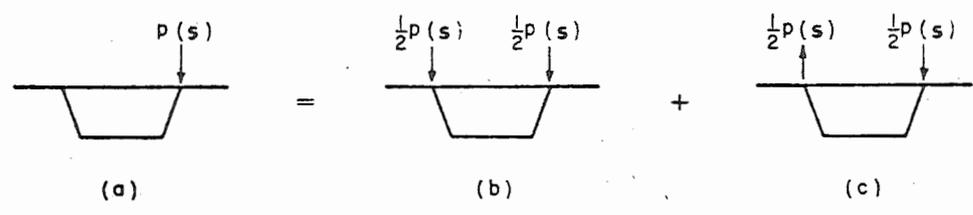


FIGURA 13

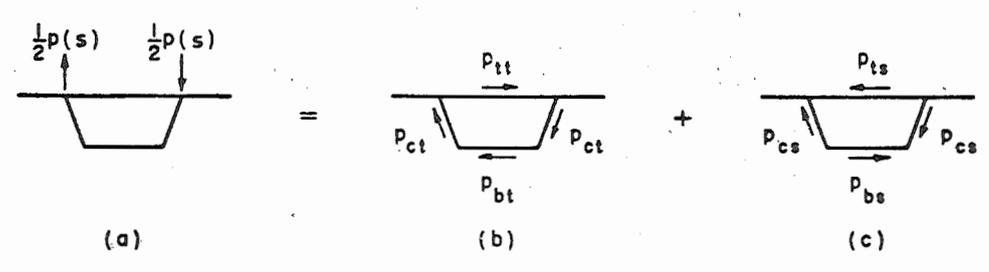


FIGURA 14

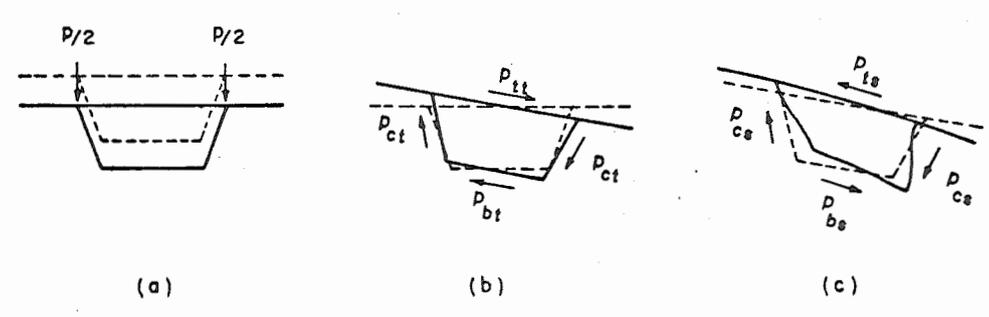


FIGURA 15

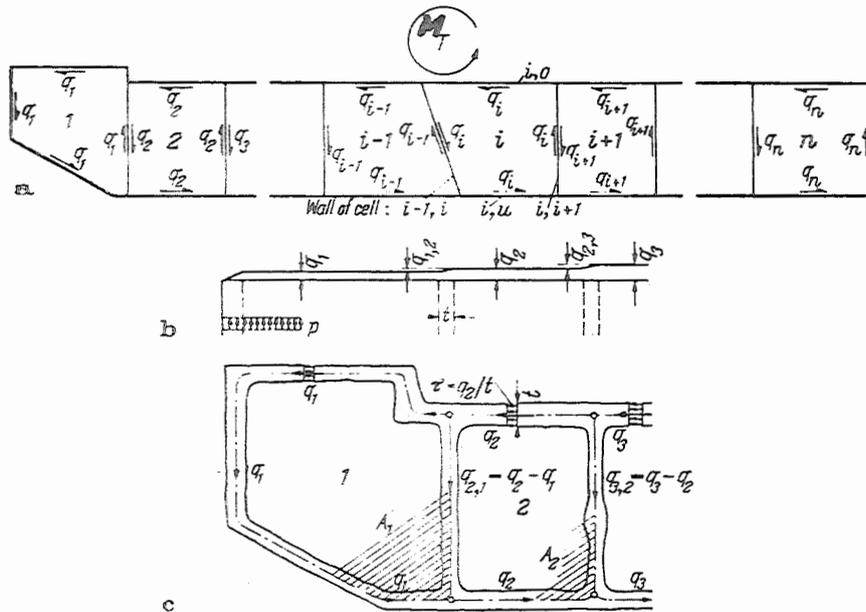


FIGURA 16

FIGURA 17

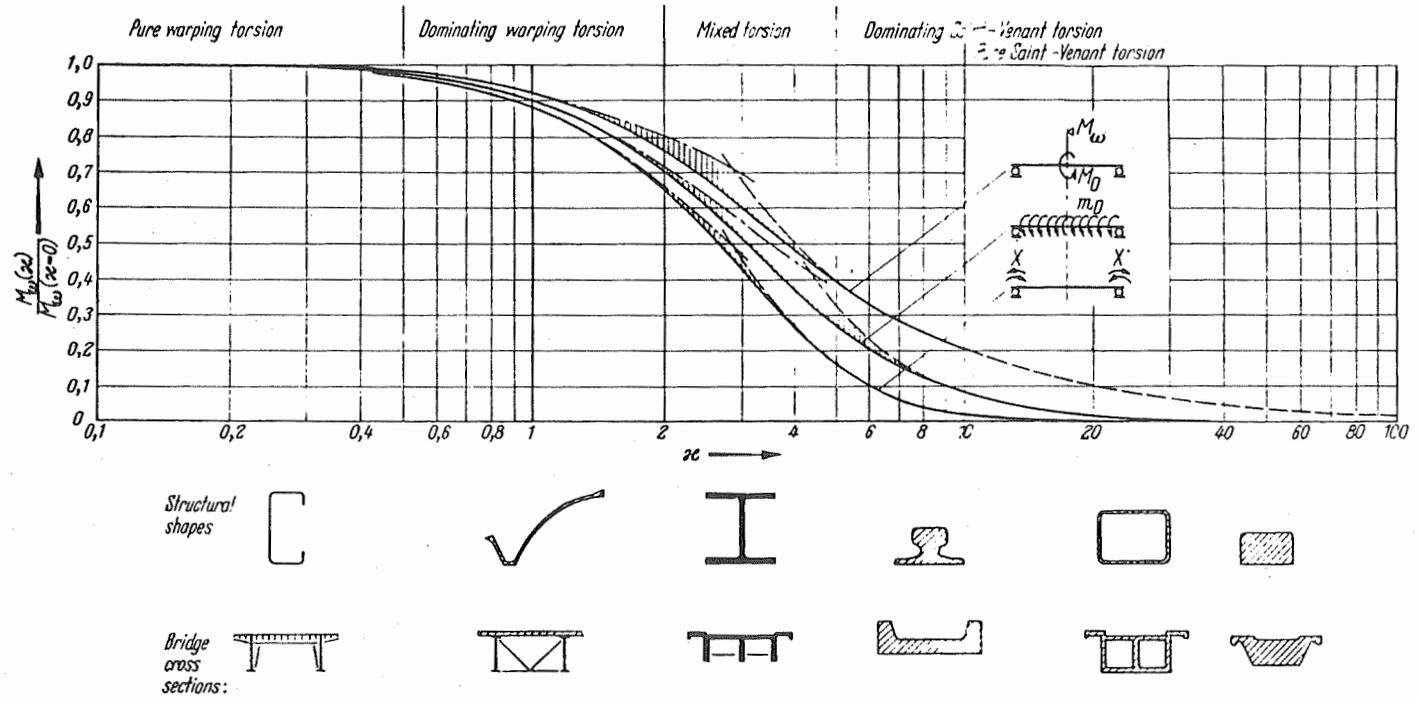


Fig. 10.5. Warping Moments $M_w = M_w(x)$ at Mid-Span of a Simply Supported Member Subjected to Three Different Types of Load.

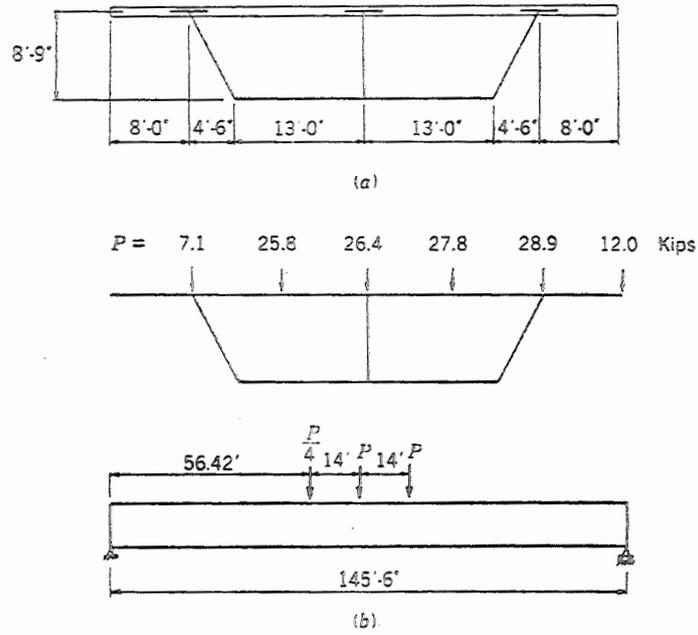


Figure 5.60 Composite steel and concrete bridge: (a) cross section; (b) loading.

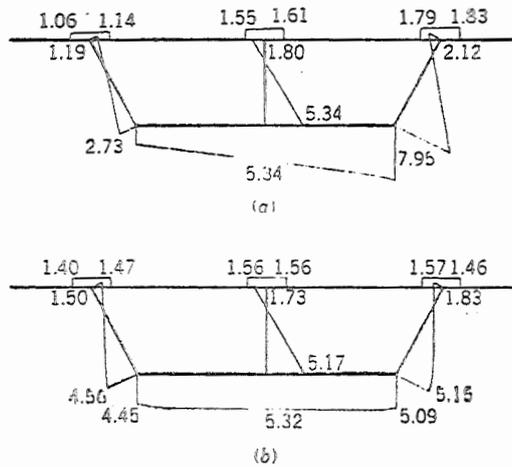


Figure 5.61 Theoretical steel stresses (ksi): (a) without diaphragms; (b) with central diaphragm.

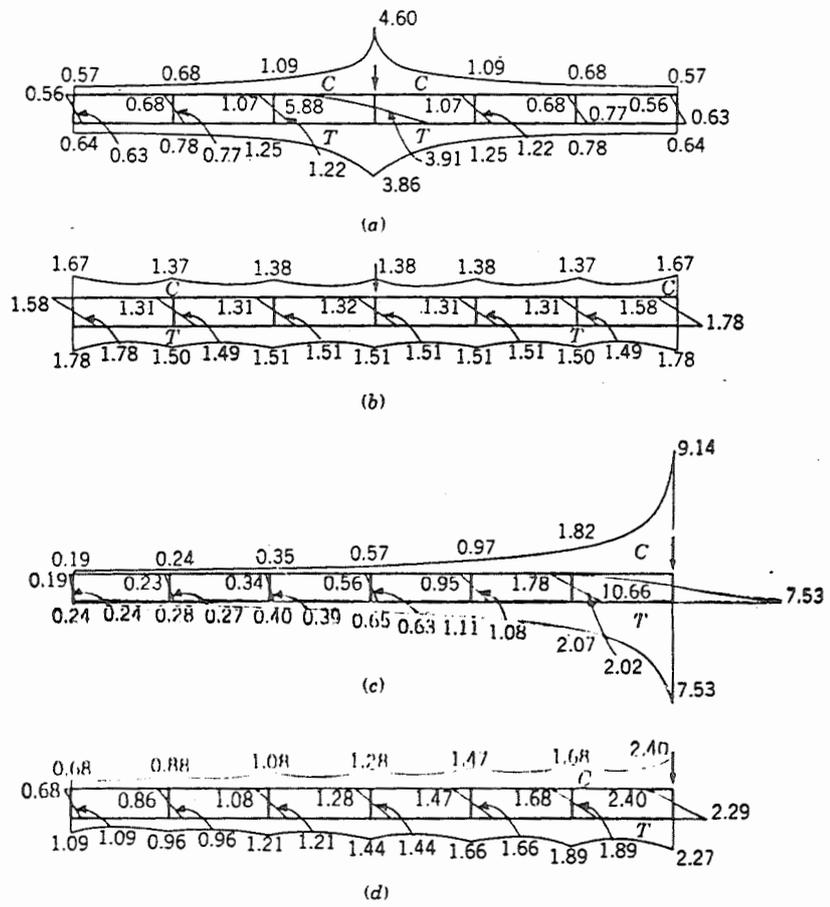


Figure 5.59 Computed longitudinal stresses (lb./sq in.) at midspan due to 1-kip load: (a) central load without diaphragms; (b) central load with rigid diaphragm at midspan; (c) edge load without diaphragms; (d) edge load with rigid diaphragm at midspan.

FIGURA 19

Bibliografia da II PARTE

- (10) VLASSOV, Basile Z.,: Pièces Longues en Voiles Minces, Paris, 1962, Éditions Eyrolles.
- (11) LANGENDONCK, Telemaco van, : Torção de peças de secção delgada, Rio de Janeiro, 1959, "Estrutura", pag. 49.
- (12) KOLLBRUNNER, Curt F., BASLER, Konrad, : Torsion in Structures, Berlin/Heidelberg/New York 1969, Springer-Verlag.
- (13) TUNG, David H.H., : Torsional analysis of single thin-walled trapezoidal concrete box-girder bridges, "Concrete Bridge Design", pag.205, Detroit 1969, A.C.I.
- (14) SCORDELIS, A.C., DAVIS, R.E., e LO, K.S., : Load distribution in concrete box girder bridges, "Concrete Bridge Design", pag. 117, Detroit, 1969, A.C.I.
- (15) PAMA, Ricardo P., e CUSENS, Anthony R., : Load distribution in multi-beam concrete bridges, "Concrete Bridge Design", pag. 97, Detroit 1969, A.C.I.