

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

SET-129: COMPLEMENTOS DE CONCRETO PROTENDIDO

CAPÍTULO I

ESTRUTURAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS



ILIO MONTANARI

CAPÍTULO I

ESTRUTURAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS

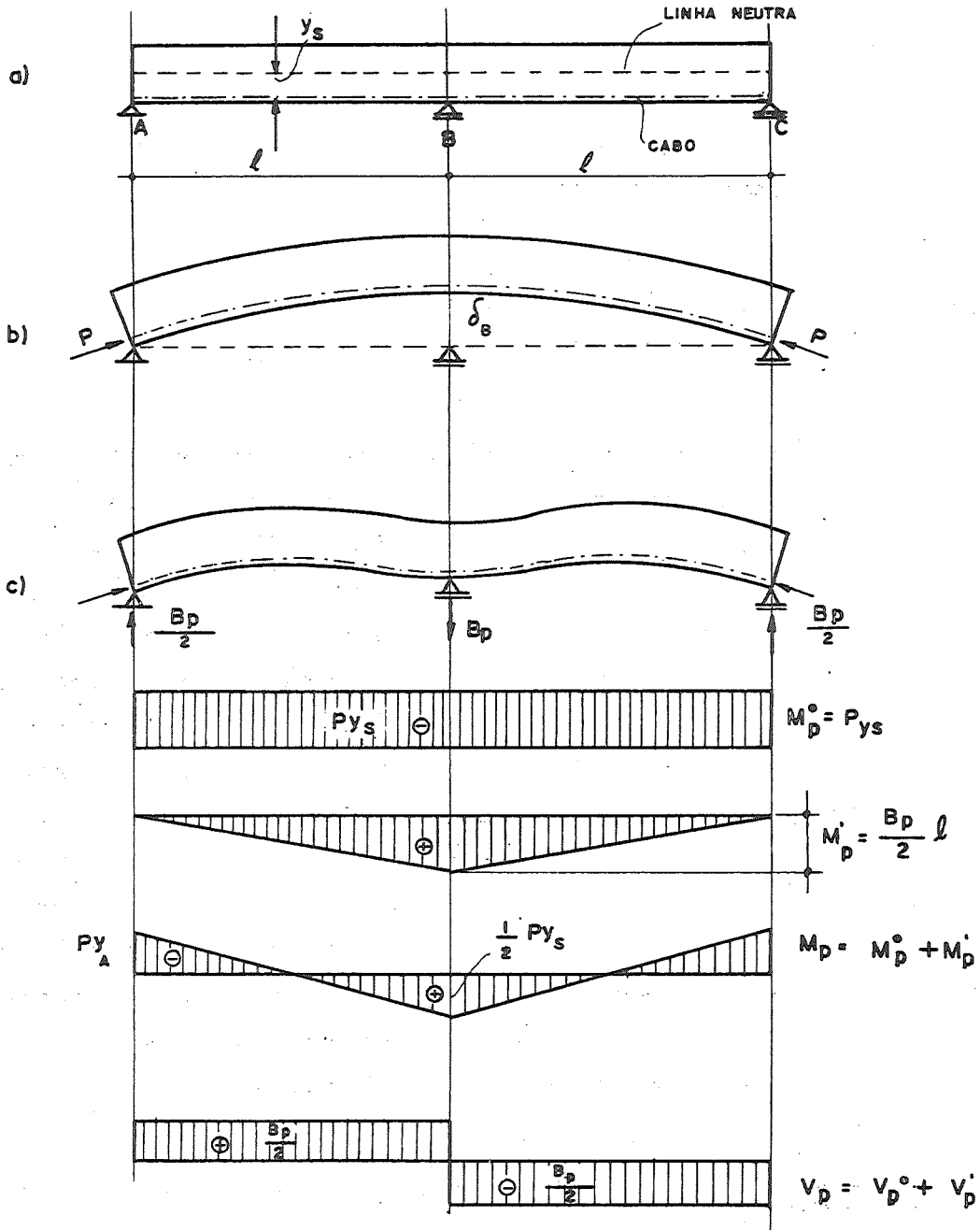


1 - INTRODUÇÃO

Uma estrutura qualquer, ao ser protendida, se deforma. Em estruturas estaticamente determinadas esta deformação é livre, isto é, não é impedida pelos apoios não havendo, por isso, alterações nos valores das reações. Em estruturas estaticamente indeterminadas, pelo contrário, esta deformação é impedida, alterando então as reações e, com elas os esforços. Para esclarecer melhor, considere-se a viga sobre 3 apoios, indicada na figura seguinte: protendendo esta viga com um cabo reto, colocado na sua parte inferior, a viga se curva para cima e se levanta do apoio interno se este não estivesse ligado à viga. Para que as condições de apoio sejam obedecidas, é necessário atuar no apoio interno uma reação negativa - R_p , que tem a intensidade exata para anular a flecha δ_B . Em correspondência, surgem nos apoios A e C reações positivas, cada uma igual a $+\frac{R_p}{2}$, se $l_1 = l_2$ e $I = \text{constante}$.

A protensão que provoca momentos fletores na estrutura altera, via de regra, nos sistemas estaticamente indeterminados, todas as reações de apoio.

As variações das reações externas alteram os momentos fletores e forças cortantes. Indicando com M_p^0 o mo-



mento que aparece no sistema estaticamente determinado, aqui por exemplo a viga AC (ver figura anterior).

$$M_p^0 = P_H y_s \approx P y_s$$

que é simplesmente a força de protensão multiplicada pela excentricidade do cabo, medida até à linha neutra. O momento fletor é então proporcional (porém de sinal contrário) à distância do cabo à linha neutra, se se faz $P_H \approx P$ o que é permitido em vigas baixas. Os esforços provocados pela oposição do apoio ao levantamento da viga designam-se por hiperestáticos de protensão. Os momentos finais da protensão são então:

$$M_p = M_p^0 + M_p'$$

Correspondentemente vale para a força cortante

$$V_p = V_p^0 + V_p'$$

As grandezas dos esforços estaticamente indeterminados, provocados pela protensão, podem ser influenciadas através do traçado do cabo. Elas são especialmente grandes quando o cabo está situado de um lado da linha neutra com grande excentricidade, como na figura anterior, portanto quando M_p^0 é grande e não muda de sinal. Podem também ser nulas se, por exemplo, o traçado do cabo é tal que o diagrama de M_p^0 coincide com o de M_p ou ainda, a área positiva M_p/EI na viga toda é igual à negativa, isto é, o cabo deve cortar a linha neutra. Uma tal protensão é chamada concordante. Existem naturalmente muitos traçados de cabos que não produzem reações estaticamente indeterminadas porém, estão todos contidos numa faixa estreita, não permitindo a utilização da altura toda da viga em todos os tramos.

As reações estaticamente indeterminadas, provocadas pela protensão, precisam estar em equilíbrio entre si porque a própria força de protensão está em equilíbrio.

O concreto protendido, geralmente sem fissuras, preenche bem as condições da teoria da elasticidade quando em serviço, melhor mesmo que o concreto armado, normalmente fissurado. Não é necessário portanto uma estática especial para o concreto protendido e podem, portanto, ser empregados os processos usuais na determinação das incógnitas hiperestáticas. Para estruturas lineares empregam-se, mais frequentemente, o processo dos esforços e o processo dos deslocamentos com os métodos iterativos dele derivados (Cross e Kani).

Ao lado desses processos é também muito usado em concreto protendido o processo das forças radiais. Este, contudo, não é um processo novo, mas simplesmente uma equivalência estática entre a ação das forças radiais consideradas como cargas externas, o que é basicamente possível em todos os processos. O trabalho com as forças radiais facilita a visualização e é, antes de mais nada, útil também para o cálculo de placas protendidas.

No que segue, M_p^0 será o momento fletor no sistema fundamental, que é igual a $y_s P$; M_p' será o hiperestático de protensão e M_p será o momento final resultante

$$M_p = M_p^0 + M_p'$$
$$V_p = V_p^0 + V_p' = \frac{dM_p^0}{dx} + \frac{dM_p'}{dx}$$

A superposição $M_p^0 + M_p' = M_p$ é geralmente suficiente para se comparar a ação total da protensão com aquela das cargas externas. É necessário contudo, ter em mente que ambas as partes M_p^0 e M_p' estaticamente são bem diferentes: M_p^0 é o momento provocado pela protensão no sistema estaticamente determinado

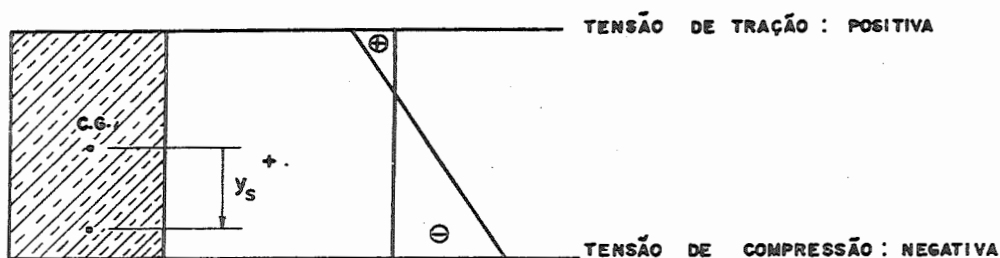
$$M_p^0 = \int \sigma_c y dS$$

e pertence a um estado próprio de tensões

$$\bar{M}_p^o = \int (\sigma_c + \sigma_s) y dA = 0; \quad \bar{N}_p^o = \int (\sigma_c + \sigma_s) dA = 0$$

ao contrário, M_p^i resulta de forças externas. Esta diferença fundamental é importante sobretudo na ruptura, porque as tensões próprias desaparecem, enquanto que aquelas da carga externa, pelo menos em parte, se mantêm.

Adotaremos as seguintes regras de sinal



y_s = excentricidade do cabo (positivo para baixo)

$P^{(-)}$ = força de protensão (resultante de compressão sobre o concreto: negativa).

Em estruturas complicadas é frequentemente difícil se ter, sem mais, uma visão do andamento dos hiperestáticos e, geralmente erros de sinal podem passar despercebidos, trazendo graves consequências para a estrutura. Para se evitar isso, é necessário manter sempre a regra de sinal adotada.

2 - PROCESSO DOS ESFORÇOS

Com este processo, os hiperestáticos são as incógnitas superabundantes do sistema estaticamente determinado.

No sistema fundamental a força de protensão provoca os esforços M_p^0 , N_p^0 e V_p^0 . Chamando as incógnitas de X_i e fazendo $X_i = 1$, os esforços que aparecem no sistema fundamental serão M_i , N_i e V_i .

As deformações do sistema fundamental no ponto, e na direção da incógnita procurada (flecha ou rotação) são, devido à protensão, δ_{i0} e, devido à $X_i = 1$, δ_{ij} . Pode-se escrever:

$$K = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1} & \dots & \dots & \delta_{nn} \end{vmatrix} \quad (\text{matriz dos coeficientes})$$

$$f = \begin{vmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{vmatrix} \quad (\text{vetor dos hiperestáticos})$$

$$d_p = \begin{vmatrix} -\delta_{10} \\ \vdots \\ -\delta_{n0} \end{vmatrix} \quad (\text{vetor das deformações provocadas por P})$$

$$K \cdot f = d_p$$

$$f = K^{-1} \cdot d_p = \text{Hiperestático de protensão}$$

As deformações se calculam com a fórmula já conhecida:

$$\delta_{ij} = \int \frac{M_i M_j}{EI} ds + \int \frac{V_i V_j}{GA} ds + \int \frac{N_i N_j}{EA} ds$$

Em concreto protendido, a parcela da deformação dada pela força cortante $\bar{\epsilon}$, em geral, pequena e pode portanto ser desprezada. Também a influência da força normal

N pode ser desprezada em muitos casos, entretanto, deve ser verificada em cada caso particular.

Para cabos retos ou curvos com trechos parabólicos, as integrais indicadas foram tabeladas. Para que essas tabelas sejam realmente úteis, os δ_{i_0} , na prática, são calculados por integração numérica permitindo levar em conta com facilidade, toda sorte de variação como:

- traçado qualquer do cabo
- momento de inércia variável
- força de protensão variável (ancoragem no interior do vão, perdas).

O traçado econômico do cabo é, hoje em dia, determinado eletronicamente.

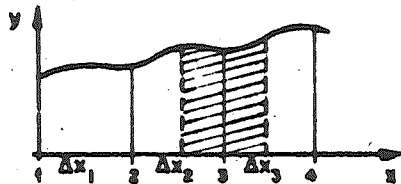
2.1 - INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Como já foi dito, nem sempre é possível se obter analiticamente os δ_{i_0} . Empregam-se então métodos aproximados que consistem em se obter os δ_{i_0} através de integração numérica (regra dos trapézios, Simpson, etc.). Aqui, adota-se o método exposto sucintamente a seguir.

Seja uma função contínua $f(x)$ que deve ser integrada no intervalo $0-l$. O resultado será procurado substituindo a integral por uma somatória no mesmo intervalo. Para isso o intervalo é dividido em um número finito de segmentos, iguais ou não, e, para cada nó, calcula-se a carga correspondente que é a área que envolve o nó considerado (ver figura).

carga de nó

$$k_n = \frac{\Delta x_{n-1}}{12} (y_{n-1} + 5y_n) + \frac{\Delta x_n}{12} (5y_n + y_{n+1})$$



$$f(x) dx = \int_0^{\Delta x} \sum K_n$$

Carga de n \bar{o} de bordo (para $x_1 = x_2$)

$$K_1 = \frac{\Delta x_1}{24} (7y_1 + 6y_2 - y_3) = \frac{\Delta x_1}{12} \left(\frac{7y_1 + 6y_2 - y_3}{2} \right)$$

Carga de n \bar{o} para $\Delta x = \text{constante}$

$$k_n = \frac{\Delta x}{12} (y_{n-1} + 10y_n + y_{n+1})$$

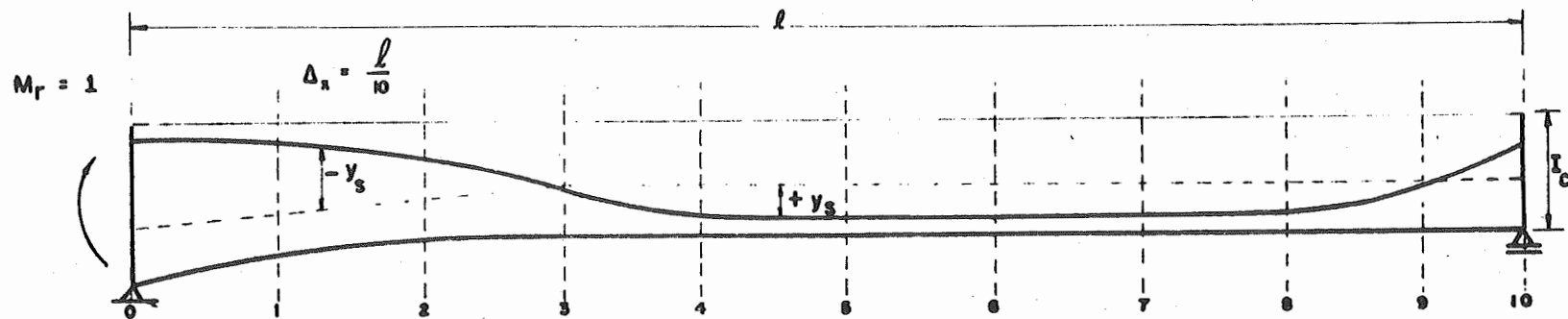
Emprego para o c \bar{a} lculo das deforma \bar{c} o \bar{e} s provocadas pela protens \bar{a} o ($\Delta x = \text{const.}$)

$$\delta_{10} = \int \frac{M_1 M_p^0}{EI} dx = \frac{\Delta x}{12EI_c} \sum \bar{K}_n$$

$$\bar{K}_n = \left(\frac{I_c}{I} M_1 M_p^0 \right)_{n-1} + 10 \left(\frac{I_c}{I} M_1 M_p^0 \right)_n + \left(\frac{I_c}{I} M_1 M_p^0 \right)_{n+1}$$

2.2 - EXEMPLOS

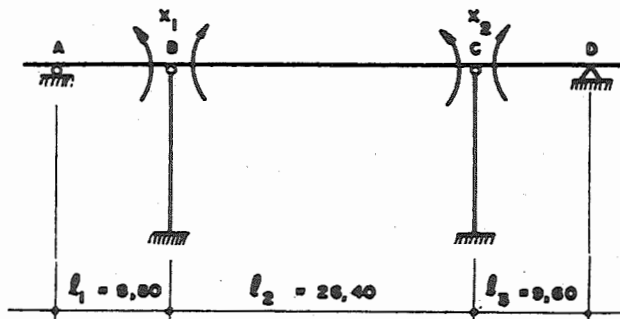
- Determinar a rota \bar{c} o \bar{e} na extremidade 0 da viga da p \bar{a} gina seguinte, provocado pelo carregamento indicado.
- Seja determinar os hiperest \bar{a} ticos de protens \bar{a} o da estrutura da p \bar{a} gina 10.



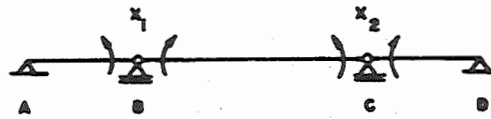
y_s (cm)	-143	-110	-60	+2	+55	+80	+85	+80	+48	0	-57
$\frac{I_c}{I}$	0,25	0,38	0,52	0,69	0,84	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
M_1	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0
$\frac{I_c}{I} M_1 y_s$	-35,75	-37,62	-24,96	+0,97	+27,72	+40,00	+34,00	+24,00	+9,60	0	0
\bar{K}_n	-225,50	-436,91	-286,25	+12,46	+318,17	+461,72	+404,00	+283,60	+120,00	+9,60	-4,80

$$\Sigma \bar{K}_n = 656,09 \quad ; \quad \delta_{10} = \frac{lP}{120EI_c} = 656,09$$

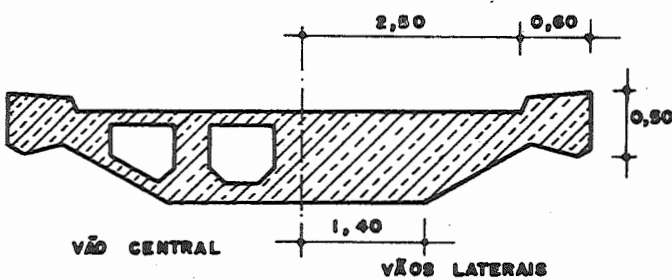
Sistema estático



Sistema fundamental

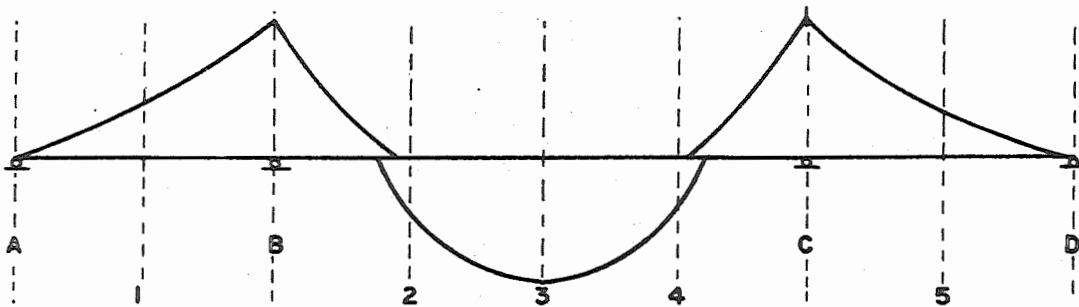


Secção transversal



Vãos Laterais	Vão Central
A 4,32m ²	3,00m ²
I 0,318m ⁴	0,275m ⁴
W _s 0,567m ³	0,490m ³
W _i 0,588m ³	0,510m ³
y _i 0,54m	0,54m

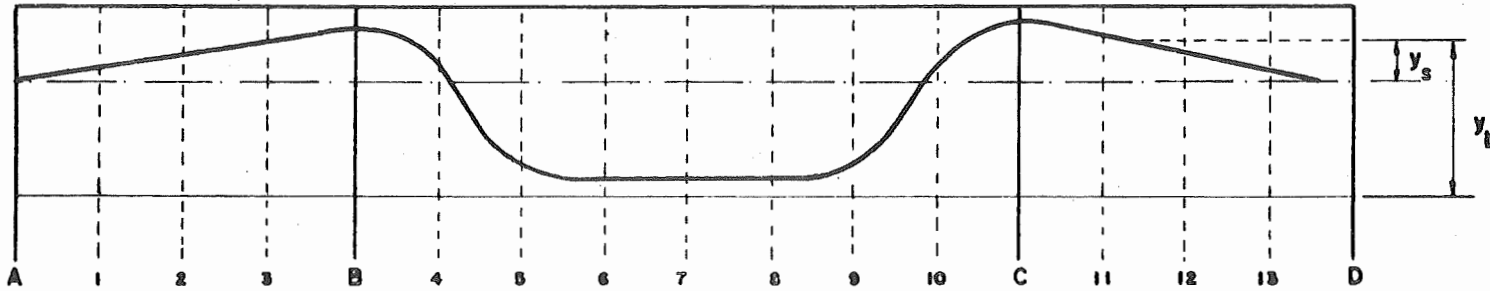
Diagrama de máximos momentos



tm	A	1	B	2	3	4	C	5	D
Min M	0	-176	-584	104	284	103	-583	-151	0
Max M	0	-39	-438	145	436	150	-436	-10	0

Reação de apoio: min A = - 14,6 t (tração)

min D = - 3,8 t (tração)



y_b	54	55	59	73	80	56	16	11	10	11	16	55	80	73	59	55	54	
y_s	0	-1	-5	-19	-26	-2	+38	+43	44	43	38	-2	-26	-19	-5	-1	0	

PERDA POR ATRITO : ($\mu = 0,22$; $k = 10^{-8}$)

$x(m)$	0	2,20	4,40	6,60	8,80	12,10	15,40	18,70	22,80	19,50	16,20	12,80	9,60	7,20	4,80	2,40	0	
$\sum \alpha$	0	1	4	12	19	32	46	50	51	47	43	29	16	11	3	1	0	10-2
$(\mu^\alpha + k \cdot x)$	0	0,40	1,30	3,30	5,10	8,20	11,70	12,90	13,40	12,30	11,10	7,70	4,50	3,10	1,10	0,40	0	10-2
$e^{-(\mu^\alpha + kx)}$	1,00	1,00	0,99	0,97	0,95	0,92	0,88	0,88	0,87	0,88	0,88	0,92	0,95	0,97	0,99	1,00	1,00	

TERMOS DE CARGA PARA $P_A = P_D = 1000 \text{ t}$ (CONSIDERANDO AS PERDAS POR ATRITO)

$\Delta x \frac{I_c}{I}$		1,90	1,90	1,90	1,90	3,30	3,30	3,30	3,30	3,30	3,30	3,30	2,08	2,08	2,08	2,08		
M_1	0	0,25	0,50	0,75	1,00	0,875	0,750	0,625	0,50	0,375	0,250	0,125	0	0	0	0	0	
M_2	0	0	0	0	0	0,125	0,250	0,375	0,50	0,625	0,750	0,875	1,000	0,75	0,50	0,25	0	
M_D^0	0	+10	+80	+184	+247	+18	-335	-378	-383	-378	-335	+18	+247	+184	+80	+10	0	
$M_1 \cdot M_D^0$	0	+2	+25	+138	+247	+16	-251	-236	-192	-142	-84	+2	0	0	0	0	0	
\bar{K}_n	-12	+86	+741	+3139	+6737	+515	-9009	-9250	-7583	-5597	-3234	-211	+7	0	0	0	0	$12 \sum \bar{K}_n = -23.671$
$M_2 \cdot M_D^0$	0	0	0	0	0	+2	-84	-142	-192	-236	-251	+16	+247	+138	+25	+2	0	
\bar{K}_n	0	0	0	0	+7	-211	-3234	-5597	-7383	-9250	-9009	+515	+6984	+3436	+811	+94	-14	$12 \sum \bar{K}_n = -23.051$

$E I_c \delta_{10} = -1972$

$E I_c \delta_{20} = -1921$

$$EI_c \delta_{11} = \frac{1}{3} \cdot \frac{I_c}{I} \cdot l_1 + \frac{1}{3} \cdot l_2 = \frac{8,80}{3 \cdot 1,15} + \frac{26,4}{3} = 11,0m$$

$$EI_c \delta_{12} = \frac{1}{6} l_2 = \frac{26,4}{6} = 4,4m$$

$$EI_c \delta_{22} = \frac{1}{3} \cdot \frac{I_c}{I} l_3 + \frac{1}{3} l_2 = \frac{9,60}{3 \cdot 1,15} + \frac{26,4}{3} = 11,2m$$

X_1	X_2		X_1	X_2	
δ_{11}	δ_{12}	$-\delta_{10}$	11,0	4,4	$-\delta_{10}$
δ_{21}	δ_{22}	$-\delta_{20}$	4,4	11,2	$-\delta_{20}$

o fator EI_c foi cancelado

1^a troca

$-\delta_{10}$	X_2	
0,091	-0,4	X_1
0,4	9,44	$-\delta_{20}$

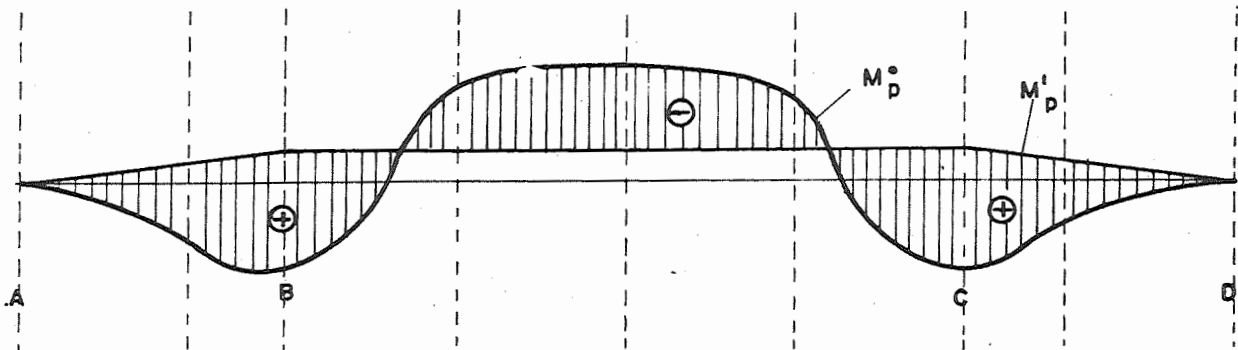
2^a troca

$-\delta_{10}$	$-\delta_{20}$	
0,1080	-0,0424	X_1
-0,0424	0,1060	X_2

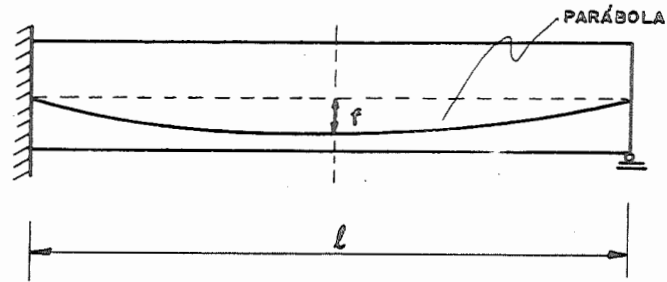
$$X_1 = M'_{PB} = 0,1080 \cdot (-\delta_{10}) - 0,0424 \cdot (-\delta_{20}) = 131tm; A_p = \frac{131}{8,8} = +14,9t$$

$$X_2 = M'_{PC} = -0,0424(-\delta_{10}) + 0,1060(-\delta_{20}) = 120tm; D_p = \frac{120}{9,6} = 12,5t$$

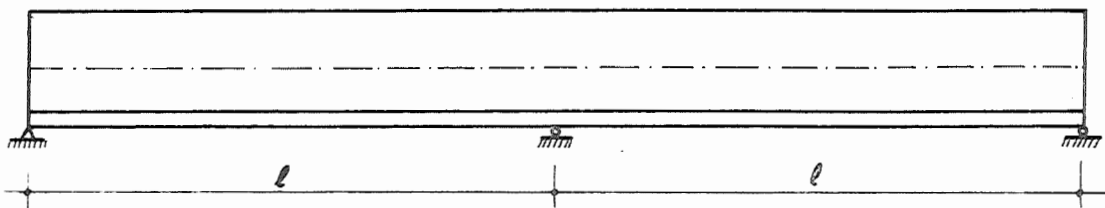
$$M_p = M_p^o + M_p'$$



- c) Determinar os diagramas de momento fletor e força cortante provocados pelo hiperestático de protensão, na viga indicada, com o processo dos esforços

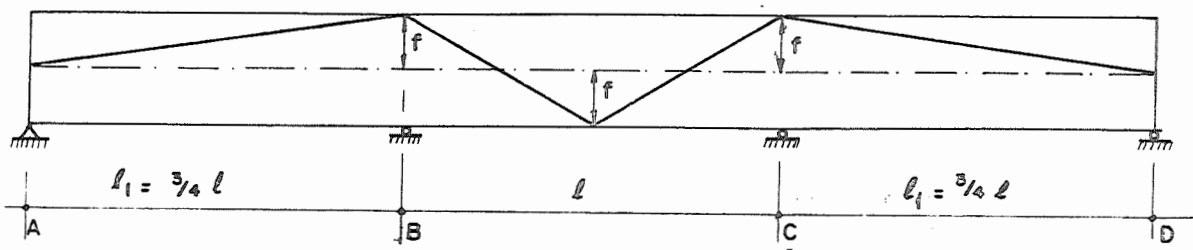


- d) Idem ao c, porém para a viga indicada:



$P = \text{const.} ; EI = \text{const.} ; y_s = e_s = \text{const.}$

- e) Idem ao c, porém para a viga indicada



Hipóteses

$y_{sA} = y_{sD} = 0 ; y_{sB} = y_{sC} = -f ; EI = \text{constante} ; P = \text{constante}$

3. PROCESSOS ITERATIVOS

Os dois processos iterativos mais usados, Cross e Kani, são soluções do método dos deslocamentos. Apenas os momentos de engastamento perfeito da protensão precisam ser equilibrados.

As regras de sinais encontradas na literatura especializada, não são uniformes. Usar-se-á aqui a seguinte regra: O momento de engastamento perfeito será positivo se, referido às extremidades da viga, girarem em sentido contrário aos ponteiros de um relógio.



Ambos os processos partem de um sistema fundamental geometricamente indeformável. Para cada extremidade da barra, com exceção da simplesmente apoiada, determinam-se os momentos de engastamento perfeito, isto é, para o caso de carga protensão o momento de engastamento provocado pela protensão. Estes, em cada nó, em geral não estão em equilíbrio e precisam ser compensados. Isto representa um caminho iterativo para a solução. Nas deduções sumárias seguintes, considera-se apenas o caso de nós indeslocáveis; no exemplo de aplicação considera-se, contudo, a deslocabilidade na solução com o processo de Kani, aliás, mais indicado para esses casos.

3.1 - PROCESSO DE HARDY CROSS

Considere-se uma barra apoiada no nó i e engastada no nó n .



O momento M_i aplicado ao nó i provoca no nó n o momento M_n .
Da condição de deformação:

$$\phi_n = 0 = \phi_{nn} M_n + \phi_{ni} M_i$$

tira-se:

$$M_n = - \frac{\phi_{ni}}{\phi_{nn}} M_i$$

O momento M_i é transmitido ao nó n com um fator de redução. Este fator é chamado de coeficiente de transmissão.

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{in} &= \frac{\phi_{in}}{\phi_{nn}} \rightarrow + \frac{1}{2} \\ \alpha_{ni} &= \frac{\phi_{ni}}{\phi_{ii}} \rightarrow + \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \text{ para EI constante}$$

Segundo a regra de sinal adotada, são ambos negativos, pois M_i e M_n giram no sentido horário.

O momento extremo M_i provocado por uma rotação $\phi_i = 1$ é:

$$\phi_i = \phi_{ii} M_i + \phi_{in} M_n = 1$$

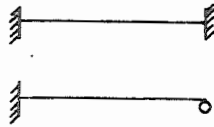
que, substituindo M_n pelo valor calculado vem

$$\phi_i = \phi_{ii} M_i - \phi_{in} \frac{\phi_{in}}{\phi_{nn}} M_i$$

$$M_i \text{ (p/}\phi_i = 1) = \frac{\phi_{nn}}{\phi_{ii} \phi_{nn} - \phi_{in}^2}$$

Este valor é chamado rigidez β_{in} da barra i-n no nó i:

$$\beta_{in} = \frac{\phi_{nn}}{\phi_{ii} \phi_{nn} - \phi_{in}^2} = \frac{EI}{l} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{ para EI constante}$$

$$= \frac{3}{4} \frac{EI}{l}$$


Se se tem um momento $\Delta M = \sum \bar{M}_i$ a compensar no nó i, este valor deverá ser distribuído para cada barra proporcionalmente às suas rigidezes, isto é, o quinhão da barra i-n será:

$$\mu_{in} = \frac{\beta_{in}}{\sum \beta_{im}} = \text{coeficiente de distribuição}$$

m = número de barras que concorrem no nó i

Com repetidas distribuições e novas determinações dos ΔM de nó para nó, determina-se a distribuição de momentos por aproximações sucessivas.

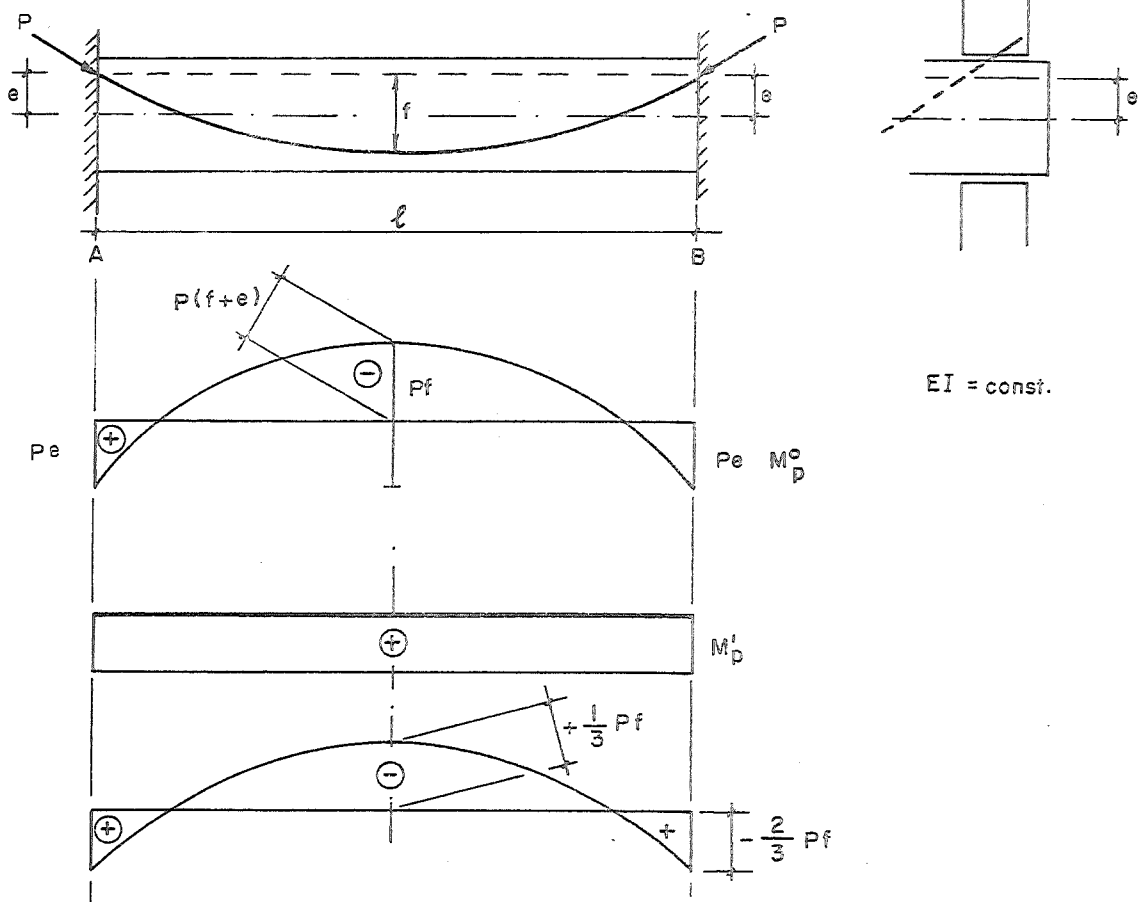
3.2 - VIGA SIMPLES COMO BASE PARA EMPREGO DOS MÉTODOS ITERATIVOS

A viga simples é usada como base para os métodos iterativos. Seja uma extremidade perfeitamente engastada e

a outra também engastada à rotação, porém, móvel horizontalmente. Esta mobilidade horizontal é necessária para permitir o encurtamento do concreto durante a protensão.

3.2.1 - Viga bi-engastada, com cabo parabólico de mesma excentricidade nos apoios.

Considerem-se a viga e cabo indicados na figura. Como sistema fundamental, considere-se a viga bi-apoiada. Nesse caso, o momento M_P^0 será determinado pela posição do cabo na viga. Como incógnitas hiperestáticas, tomam-se os momentos nas extremidades; no caso são iguais devido a simetria da viga e do carregamento.



$$EI \delta_0 = \int M_p^0 \cdot x \cdot l dx = + \frac{2}{3} l \cdot l \cdot P \cdot f + l \cdot P \cdot e \cdot l = Pl(e + \frac{2}{3} f)$$

$$EI \delta_1 = l \cdot l \cdot l$$

$$\delta_1 X_1 + \delta_0 = 0 \quad X_1 = - \frac{\delta_0}{\delta_1}$$

$$X_1 = -P(\frac{2}{3} f + e) \quad (\underline{e} \text{ sobre a LN, } P \text{ sempre negativos})$$

$$M_p^e = -P(\frac{2}{3} f + e)$$

Os momentos nas extremidades serão:

$$M_{pA} = M_{pB} = M_{pA}^0 + M_p^e = P \cdot e - P(\frac{2}{3} f + e) = - \frac{2}{3} Pf$$

No meio do vão:

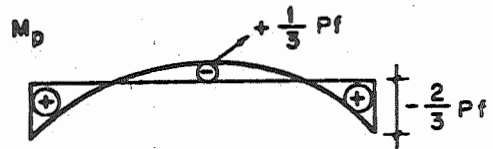
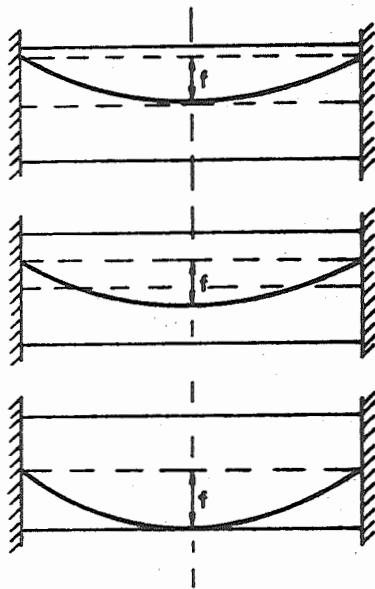
$$M_{p;0,5l} = P(f+e) - P(\frac{2}{3} f + e) = + \frac{1}{3} Pf$$

Os momentos em vigas bi-engastadas, com cabos parabólicos, são portanto independentes da excentricidade nos apoios. Dependem apenas da flecha (f) da parábola. É indiferente portanto, para os momentos finais, se o cabo se situa, nos apoios, na parte superior ou inferior da viga. Os casos indicados na figura conduzem aos mesmos momentos finais.

Os hiperestáticos de protensão, ou os momentos estaticamente indeterminados são, pelo contrário, dependentes da excentricidade e como, aliás, tem de ser para compensar a ação dos diferentes M_p^0 nas rotações.

O hiperestático de protensão M_p^e , desaparece se se escolher:

$$|e| = \frac{2}{3} f$$



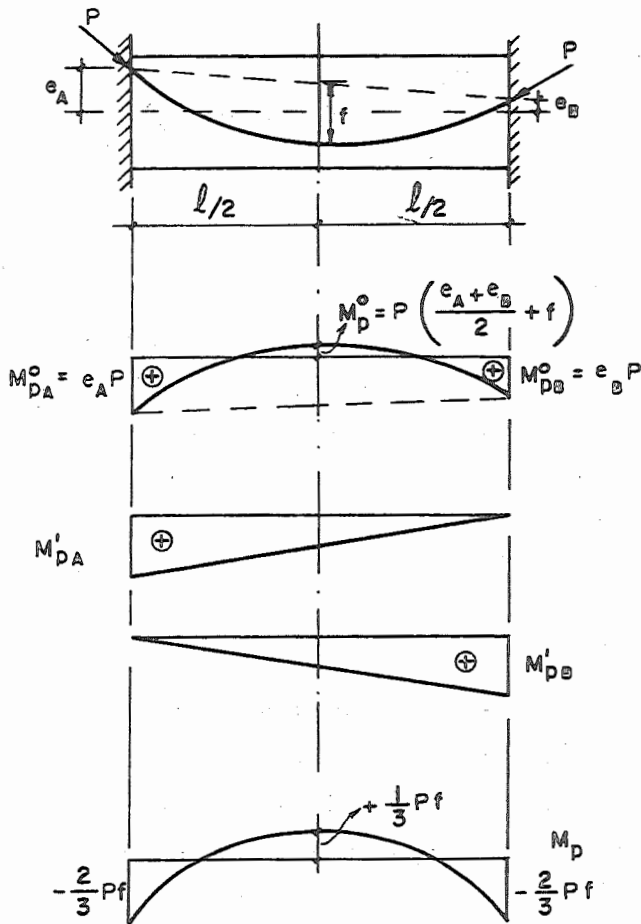
Todos os três casos fornecem o mesmo diagrama de M_p , porém diferentes hiperestáticos de protensão

$$M_p^0 = - P \left(\frac{2}{3} f + e \right)$$

Neste caso temos a protensão com cabo concordante, isto é, as tangentes nas extremidades da viga do sistema fundamental são nulas e, portanto, não são necessários momentos nas extremidades para restabelecer as condições de compatibilidade na viga.

3.2.2 - A viga biengastada com cabo parabólico de excentricidades diferentes nos apoios

Excentricidades diferentes sobre os apoios provocam momentos M_p^0 não simétricos, como mostra a figura. Para a resolução, adota-se a viga biapoiada como sistema fundamental e, como incógnitas hiperestáticas adotam-se os momentos nos apoios.



$$EI\delta_{10} = + \frac{1}{3} l P f \cdot 1 +$$

$$+ \frac{l}{6} (2e_A P + e_B P) \cdot 1 =$$

$$= \frac{1}{3} l P f + \frac{l}{3} P e_A + \frac{l}{6} P e_B =$$

$$= + P l \left(+ \frac{e_A}{3} + \frac{e_B}{6} + \frac{1}{3} f \right)$$

$$EJ\delta_{20} = + \frac{1}{3} l P f \cdot 1 +$$

$$+ \frac{l}{6} (P e_A + 2P e_B) \cdot 1 =$$

$$= + \frac{1}{3} l P f + \frac{l}{6} P e_A + \frac{l}{3} l P e_B =$$

$$= P l \left(\frac{e_A}{6} + \frac{e_B}{3} + \frac{f}{3} \right)$$

$$EI\delta_{11} = EI\delta_{22} = \frac{1}{3} l$$

$$EI\delta_{12} = \frac{1}{6} l$$

$$\frac{1}{3} l X_1 + \frac{1}{6} l X_2 = - P l \left(\frac{e_A}{3} + \frac{e_B}{6} + \frac{1}{3} f \right)$$

$$\frac{1}{6} l X_1 + \frac{1}{3} l X_2 = - P l \left(\frac{e_A}{6} + \frac{1}{3} e_B + \frac{1}{3} f \right)$$

$$\frac{1}{3} X_1 + \frac{1}{6} X_2 = - P \left(\frac{1}{3} e_A + \frac{1}{6} e_B + \frac{1}{3} f \right)$$

$$- \frac{1}{3} X_1 - \frac{2}{3} X_2 = + P \left(\frac{1}{3} e_A + \frac{2}{3} e_B + \frac{2}{3} f \right)$$

$$- \frac{1}{2} X_2 = P \left(\frac{1}{2} e_B + \frac{1}{3} f \right)$$

$$X_2 = - P \left(\frac{2}{3} f + e_B \right)$$

identicamente:

$$X_1 = - P \left(\frac{2}{3} f + e_A \right)$$

Os momentos finais serão $M_p = M_p^0 + M_p'$ e, nos engastamentos

$$M_{p,A} = e_A \cdot P - P \left(\frac{2}{3} f + e_A \right) = - \frac{2}{3} Pf$$

$$M_{p,B} = e_B \cdot P - P \left(\frac{2}{3} f + e_B \right) = - \frac{2}{3} Pf$$

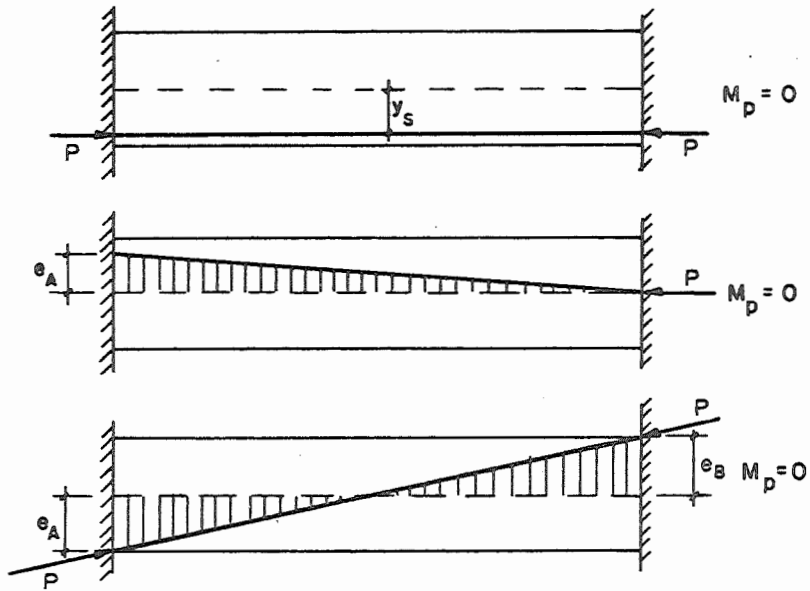
e no meio da viga será: $+ \frac{1}{3} Pf$

Novamente vê-se que os momentos finais são independentes das excentricidades nos apoios.

3.2.3 - Viga biengastada com cabo reto

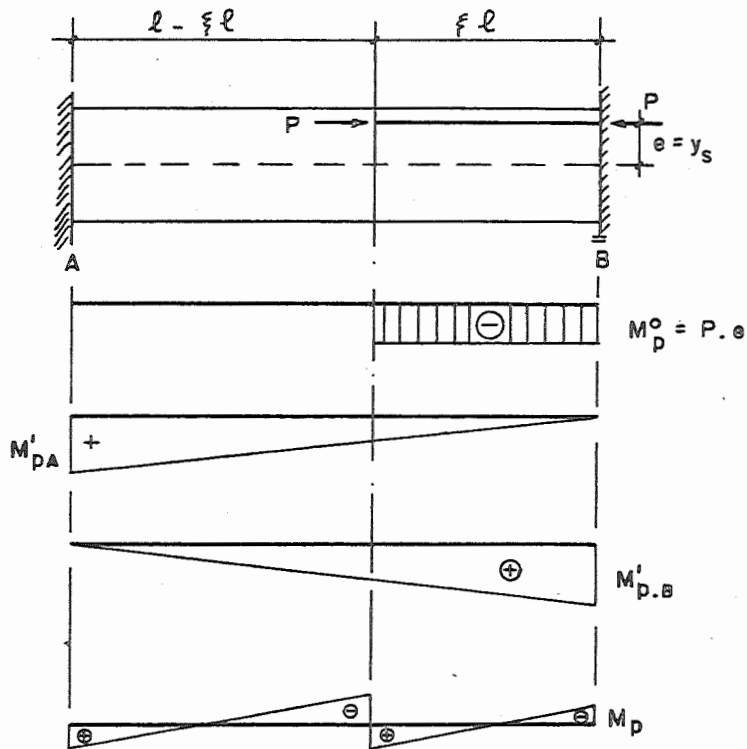
Fazendo nas equações anteriores $f = 0$, isto é, cabo reto, tira-se a seguinte conclusão:

Em vigas biengastadas os cabos retos, independentemente da sua posição, mesmo inclinados, não provocam nenhum momento final. Provocam porém, hiperestáticos de protensão M_p' . Tais vigas são, por este motivo, protendidas com protensão de efeito centrado e não apresentam nenhuma curvatura.



3.2.4 - Cabo reto com ancoragem no vão

Tem-se, muitas vezes, o cabo com ancoragem no vão da viga. Considere-se a viga indicada na figura.



$$EI\delta_{10} = \frac{1}{2} P \cdot e \cdot \xi^2 \ell$$

$$EI\delta_{20} = + P \cdot e \left(\frac{1+1-\xi}{2}\right) \xi \ell = + P \cdot e \cdot \xi \ell \left(+1 - \frac{\xi}{2}\right)$$

$$EI\delta_{11} = \frac{1}{3} \ell$$

$$EI\delta_{12} = + \frac{1}{6} \ell$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{6}X_2 &= -\frac{1}{2} Pe\xi^2 \\ + \frac{1}{6}X_1 + \frac{1}{3}X_2 &= -Pe\xi\left(+1 - \frac{\xi}{2}\right) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 2X_1 + X_2 &= -3Pe\xi^2 \\ +X_1 + 2X_2 &= -6Pe\xi\left(+1 - \frac{\xi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$2X_1 + X_2 = -3Pe\xi^2$$

$$-2X_1 - 4X_2 = + 12Pe\xi\left(+1 - \frac{\xi}{2}\right)$$

$$-3X_2 = +3Pe\xi(-\xi+4-2\xi) \therefore X_2 = -Pe\xi(+4-3\xi)$$

$$X_2 = -Pe(-3\xi^2+4\xi)$$

$$\text{igualmente } X_1 = -P \cdot e(3\xi^2-2\xi)$$

Superpondo com o momento do sistema fundamental,

vem:

$$M_{p,A} = -P \cdot e(3\xi^2-2\xi) ; M_{p,B} = -P \cdot e(4\xi-3\xi^2-1)$$

3.2.5 - Viga engastada - apoiada com cabo parabólico com excentricidade qualquer

O sistema fundamental será, outra vez, a viga bi-apoiada. A incôgnita hiperestática será o momento de engastamento perfeito.

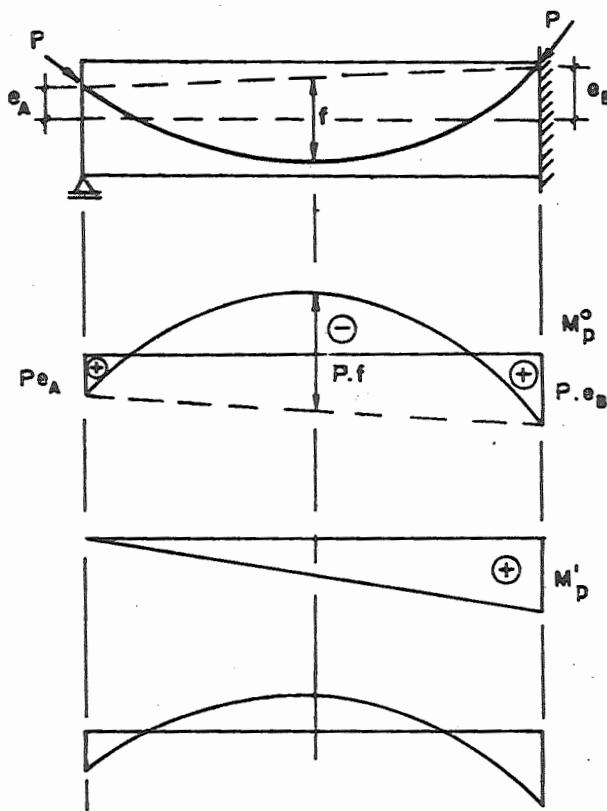
$$EI\delta_o = \frac{1}{3} lPf \cdot 1 + \frac{1}{6} l(Pe_A + 2Pe_B) = Pl\left(\frac{1}{3} f + \frac{1}{6} e_A + \frac{1}{3} e_B\right)$$

$$EI\delta_1 = \frac{1}{3} l$$

$$x = -P\left(f + \frac{1}{2} e_A + e_B\right)$$

o momento final no engastamento será:

$$M_{P,B} = Pe_B - P\left(f + \frac{1}{2} e_A + e_B\right) = -P\left(f + \frac{1}{2} e_A\right)$$



No meio do vão:

$$M_{P;0,5l} = P\left(\frac{e_A + e_B}{2} + f\right) - \frac{P}{2}\left(f + \frac{1}{2} e_A + e_B\right) = P\left(\frac{e_A}{4} + \frac{f}{2}\right)$$

3.2.6 - Viga apoiada engastada, com cabo poligonal de ex-
centricidades quaisquer

Procedendo da mesma forma que anteriormente, en-
contra-se o seguinte valor para o hiperestático:

$$M'_{P,B} = -P \left[e_B + \frac{1}{2} f(1+\xi) \right]$$

Com este valor, o momento na extremidade engastada será:

$$M'_{P,B} = -P \frac{f}{2} (1+\xi)$$

Na secção x teremos:

$$M_{P,x} = -Pf \left[\frac{1}{2} \xi (1+\xi) - 1 \right]$$

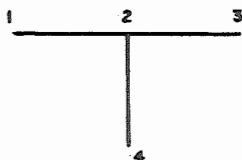
Fazendo $x = l/2$, isto é, tomando o vértice do
polígono no centro da viga, temos:

$$M_{P,B} = -\frac{3}{4} Pf$$

3.3 - MÉTODO DE KANI

O método iterativo desenvolvido por Kani é um
emprego direto do processo dos deslocamentos.

Para o nó 2 da estrutura, onde chegam as barras
supostas engastadas, isto é, o nó 2 não gira, temos a se-
guinte equação:



$$m_{21}\phi_1 + m_{22}\phi_2 + m_{23}\phi_3 + m_{24}\phi_4 = -m_{20}$$

isto é, a soma dos momentos das extremidades das barras no nó 2, que aparecem com uma rotação ϕ_2 do nó 2 (nó principal) e ϕ_1 , ϕ_3 , e ϕ_4 (nós adjacentes) deve ser igual e de sinal contrário ao momento de engastamento perfeito. É, portanto, a equação de equilíbrio para o nó 2.

Os coeficientes m_{ii} são, geralmente, significativamente maiores do que os coeficientes m_{in} , isto é, no sistema geral de equações, os elementos da diagonal principal são preponderantes. Como primeira aproximação (1), fazemos todos os elementos fora da diagonal principal igual a zero, isto é, para a equação do nó 2, vem

$$m_{22}^{\phi_2^{(1)}} = -m_{20}$$

na segunda aproximação (2), colocamos os assim determinados $\phi_i^{(1)}$ nas equações e encontramos para o nó 2

$$m_{22}^{\phi_2^{(2)}} = -m_{20} - [m_{21}^{\phi_1^{(1)}} + m_{23}^{\phi_3^{(1)}} + m_{24}^{\phi_4^{(1)}}]$$

Esta operação é repetida até que o resultado do novo passo é suficientemente próximo do resultado do passo anterior.

Reconhecemos no método de Kani as seguintes propriedades importantes:

- A compensação de um nó considerado leva em conta os nós vizinhos.
- A parcela $m_{ii}\phi_i$ é sucessivamente melhorada. Um erro eventual é automaticamente compensado.
- Quando a diagonal principal prepondera, o que é geralmente o caso, a convergência é mais rápida que o Cross.
- Em sistemas deslocáveis podem ser introduzidos também giros de barras e, as suas ações na distribuição de momentos, podem ser calculadas da mesma forma, enquanto que pelo método de Cross, são necessários diversos sistemas separados.

No uso prático do método de Kani, os momentos são sucessivamente aproximados. Para isso, introduzimos os fatores de giros μ_{in} , os quais correspondem aos coeficientes de distribuição do método de Cross. Para barras de I constante, este é dado pela relação.

$$\mu_{in} = \frac{-\beta_{in}}{2\sum_i \beta_{im}}$$

(Para EI variável vale a mesma equação porém, a determinação de β_{in} é mais complicada).

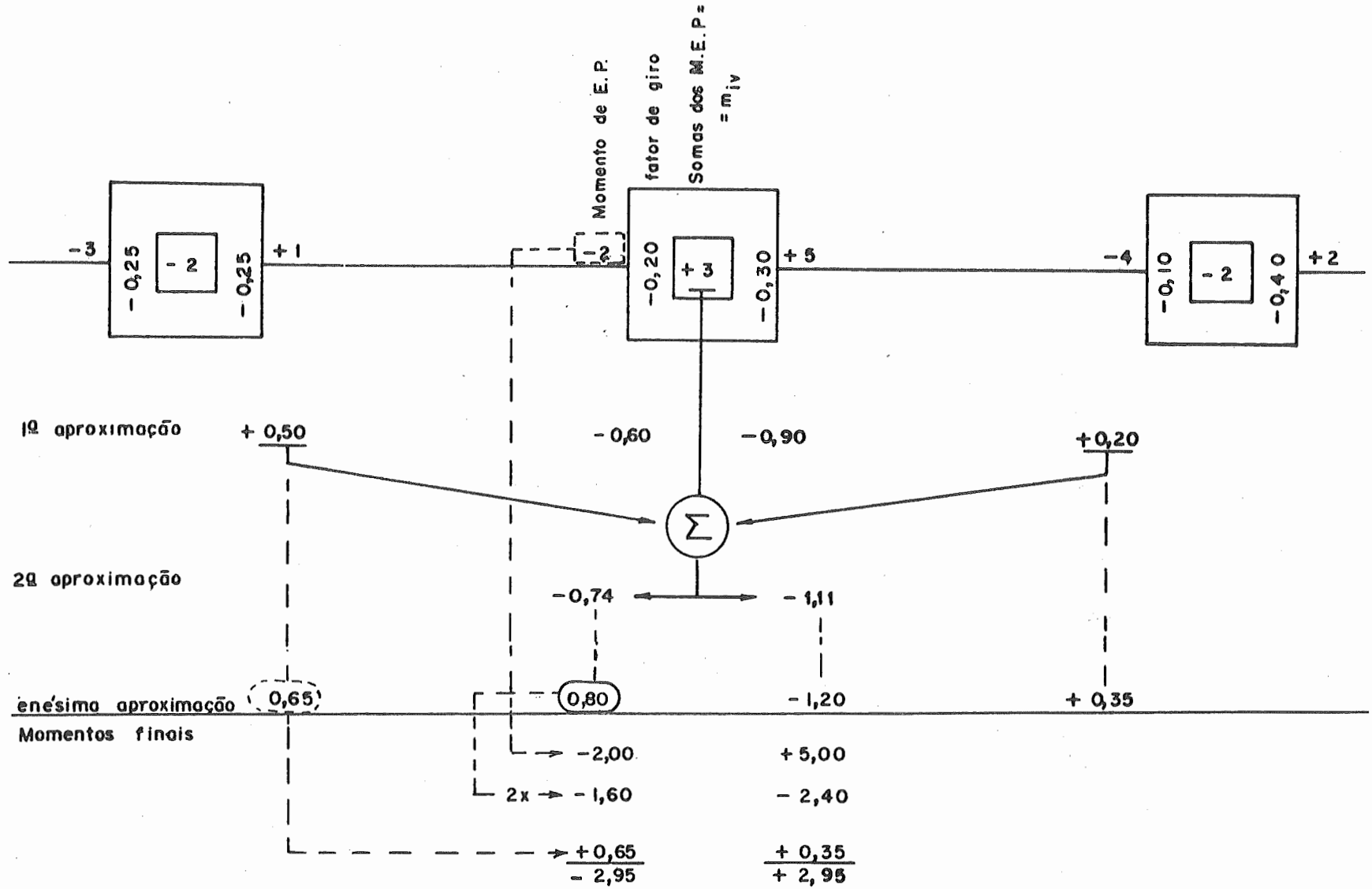
Estes fatores de giros são metade dos coeficientes de distribuição do método de Cross porque está implícito que no método de Kani não existe o coeficiente de transmissão: Um momento extremo, provocado pelo giro de nó vizinho, \bar{M}_{ni} , é considerado no nó com metade de seu valor. Por isso, no cômputo do momento final, o momento que aparece de vido ao giro no nó considerado deve ser multiplicado por 2. O esquema seguinte esclarece os passos de cálculo (para facilitar foram introduzidos números).

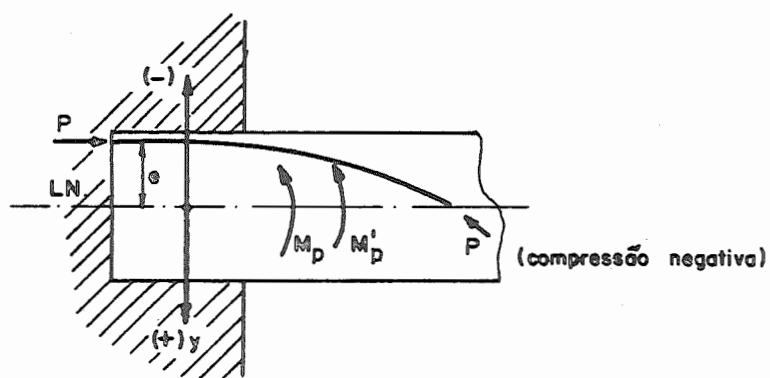
3.4 - TABELAS DE MOMENTOS M_p e M'_p EM VIGAS BIENGASTADAS E ENGASTADAS-ARTICULADAS

Na extremidade A da viga atuam (ver figura)

$$M_{p,A} = M_{p,A}^0 + M'_{p,A} ; M_{p,A}^0 = P \cdot e$$

$M'_{p,A}$ = hiperestático de protensão, estabelece a compatibilidade da viga protendida





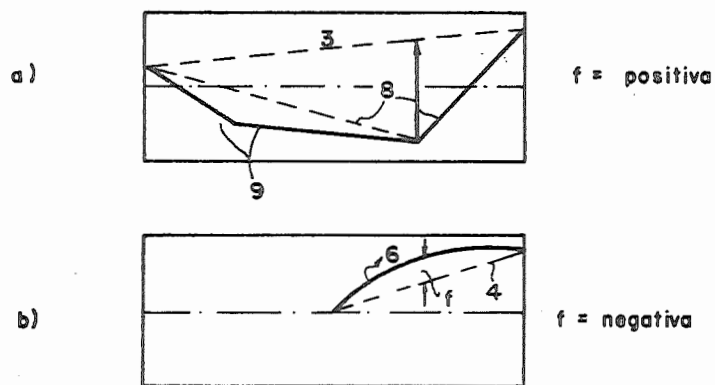
Para o emprego das fórmulas é necessário usar as seguintes regras de sinal:

P, quando é de compressão sobre o concreto, deve ser tomado sempre negativo.

As excentricidades são positivas quando são medidas para baixo, a partir de L.N.

As flechas de parábolas ou polígonos são positivas se estes têm a concavidade voltada para cima.

A tabela apresenta, sob nº 1-10, casos simples de protensão. Por superposição eles conduzem aos momentos para a maioria dos casos que aparecem na prática, como por exemplo, o cabo indicado na figura seguinte.



Emprego da tabela: a) - Superposição dos nºs 3, 8 e 9

b) - Superposição dos nºs 4 e 6

Os casos 11-13 são fórmulas para cabos comumente usados na prática, isto é, de forma parabólica. Para o emprego das fórmulas é necessário conhecer-se a posição do ponto de inflexão. As relações seguintes, deduzidas da geometria da parábola, facilitam o cálculo desse valor (figura).

O ponto de inflexão da parábola situa-se na linha que liga H com T, com isto temos:

Para I acima da L.N.

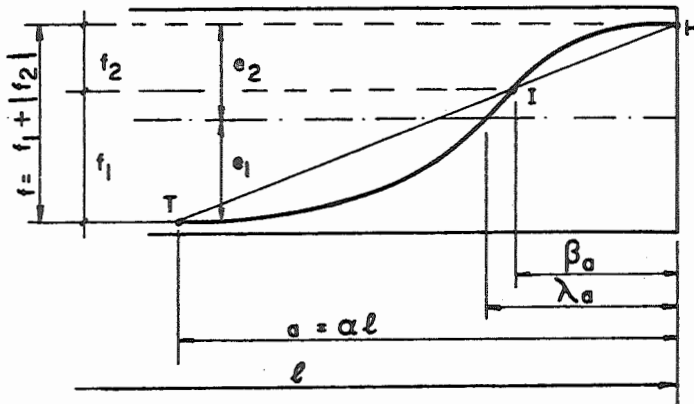
$$\beta = 1 - \frac{|f|}{|e_1|} (1-\lambda)^2$$

Para I abaixo da L.N.

$$\beta = \frac{|f|}{|e_2|} \lambda^2$$

$$f_1 = |f| (1-\beta) ; f_2 = |f| \beta$$

$$\chi = \alpha \cdot \beta$$



3.5 - INFORMAÇÕES PARA O EMPREGO DOS PROCESSOS ITERATIVOS

Para o cálculo de estruturas hiperestáticas utilizam-se, muitas vezes, os processos iterativos de Cross, Kani, e outros, e seu emprego é facilitado pelo uso de tabelas.

Como se sabe, tomam-se primeiro todos os nós engastados e, determinam-se os momentos de engastamento perfeito de todas as barras isoladamente, provocados pelo carregamento externo. A soma desses momentos de engastamento em um nó fornece o momento a ser equilibrado. Solta-se então um nó e, o momento a ser equilibrado é distribuído de acordo com as rigidezes às barras desse nó. Aos nós vizinhos são transmitidos momentos que são determinados pelo coeficiente de transmissão.

Com momentos de protensão é de se notar que o nó é solicitado apenas pelo hiperestático de protensão M'_p . A força de protensão P e também o momento do sistema fundamental M_p^0 atuam na própria barra e não no nó.

Para a viga de três tramos indicada na figura, com cabo parabólico contínuo temos, no nó 2, de acordo com as fórmulas deduzidas, o seguinte momento para equilibrar:

$$\bar{M}'_{p2} = +(M'_{p2,e} + M'_{p2,d}) = -P\left(\frac{2}{3}f_1 + y_2\right) + P\left(\frac{2}{3}f_2 + y_2\right)$$

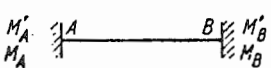
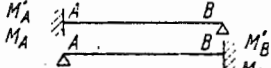
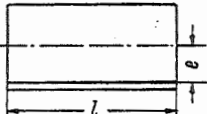
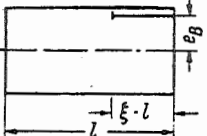
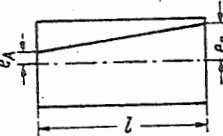
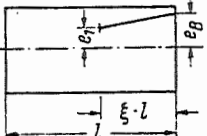
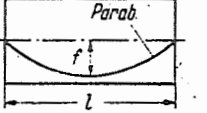
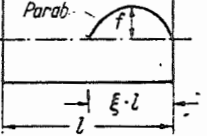
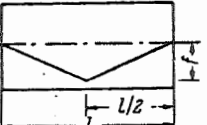
$$\bar{M}'_{p2} = -\frac{2}{3} P(f_1 - f_2)$$

Para cabos contínuos sobre apoios (o que acontece na maioria das vezes porque ancoragem de cabos na região do apoio é raro) pode-se então tomar diretamente M'_p como momento a ser equilibrado.

Se $y_{2,e}$ da parábola do primeiro tramo fosse diferente de $y_{2,d}$ da parábola do segundo tramo, então a excentricidade teria influência. Este caso aparece em pórti-


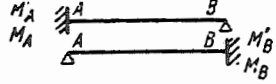
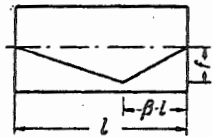
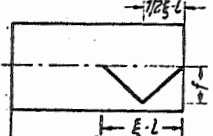
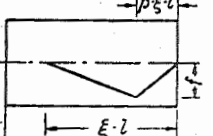
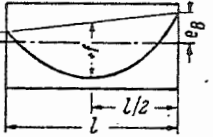
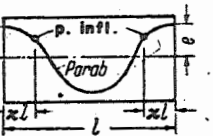
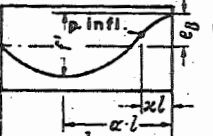
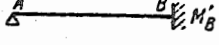
MOMENTO DE ENGASTAMENTO FINAL E HIPERESTÁTICO DE PROTENSÃO EM VIGAS COM EI CONSTANTE

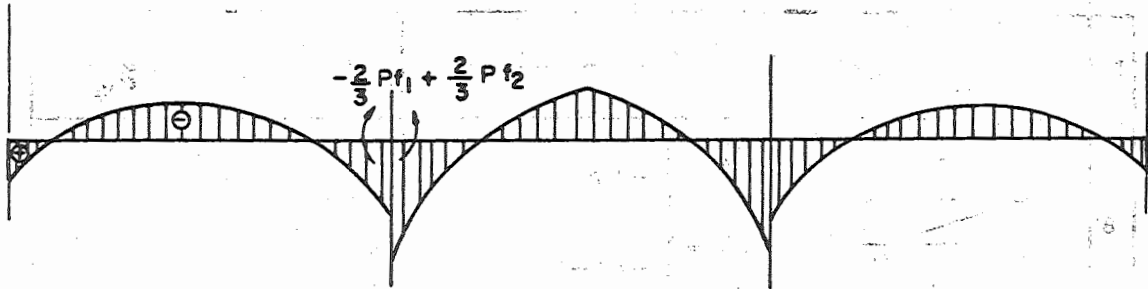
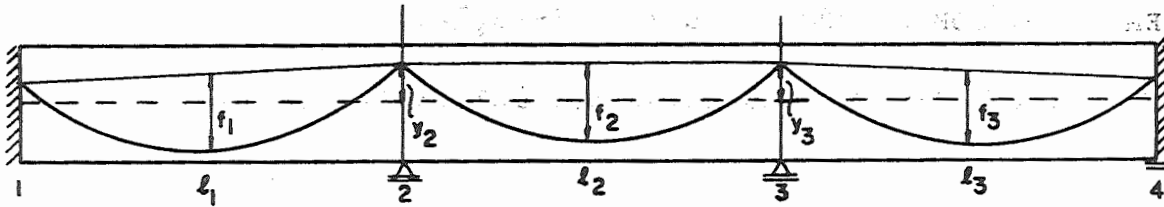
(Os valores dados devem ser multiplicados por P)

Nr.	Forma do cabo		
1		$\begin{aligned} M'_A &= -e \\ M_A &= 0 \\ M'_B &= -e \\ M_B &= 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} M'_A &= -\frac{3}{2}e \\ M_A &= -\frac{1}{2}e \\ M'_B &= -\frac{3}{2}e \\ M_B &= -\frac{1}{2}e \end{aligned}$
2		$\begin{aligned} M'_A &= \left. \begin{aligned} & -e_B(3\xi^2 - 2\xi) \\ M_A &= \end{aligned} \right\} \\ M'_B &= -e_B(4\xi - 3\xi^2) \\ M_B &= -e_B(4\xi - 3\xi^2 - 1) \end{aligned}$	$\begin{aligned} M'_A &= \left. \begin{aligned} & -\frac{3}{2}e_B\xi^2 \\ M_A &= \end{aligned} \right\} \\ M'_B &= -\frac{3}{2}e_B(2\xi - \xi^2) \\ M_B &= -\frac{3}{2}e_B\left(2\xi - \xi^2 - \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$
3		$\begin{aligned} M'_A &= -e_A \\ M_A &= 0 \\ M'_B &= -e_B \\ M_B &= 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} M'_A &= -\frac{1}{2}(2e_A + e_B) \\ M_A &= -\frac{1}{2}e_B \\ M'_B &= -\frac{1}{2}(e_A + 2e_B) \\ M_B &= -\frac{1}{2}e_A \end{aligned}$
4		$\begin{aligned} M'_A &= \left. \begin{aligned} & -[e_1(2\xi^2 - \xi) + e_B(\xi^2 - \xi)] \\ M_A &= \end{aligned} \right\} \\ M'_B &= [2e_1(\xi^2 - \xi) + e_B(\xi^2 - 2\xi)] \\ M_B &= [2e_1(\xi^2 - \xi) + e_B(\xi^2 - 2\xi + 1)] \end{aligned}$	$\begin{aligned} M'_A &= \left. \begin{aligned} & -\frac{1}{2}(2e_1 + e_B)\xi^2 \\ M_A &= \end{aligned} \right\} \\ M'_B &= -\frac{1}{2}[e_1(3\xi - 2\xi^2) + e_B(3\xi - \xi^2)] \\ M_B &= -\frac{1}{2}[e_1(3\xi - 2\xi^2) + e_B(3\xi - \xi^2 - 2)] \end{aligned}$
5		$\begin{aligned} M'_A &= \left. \begin{aligned} & \\ M_A &= \end{aligned} \right\} -\frac{2}{3}f \\ M'_B &= \left. \begin{aligned} & \\ M_B &= \end{aligned} \right\} \end{aligned}$	$\begin{aligned} M'_A &= \left. \begin{aligned} & \\ M_A &= \end{aligned} \right\} -f \\ M'_B &= \left. \begin{aligned} & \\ M_B &= \end{aligned} \right\} \end{aligned}$
6		$\begin{aligned} M'_A &= \left. \begin{aligned} & -\frac{2}{3}f(3\xi^2 - 2\xi) \\ M_A &= \end{aligned} \right\} \\ M'_B &= \left. \begin{aligned} & -\frac{2}{3}f(4\xi - 3\xi^2) \\ M_B &= \end{aligned} \right\} \end{aligned}$	$\begin{aligned} M'_A &= \left. \begin{aligned} & -f \cdot \xi^2 \\ M_A &= \end{aligned} \right\} \\ M'_B &= \left. \begin{aligned} & -f \cdot (2\xi - \xi^2) \\ M_B &= \end{aligned} \right\} \end{aligned}$
7		$\begin{aligned} M'_A &= \left. \begin{aligned} & \\ M_A &= \end{aligned} \right\} -\frac{1}{2}f \\ M'_B &= \left. \begin{aligned} & \\ M_B &= \end{aligned} \right\} \end{aligned}$	$\begin{aligned} M'_A &= \left. \begin{aligned} & \\ M_A &= \end{aligned} \right\} -\frac{3}{4}f \\ M'_B &= \left. \begin{aligned} & \\ M_B &= \end{aligned} \right\} \end{aligned}$

MOMENTO DE ENGASTAMENTO FINAL E HIPERESTÁTICO DE PROTENSÃO EM VIGAS COM EI CONSTANTE (Continuação)

(Os valores dados devem ser multiplicados por P)

Nr.	Forma do cabo		
8		$\begin{aligned} M'_A &= \\ M_A &= \end{aligned} \left. \begin{aligned} & -f \cdot \beta \\ & -f(1-\beta) \end{aligned} \right\}$	$\begin{aligned} M'_A &= \\ M_A &= \end{aligned} \left. \begin{aligned} & -\frac{1}{2}f(1+\beta) \\ & -\frac{1}{2}f(2-\beta) \end{aligned} \right\}$
9		$\begin{aligned} M'_A &= \\ M_A &= \end{aligned} \left. \begin{aligned} & -\frac{1}{2}f(3\xi^2 - 2\xi) \\ & -\frac{1}{2}f(4\xi - 3\xi^2) \end{aligned} \right\}$	$\begin{aligned} M'_A &= \\ M_A &= \end{aligned} \left. \begin{aligned} & -\frac{3}{4}f \cdot \xi^2 \\ & -\frac{3}{4}f(2\xi - \xi^2) \end{aligned} \right\}$
10		$\begin{aligned} M'_A &= \\ M_A &= \end{aligned} \left. \begin{aligned} & -f \cdot \xi [\xi(1+\beta) - 1] \\ & -f \cdot \xi [2 - \xi(1+\beta)] \end{aligned} \right\}$	$\begin{aligned} M'_A &= \\ M_A &= \end{aligned} \left. \begin{aligned} & -\frac{1}{2}f\xi^2(1+\beta) \\ & -\frac{1}{2}f\xi[3 - \xi(1+\beta)] \end{aligned} \right\}$
11		$\begin{aligned} M'_A &= -\frac{1}{3}(2f + 3e_A) \\ M_A &= -\frac{2}{3}f \\ M'_B &= -\frac{1}{3}(2f + 3e_B) \\ M_B &= -\frac{2}{3}f \end{aligned}$	$\begin{aligned} M'_A &= -\frac{1}{2}(2f + 2e_A + e_B) \\ M_A &= -\frac{1}{2}(2f + e_B) \\ M'_B &= -\frac{1}{2}(2f + e_A + 2e_B) \\ M_B &= -\frac{1}{2}(2f + e_A) \end{aligned}$
12		$\begin{aligned} M'_A &= -\frac{1}{3}[2f(1-x) + 3e] \\ M_A &= -\frac{2}{3}f(1-x) \\ M'_B &= -\frac{1}{3}[2f(1-x) + 3e] \\ M_B &= -\frac{2}{3}f(1-x) \end{aligned}$	$\begin{aligned} M'_A &= -\frac{1}{2}[2f(1-x) + 3e] \\ M_A &= -\frac{1}{2}[2f(1-x) + e] \\ M'_B &= -\frac{1}{2}[2f(1-x) + 3e] \\ M_B &= -\frac{1}{2}[2f(1-x) + e] \end{aligned}$
13		<div style="text-align: center;">  </div> $M'_B = -\frac{1}{4} \{ f' [5 - \alpha(2-\alpha) - x(4-x)] + e_B [5 + \alpha(2-\alpha)] \}$ $M_B = e_B + M'_B$ $f' = e_a - e_B; \quad (e_a = \max e)$	

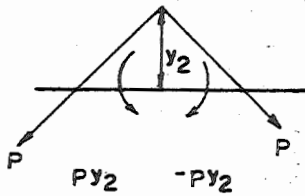


Momento de engastamento

$$M_p = M_p^o + M_p' = M_p'$$

porque $\Sigma M_p^o = 0$

$$M_p^o = 0 ; \bar{M}_p' = -\frac{2}{3} P (f_1 - f_2)$$



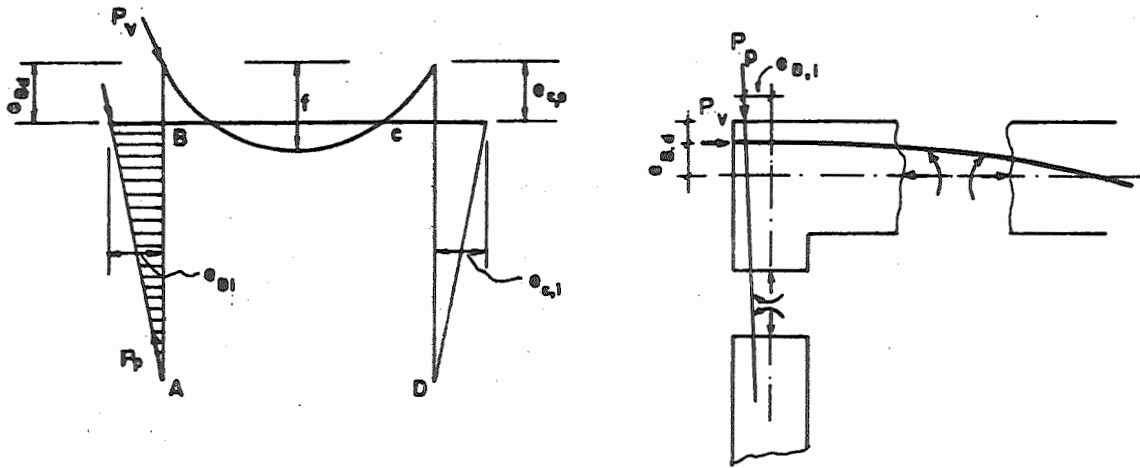
cos protendidos, onde não apenas as excentricidades no nó B e C (figura) como também o valor da força de protensão pode ser diferente em ambas as direções (viga e pilar).

No nó B, imaginado impedido de girar, o momento devido a protensão será então:

$$M_{pB}' = -P_p \cdot e_{Bi} + P_v \left(\frac{2}{3} f + e_{B,d} \right)$$

Chega-se ao mesmo valor se se considerar o nó B isolado. No nó atuam, como forças externas, as duas forças de protensão P_p e P_v . Como esforços internos atuam, a ação do pilar no nó

$$M_p \text{ e } N_p$$



e ação da viga sobre o nó

$$M_v \text{ e } N_v$$

De acordo com o que foi deduzido anteriormente, o momento em B do pilar engastado em B, com cabo reto é $M_p = 0$. O momento da viga engastada em B e C é:

$$M_v = -\frac{2}{3} P_v f$$

Como o nó deve estar em equilíbrio sob a ação de todos os momentos, tem-se:

$$- P_v e_{B,d} + P_p e_{B,i} + M_v + M_p + \bar{M}'_{p,B} = 0$$

ou

$$- P_v e_{B,d} + P_p \cdot e_{B,i} - \frac{2}{3} P_v f + 0 + \bar{M}'_{p,B} = 0$$

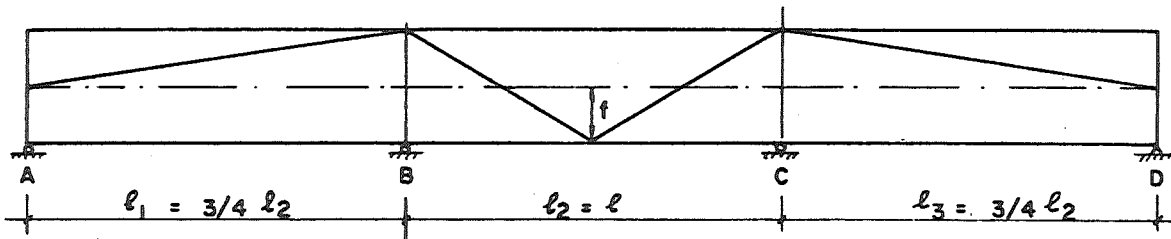
de onde segue o momento

$$\bar{M}'_{p,B} = - P_p \cdot e_{B,i} + P_v \left(\frac{2}{3} f + e_{B,d} \right)$$

A compensação das partes hiperestáticas do momento \bar{M}_p das vigas engastadas, fornece o momento M_p ao qual deve ser superposto o momento do sistema fundamental.

3.6 - EXEMPLOS DE CÁLCULO

a) Resolver com o método de Cross, o exemplo d do item 2.2.



$$EI = \text{constante} ; y_{sB} = y_{sC} = -f$$

$$\text{Rigidezes: } \beta_{BA} = \beta_{CD} = \frac{3}{4} \frac{EI}{l_1} = \frac{EI}{l}$$

$$\beta_{BC} = \beta_{CB} = \frac{EI}{l}$$

Coefficientes de distribuição:

$$\mu_{BA} = \frac{\frac{EI}{l}}{\frac{EI}{l} + \frac{EI}{l}} = 0,5$$

$$\mu_{BA} = \mu_{BC} = \mu_{CB} = \mu_{CD}$$

Coefficientes de transmissão:

$$\gamma_{BA} = \gamma_{CD} = 0$$

$$Y_{BC} = Y_{CB} = 0,5$$

Momentos de engastamento perfeito:

$$\bar{M}'_{pBA} = - y_{sB}^{(-)} P^{(-)}$$

$$\bar{M}'_{pBC} = M'_{pCB} = 0 \quad (\int M^+ = \int M^-)$$

$$\bar{M}'_{pCD} = + y_{sC}^{(-)} P^{(-)}$$

O valor $y_{sB} P$ será tomado igual a 1 para a compensação

0,5	0,5		0,5	0,5
-1	0		0	+1
+0,5	+0,5	→	+0,25	
	-0,313		← -0,625	-0,625
+0,156	+0,156	→	+0,078	
	-0,019		-0,039	-0,039
+0,010	+0,010		+0,005	
			-0,002	-0,002
-0,334	+0,334		-0,334	+0,334

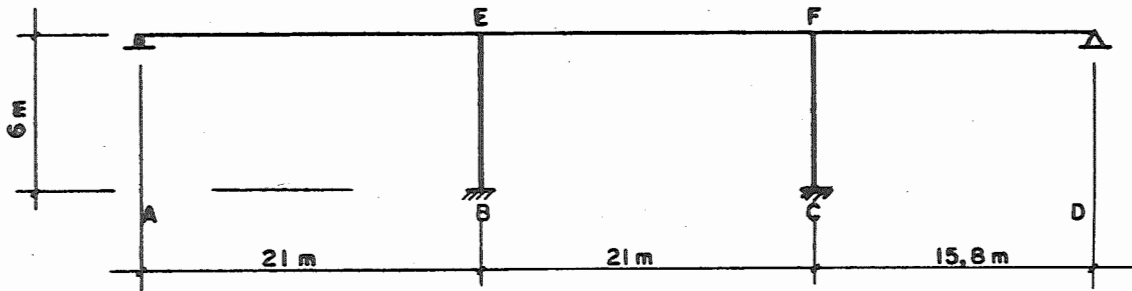
Momentos hiperestáticos provocados pela protensão:

$$M'_{pB} = M'_{pC} = - 0,334 y_{sB} \cdot P$$

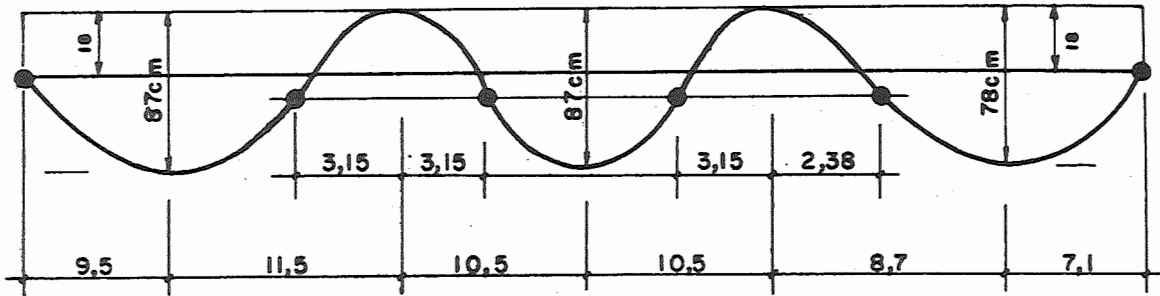
Nota: O uso da simetria leva a uma solução mais rápida do problema. Para barras simétricas e momentos de extremidade simétricos, respectivamente antissimétricos, as rigidezes podem ser definidas da seguinte maneira:

$$\left. \begin{array}{l}
 \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \beta_{in} = \frac{1}{\phi_{ii} + \phi_{in}} \quad \left| \quad = \frac{EJ}{2l} \\
 \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \beta_{in} = \frac{1}{\phi_{ii} - \phi_{in}} \quad \left| \quad = \frac{3}{2} \frac{EJ}{l}
 \end{array} \right\} \text{Para J Constante}$$

b) Determinar os hiperestáticos de protensão para a estrutura seguinte:



P_o	1070t	865t	720t
I	$0,376m^4$	$0,06m^4$	$0,376m^4$



$$I_C = 0,376m^4$$

$$l'_{EB} = 37,6 = l'_{CF}$$

$$\beta_{AE} = \frac{3}{21} = 0,1429 ; \beta_{EF} = \frac{4}{21} = 0,1905 ; \beta_{FD} = \frac{3}{15,8} = 0,1899$$

$$\beta_{BE} = \frac{4}{37,6} = 0,1064 ; \beta_{CF} = \frac{4}{37,6} = 0,1064$$

$$\mu_{EA} = \frac{0,1429}{0,4398} = 0,32 ; \mu_{EF} = \frac{0,1905}{0,4398} = 0,43$$

$$\mu_{EB} = \frac{0,1064}{0,4398} = 0,25 ; \mu_{FE} = \frac{0,1905}{0,4868} = 0,39$$

$$\mu_{FD} = \frac{0,1899}{0,4868} = 0,39 ; \mu_{FC} = \frac{0,1064}{0,4868} = 0,22$$

Momentos de engastamento perfeito:

Vão extremo

$$M'_P = - \frac{1}{4} \left\{ f' [5 - \alpha(2 - \beta) - \beta(4 - \beta)] + y_B [5 + \alpha(2 - \alpha)] \right\} P$$

Vão interno:

$$M'_P = - \frac{1}{3} [2f(1 - \beta) + 3e] P$$

Vão extremo AE: $\alpha = 0,5476$; $\beta = 0,15$; $y_c = 18$; $P = 1070t$

$$\begin{aligned} M'_{P,EA} &= - \frac{1}{4} \left\{ 0,87 [5 - 0,5476(2 - 0,15) - 0,15(4 - 0,15)] \right. \\ &\quad \left. - 0,18 [5 + 0,5476(2 - 0,5476)] \right\} (-1070) \\ &= - \frac{1}{4} \left\{ 0,87 [5 - 1,0131 - 0,5775] - 0,18 [5 + 0,7953] \right\} (-1070) = \\ &= - \frac{1}{4} (296,6178 - 104,3154) \times 10^{-2} \cdot (-1070) = +514tm \end{aligned}$$

Vão extremo FD: $\alpha = 0,5506$; $\beta = 0,1506$; $y_F = -0,18$;

$$P = -720 ; f = 0,78$$

$$\begin{aligned} M'_{P,FD} &= - \frac{1}{4} \left\{ 0,78 [5 - 0,5506(2 - 0,1506) - 0,1506(4 - 0,1506)] - \right. \\ &\quad \left. - 0,18 [5 + 0,5506(2 - 0,5506)] \right\} (-720) = \\ &= - \frac{1}{4} \left\{ 0,78 (5 - 1,0183 - 0,5797) - 0,18 (5 + 0,7980) \right\} (-720) \\ &= \frac{720}{4} (2,6536 - 1,0436) = +290tm \end{aligned}$$

$$M'_{P,FD} = +290tm$$

Vão interno: $\beta = 0,15$; $e = -0,18$; $f = 0,87$; $P = -865tf$

$$M'_{p,EF} = -\frac{1}{3}[2.0,87(1-0,15) - 3.0,18](-865) =$$

$$-\frac{1}{3}[1,479-0,54](-865) = 271tm$$

0,32	0,43	0,39	0,39
+514	-271	+271	-290
0,25			
- 78	-104	- 52	0,22 + 28
- 61			
- 5	+ 14	+ 28	+ 16 + 1
- 4			
+431	- 6	- 3	+ 1 -261
- 65			
	-367		+ 17
		+ 1	
		+245	
- 30			+ 8
- 2			
- 32			+ 8

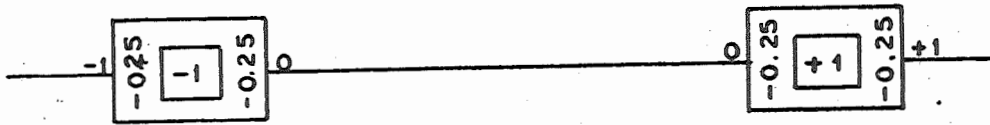
c) Para a viga indicada em 2.2.d temos:

$$\beta_{BA} = \frac{3}{\ell^3} = \frac{3}{\frac{3}{4}\ell} = \frac{4}{\ell} ; \beta_{BC} = \frac{4}{\ell^3} = \frac{4}{\ell}$$

$$\mu_{BA} = -\frac{\frac{4}{\ell}}{2\left(\frac{4}{\ell} + \frac{4}{\ell}\right)} = -0,25 ; \mu_{BC} = -0,25$$

Momentos de engastamento perfeito = $-y_{s,B}^P$

Com estes valores montamos o esquema seguinte:



+0,25	+0,25	-0,313	-0,313
+0,328	+0,328	-0,332	-0,332
+0,333	+0,333	-0,333	-0,333
-1,000	0	0	1,000
+0,666	+0,666	-0,666	-0,666
-0,334	-0,333	+0,333	+0,334
	+0,333	-0,333	

$$M_N^s = -0,334 y_{s,B}^{(-)} P^{(-)}$$

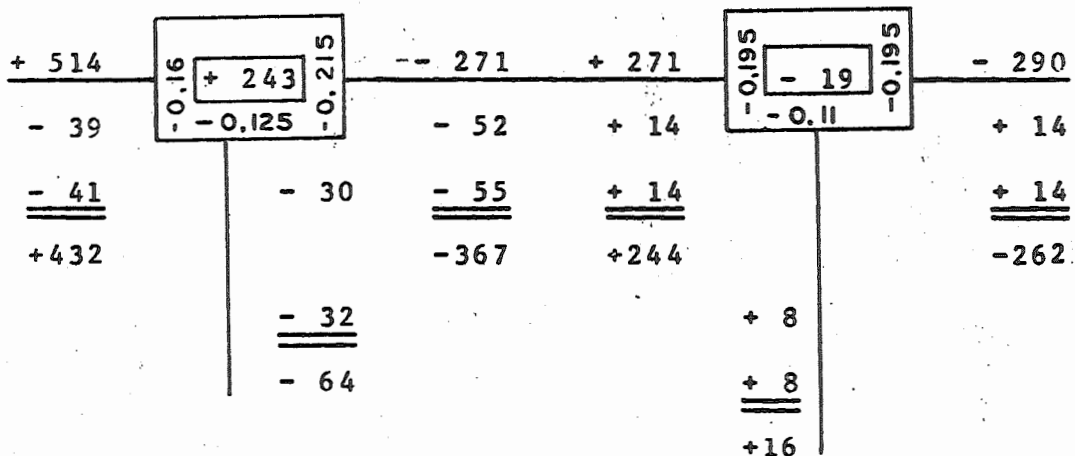
d) Resolver o pórtico do ítem 3.6.b

De acordo com o já calculado, temos

$$\mu_{EA} = -0,16 ; \mu_{EF} = -0,215 ; \mu_{EB} = -0,125$$

$$\mu_{FC} = -0,11 ; \mu_{FE} = -0,195 ; \mu_{FD} = -0,195$$

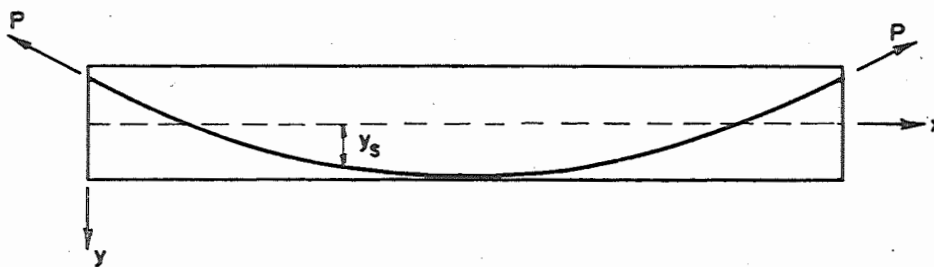
Os momentos de engastamento perfeito são os mesmos determinados anteriormente.



4 - USO DAS FORÇAS RADIAIS

4.1 - GENERALIDADES

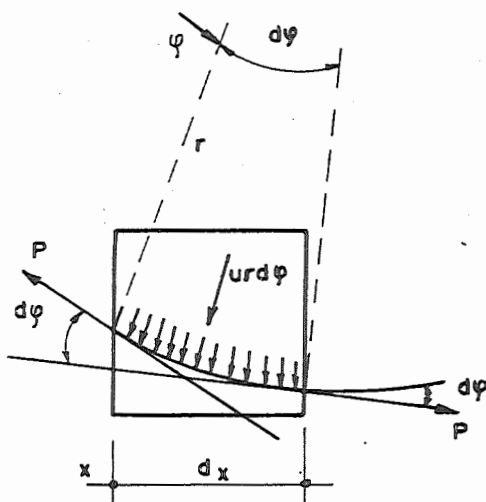
Imaginemos uma viga com um cabo de protensão, sem aderência, como indica a figura.



Pela aplicação da força de protensão P nas extremidades, a tendência do cabo é de se retificar, o que é impedido pelo aparecimento de forças radiais que o concreto aplica sobre o cabo. Analisemos um elemento dx desta viga.

Para cabos cujas curvas são muito abatidas, e que $1 + (y')^2 \approx 1$, temos:

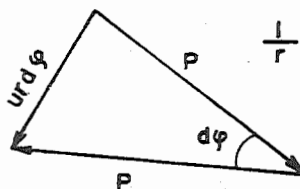
$$u = Py''$$



$$ur d\varphi = 2P \operatorname{sen} \frac{d\varphi}{2} \approx P \cdot d\varphi$$

$$P = ur$$

$$\frac{1}{r} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}}$$

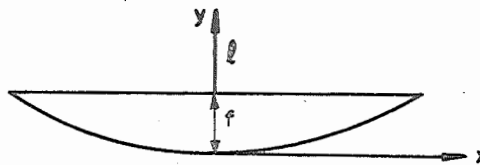


Conhecendo-se então a forma do cabo em relação a dois eixos de referência e a força de protensão aplicada, podem ser deduzidas da equação do cabo, as inclinações das tangentes ao cabo em cada ponto e as curvaturas.

A partir de P e das curvaturas em cada secção, podem ser calculadas as cargas distribuídas que agem perpendicularmente ao cabo, e que o mantem com a forma pré-estabelecida:

$$u(x) = \frac{P}{r(x)}$$

valor variável de ponto para ponto em função da forma do cabo. Se o cabo for circular, resulta $r = \text{constante}$ e, portanto, a carga distribuída é constante ao longo do cabo. Em trechos retos $r = \infty$ e, portanto a carga distribuída é nula. Para cabos parabólicos, pouco abatidos temos:



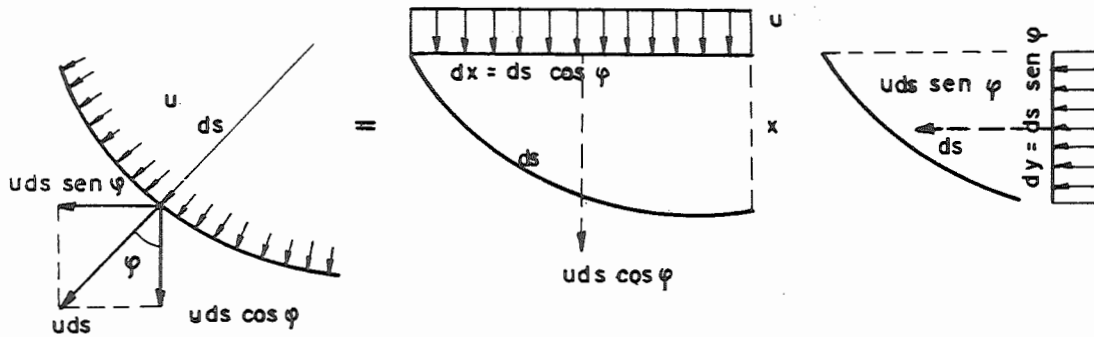
$$y = \frac{4f}{l^2} x^2$$

$$y'' = \frac{8f}{l^2} \quad e$$

$u = \frac{8f}{l^2} P$

Se as inclinações do cabo em relação ao eixo horizontal x (eixo baricêntrico da viga) forem pequenas, u poderá ser admitido como carga vertical uniformemente distribuída.

A carga distribuída u normal ao cabo, se decompõe em duas partes: uma carga distribuída igual a u , vertical, distribuída ao longo da projeção horizontal do cabo sobre o eixo x , na mesma extensão da carga normal ao cabo; uma carga distribuída igual a u , horizontal, distribuída

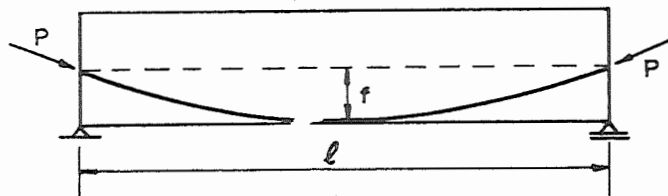


ao longo da projeção vertical do cabo sobre o eixo y, na mesma extensão da carga normal ao cabo.

Embora as cargas distribuídas, horizontal e vertical sejam iguais, a horizontal é quase sempre desprezível, pois age uma extensão relativamente pequena.

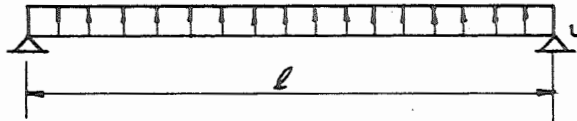
Conhecidas as forças u que atuam no cabo, serão conhecidas também as reações ($-u$) que atuam no interior da bainha, sobre o concreto. Será então possível estudar separadamente as duas estruturas parciais: cabo com forma pré-fixada, solicitado por uma força de tração P e secção de concreto, recebendo nos pontos extremos do cabo forças P de compressão e, nos pontos de contato, pressões u perpendiculares à bainha com valor P/r , orientadas para o lado côncavo da curvatura.

Consideremos a viga isostática de vão ℓ , protendida com um cabo parabólico de flecha f no meio do vão.



A carga uniformemente distribuída vale:

$$u = \frac{8f}{\ell^2} P$$



O momento fletor no meio do vão é:

$$M = \frac{u l^2}{8} = fP$$

A força cortante no apoio é:

$$V = u \frac{l}{2} = \frac{4fP}{l} = P \cdot \operatorname{tg} \phi \approx P \operatorname{sen} \phi$$

O problema poderia ser encarado de outra forma: o cabo produz na viga momentos fletores. Trata-se então de calcular uma carga equivalente que produz estes mesmos momentos.

$$\frac{dM}{dx} = V ; M = \frac{4Pf}{l^2} x^2 ; \frac{dM}{dx} = \frac{8Pf}{l^2} x = V$$

$$\frac{dV}{dx} = -u \quad u = \frac{8f}{l^2} P$$

e com isto a carga uniforme estaria determinada e o cálculo dos esforços poderia ser completado, como já estamos habituados.

4.2 - CÁLCULO DOS ESFORÇOS

Numa viga contínua, como já vimos anteriormente, aparecem momentos "secundários" ou hiperestáticos de pro-tensão. Se estes momentos sobre os suportes são determina

dos, então conhece-se toda a distribuição sobre a viga. Por outro lado, o momento fletor primário no concreto é dado pela excentricidade da protensão numa viga simples; o momento resultante é a soma algébrica das duas parcelas, isto é:

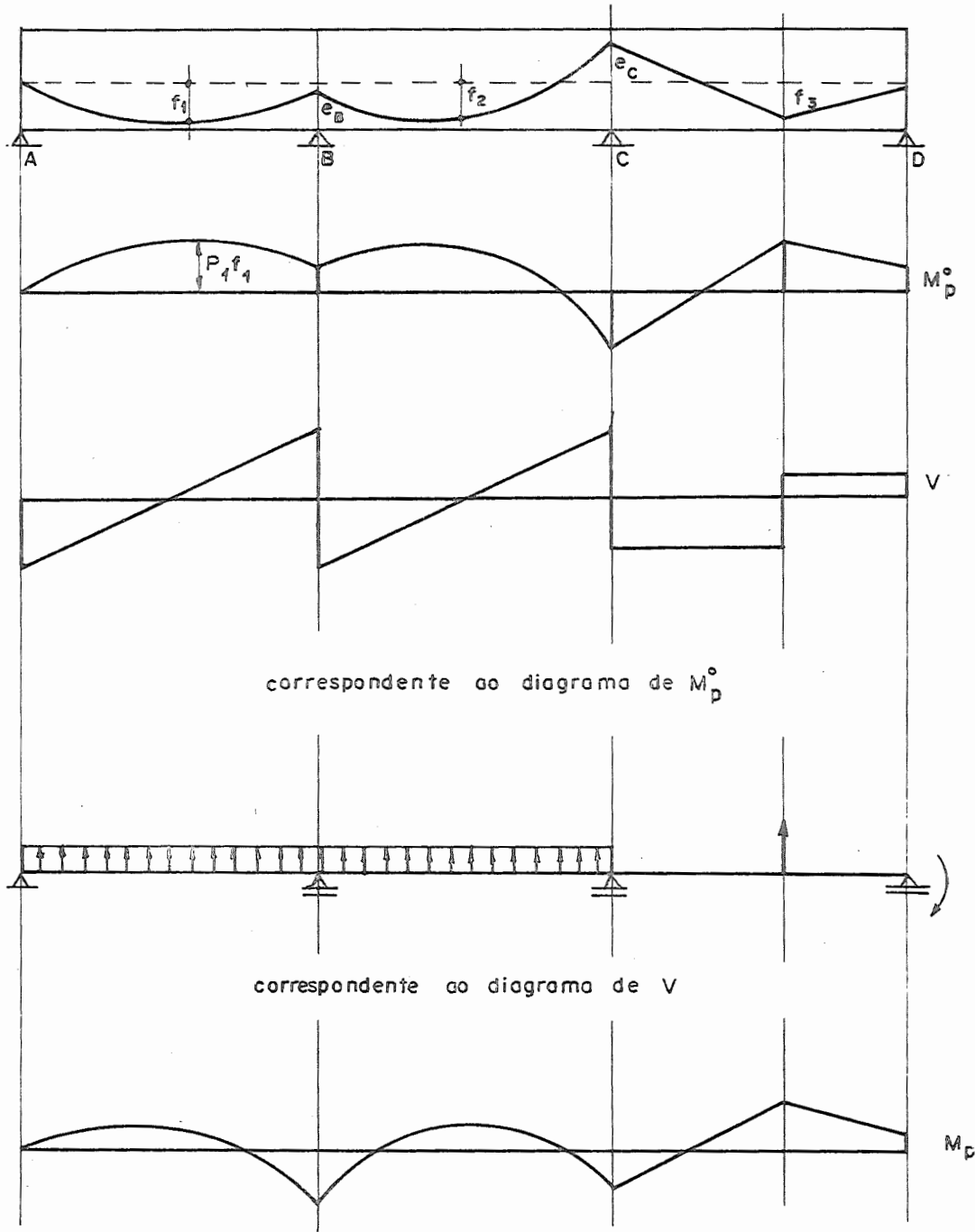
$$M_p = M_p^0 + M_p^i$$

No que segue, vamos dar um procedimento para se determinar diretamente o momento resultante, sobre os suportes. Determinado o momento resultante, o momento secundário pode ser determinado com a relação anterior.

O problema pode ser resolvido em duas etapas distintas: na primeira, imagina-se a estrutura sem os suportes superabundantes (sistema fundamental) e determina-se a carga equivalente que produz o mesmo momento neste sistema; na segunda etapa, determinam-se os valores superabundantes de modo a anular os deslocamentos nos suportes. Assim, primeiro considera-se a viga como se fosse simplesmente apoiada. Desenha-se o diagrama de momentos fletores produzidos pela excentricidade da protensão. Determina-se a carga equivalente correspondente a este diagrama; esta é a carga produzida pelo cabo sobre o concreto. Agora, com esta carga atuando na viga com seus suportes reais, calculam-se os momentos resultantes por qualquer método conhecido.

Referindo à figura seguinte temos os seguintes passos:

- 1) Desenhar o momento primário para a viga inteira, causado somente pela protensão, como se a viga não tivesse suportes. Este é dado simplesmente pela excentricidade multiplicada pela força de protensão.
- 2) Do diagrama desenhado acima, determinar o diagrama de forças cortantes correspondente. Este pode ser determinado ou graficamente ou algebricamente.



Momento resultante, correspondente ao carregamento u

- 3) Do diagrama de força cortante deduzir o diagrama do carregamento correspondente. Este também pode ser determinado ou graficamente ou algebricamente.
- 4) Agora, para a carga obtida em 3, atuando na viga contínua com seus suportes reais, e incluindo qualquer momento singular, como aqueles que podem ocorrer nas extremidades das vigas devido à excentricidade do cabo, determina-se o diagrama dos momentos resultantes.

Note-se que o procedimento acima envolve somente princípios já conhecidos dos engenheiros, exceto, talvez, determinar cargas e forças cortantes do diagrama de momentos. Contudo, com pequena experiência, a arte pode ser facilmente aprimorada. Frequentemente não é necessário determinar o diagrama de forças cortantes, podendo obter o diagrama de cargas diretamente do diagrama de momentos.

Para facilitar o traçado do diagrama de carga diretamente do diagrama de momento, faremos as seguintes considerações, baseadas na figura seguinte:

- 1) Na extremidade da viga, a força P de protensão do cabo sobre o concreto pode ser decomposta em três componentes: força axial $P \cos \theta_1 \approx P$, atuando na extremidade da ancoragem. Esta, usualmente, não tem efeito no momento fletor de uma viga contínua, mas pode produzir momentos em um pórtico rígido, devido ao encurtamento axial. Uma força transversal $P \sin \theta_1 = P \theta_1 = P \operatorname{tg} \theta_1$, aplicada ao suporte e equilibrada pela reação vertical. Esta também não produz momentos numa viga contínua. Seu efeito num pórtico rígido deverá ser pequeno. Um momento $P \cos \theta_1 \cdot e = P_e$, atuando na extremidade da viga. Este produzirá momentos ao longo da viga toda e deverá ser incluído no cálculo da mesma.
- 2) Ao longo dos vãos, onde o cabo (ou linha neutra da viga) é curvo, serão aplicadas cargas verticais ao concreto. Dois casos comuns podem ser considerados: a) - Quando o

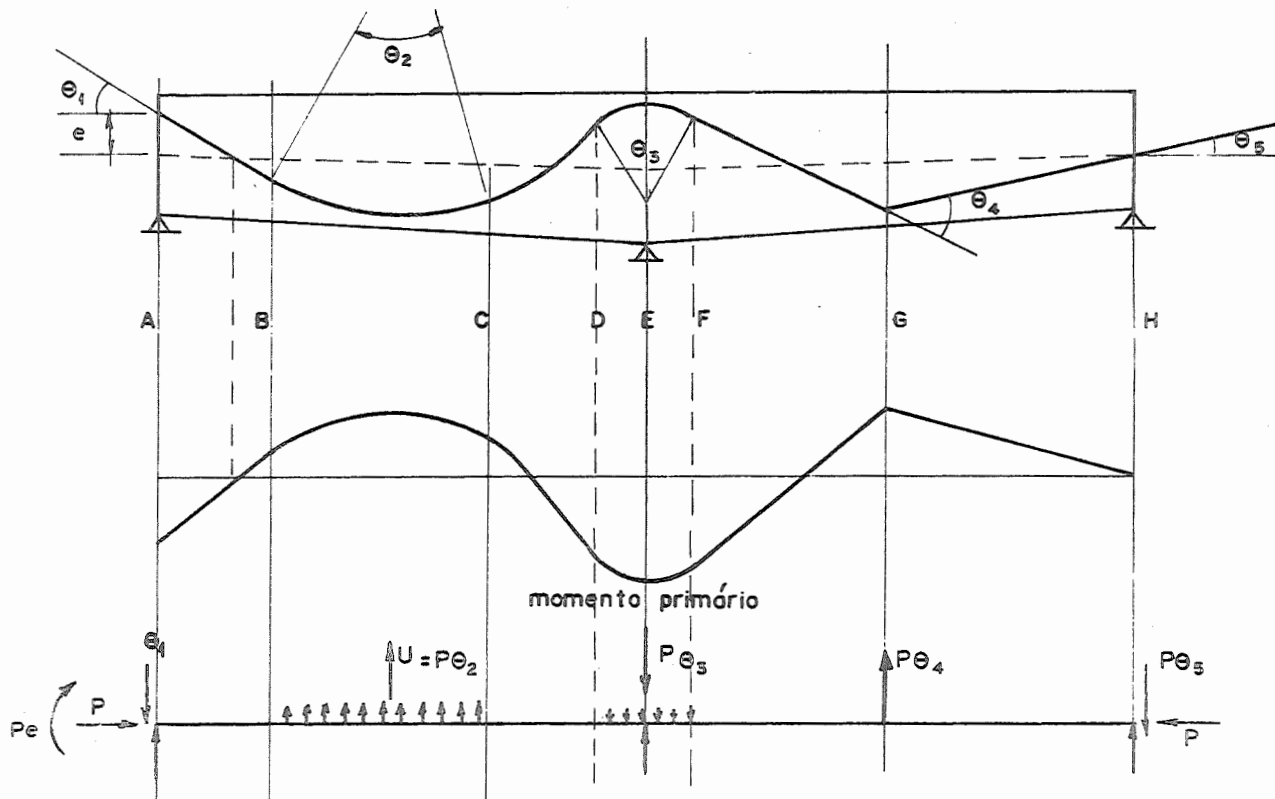
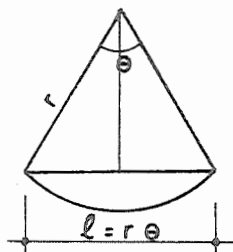


diagrama de momentos tem a forma de parábola ou uma curva circular (se se trata de pouco abatidas, parabólica e circular são consideradas como produzindo a mesma carga vertical), aplica-se carga uniformemente distribuída, ao concreto, ao longo da curva. A força total para cada curva é dada por:



$$u = \frac{P}{r} = \frac{P\theta}{l} \therefore U = P\theta$$

No trecho BC será $U = P\theta_2$; b) - Quando o diagrama de momento muda de direção abruptamente, a força pode ser considerada como concentrada nesse ponto; a força em G por exemplo:

$$P\theta_4$$

- 3) Sobre os suportes internos, onde o diagrama de momento muda de direção, a carga é aplicada diretamente sobre o suporte. Novamente dois casos podem acontecer:
- a) Se o diagrama de momentos curva gradualmente sobre o suporte, novamente é aplicada uma carga uniformemente distribuída, como indicado na figura. Esta afetará os momentos da viga e deverá ser considerada;
 - b) Se o diagrama é pontiagudo sobre o suporte, aplica-se aí uma carga concentrada. Como esta carga é aplicada diretamente sobre o suporte, não produzirá momentos e poderá ser desprezada no cálculo.

Tendo determinado as cargas, pode-se determinar os momentos fletores na viga contínua, o que poderá ser feito por qualquer método. Seja, por exemplo, determinar a linha das pressões no concreto, devido à protensão somente, para a viga protendida com cabo aderente. Considere-se protensão de 250tf (ver figura seguinte).

O momento primário está indicado em b). A força cortante correspondente está indicada em c), da qual a carga é determinada e está indicada em d). Resolvendo a viga indicada em d).

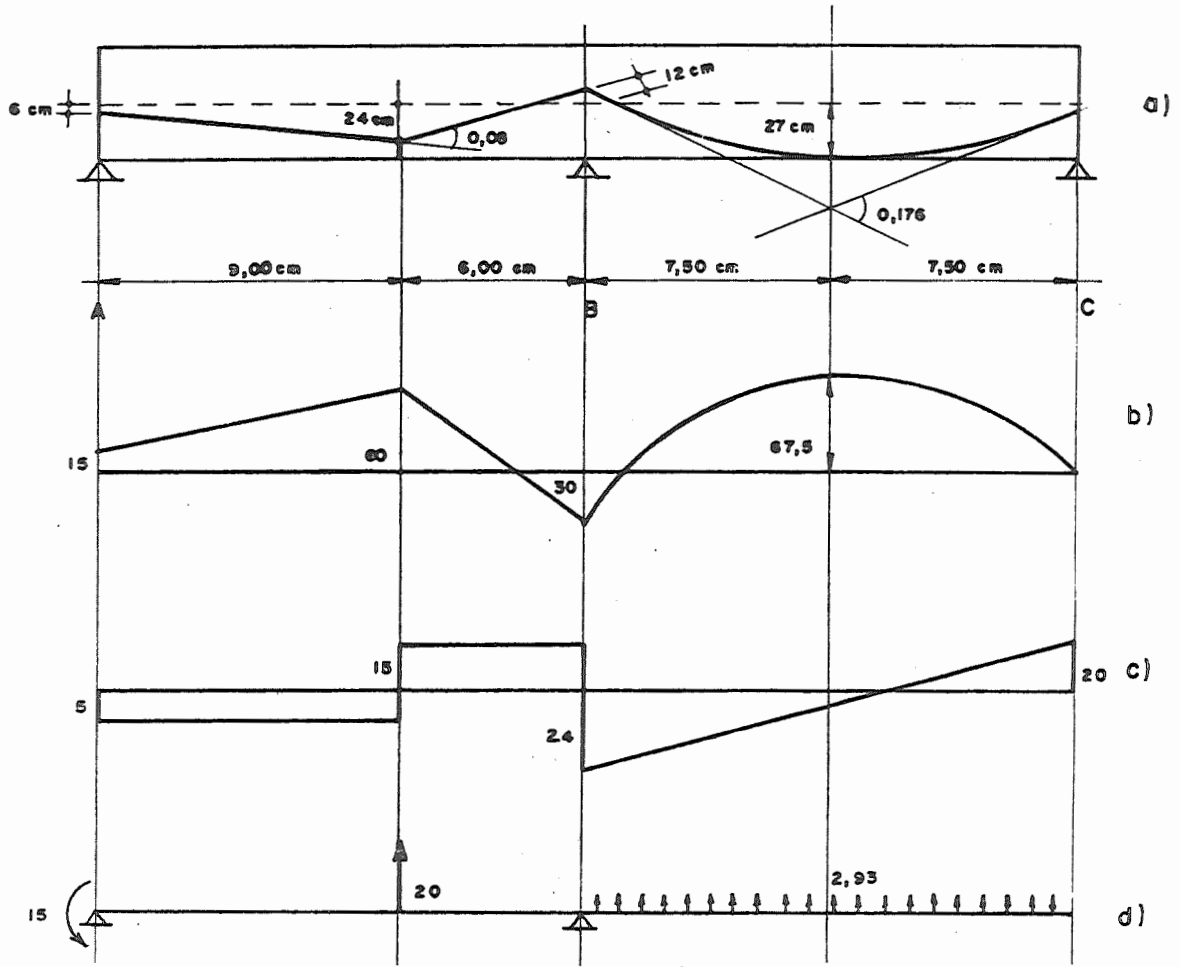
Momentos de Engastamento Perfeito:

$$M_{BA} = \frac{20 \times 9,0^2 \times 6,0}{15^2} = 43tm$$

$$M_{AB} = - \frac{20 \times 6,0^2 \times 9,0}{15^2} = -29tm$$

Cantiléver: - 15tm

$$- M_{BC} = + M_{CB} = \frac{2,93 \times 15^2}{12} = 55tm$$



0	1	0,5	0,5	1	0
- 15	- 29	43	- 55	+ 55	
	+ 44	+ 22	- 28	- 55	
		+ 19	+ 19		
		<u>+ 74</u>	<u>- 74</u>		
- 15	+ 15			<u>0</u>	

O momento fletor resultante em B é 74tm. A excentricidade da linha de pressão em B é:

$$\frac{74}{250} = 0,296m$$

A linha das pressões para a viga toda pode ser determinada dividindo os momentos finais pelo valor da força de protensão. Porém isso não é necessário, porque a linha de pressões se desloca linearmente da linha determinada pelo cabo (que é, no sistema isostático, a linha das pressões). É necessário então apenas mover a linha anterior linearmente, de modo que ela passe pela posição determinada sobre o apoio B. Em B, portanto, a linha das pressões deve ser deslocada para cima de

$$0,296 - 0,12 = 0,176\text{m}$$

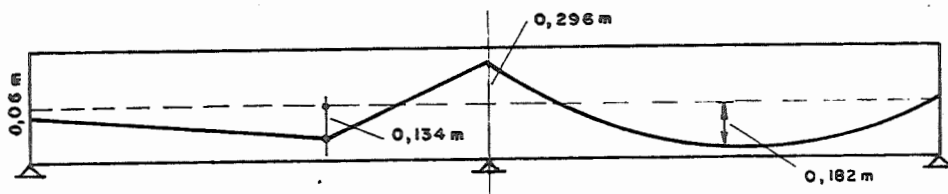
No ponto angular do cabo, no vão AB, o ponto inicial deve ser transladado para cima de:

$$\frac{0,176}{15,0} \times 9,0 = 0,106\text{m}$$

e estará portanto a $0,24 - 0,106 = 0,134\text{m}$ abaixo da linha neutra. No meio do vão BC, a linha deve ser transladada de $0,088\text{m}$, o que levará a nova linha das pressões, nesse ponto, a

$$0,27 - 0,088 = 0,182\text{m abaixo da linha neutra}$$

A figura indica a posição final da linha das pressões.



Se se desejasse o momento hiperestático no apoio central, teríamos:

$$M_p - M_p^0 = M'_p \quad M'_{p,B} = +74 - 30 = 44\text{tm}$$

Se a viga é carregada também com cargas externas, aparecerão momentos adicionais que deslocam novamente a linha das pressões. Para a determinação desta, pode-se proceder ou adicionando os valores deste carregamento com aqueles determinados com protensão sozinha ou, superpondo, de início, as cargas equivalentes com o carregamento externo. O primeiro método é preferível quando se tem diversos carregamentos.

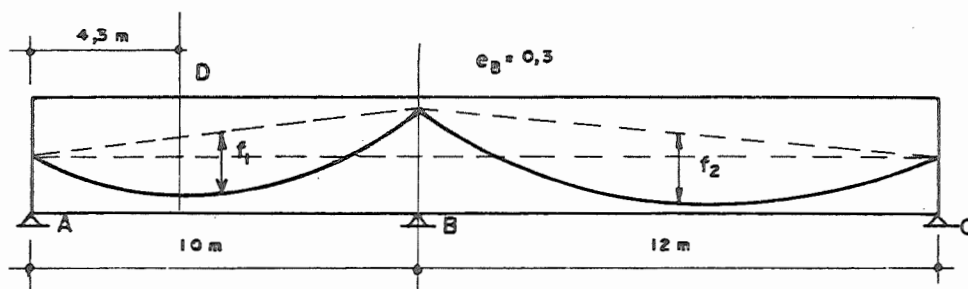
O método exposto é indicado também para o uso com linhas de influência.

4.3 - EXERCÍCIOS

a) Determinar, para os exemplos b, c e d, do ítem 2.2, momentos finais, momentos hiperestáticos de protensão, força cortante final e força cortante hiperestática, provocadas somente pela protensão.

b) Determinar na viga indicada na figura, o momento hiperestático de protensão, as reações de apoios, a força cortante em A e o momento fletor em D.

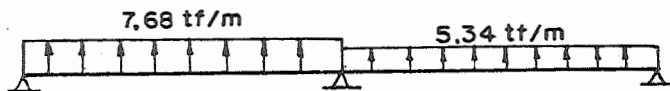
Dados: Cabo com traçado parabólico, $I = \text{const.}$; $P = 200t$



$$f_1 = f_2 = 0,48\text{m}$$

Solução: $u_1 = \frac{8 f_1 P}{l_1^2} = - \frac{8 \times 0,48 \times 200}{100} = - 7,68 \text{tf/m}$

$u_2 = \frac{8 f_2 P}{l_2^2} = - \frac{8 \times 0,48 \times 200}{144} = - 5,34 \text{tf/m}$

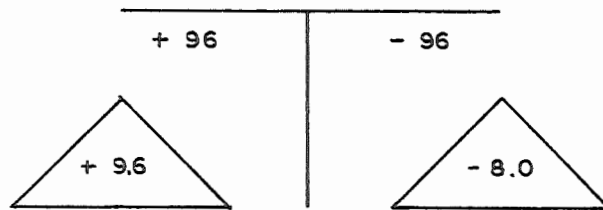


$\beta_{BA} = \frac{3}{10} \quad \beta_{BC} = \frac{3}{12}$

$$\mu_{BA} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{10} + \frac{3}{12}} = \frac{1}{10 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{12} \right)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{10}{12} \right)} = \frac{12}{22} = 0,546$$

$M_{BA} = \frac{7,68 \times 100}{8} = 96 \text{tf.m}$

$M_{BC} = - \frac{5,34 \times 144}{8} = - 96 \text{tf.m}$



Momento total em B = + 96tf.m

Força cortante:

$V_A = -38,4 + 9,6 = 28,8 \text{tf} \quad V_{Bd} = -32,0 - 8,00 = -40,00 \text{tf}$

$V_{Be} = -38,4 - 9,6 = -48,0 \text{tf} \quad V_c = -32,0 + 8,00 = -24 \text{tf}$

