

SERGIO MASCARENHAS



FISICA PARA A
UNIVERSIDADE

Vol. I

2.ª EDIÇÃO



Publicação n. 109

SÃO CARLOS
ESCOLA DE ENGENHARIA
1965

Í N D I C E

Prefácio	iii
CAPÍTULO I	
Introdução e Vetores	1
Exercícios	12
CAPÍTULO II	
Estática	13
Exercícios	36
CAPÍTULO III	
Princípio dos Trabalhos Virtuais ..	40
Exercícios	49
CAPÍTULO IV	
Cinemática	53
Exercícios	76
Apêndice	
Tabela: Valores naturais de funções trigonométricas	79

P R E F Á C I O

O ensino da Física numa Escola Superior, tem que ser não a penas informativo, mas também altamente formativo. Isto é, não a penas deve a cadeira fornecer ao aluno a substância básica que se transformará nas mãos dos outros professores na FÍSICA APLICADA (também chamada Engenharia), mas sobretudo deve visar resolver o seguinte problema:

O ensino secundário brasileiro deveria ser formador da personalidade do adolescente. Entretanto este objetivo não é alcançado, por motivos que deixamos de analisar no momento. Dêsse modo, o futuro profissional, entra na Universidade com um espírito de certo modo contrário ao que seria de desejar. Ora, o ensino da Física Geral e Experimental, nos dois primeiros anos, deve pois visar o desenvolvimento de atitudes básicas cuja soma dê a personalidade do profissional, e que a nosso ver são: INICIATIVA, CRÍTICA e PLANEJAMENTO. Através do trabalho em equipe, em contacto com a natureza no laboratório, e através de um grande número de problemas numéricos e questionários conceituais, o professor de Física pode suprir muitas lacunas de formação (sobretudo com as práticas e contactos pessoais no laboratório). Ao mesmo tempo pode dar a matéria que tem também imenso interesse intrínseco para o curso de Engenharia.

Entretanto, cremos que nenhum dos dois objetivos deve ceder ao outro. Por outro lado, somos de opinião que é essencial para o aproveitamento REAL, que se dê a matéria BÁSICA E ELEMENTARMENTE, sem impôr aos alunos saltos bruscos, principalmente no 1º Ano. Por esta razão sacrificaremos a beleza de um curso axiomático e formal, ao detalhe de problemas numéricos, ao permanente apelo à intuição dos fatos da vida diária, muitas vezes tão avessos a um rigorismo de descrição quantitativa, mas certamente sempre presenças de lições e de verdades.

Achamos que é essencial que o aluno suba gradual, porém seguramente, por isto indicamos uma curta bibliografia. O aluno tem que se habituar a não se dispersar, a estudar em um livro e lê-lo inteiramente sem saltar de um bom livro para outro livro melhor, mas antes preferindo LER TOTALMENTE um livro razoável, do que ter estudado PEDAÇOS de livros ótimos.

BIBLIOGRAFIA BÁSICA

Física elementar

Maia, L.P. - Mecânica, calor e acústica, eletricidade (corrente contínua e eletrostática), eletromagnetismo e ótica.
(Ed. Rev. Científica, Rio).

Considerando como livro básico para o aluno que entra em nosso curso. Um dos raros livros nacionais preciso, didático e moderno.

Física experimental

Pohl, R.W. - Physical principles of mechanics and acoustics

Pohl, R.W. - Physical principles of electricity and magnetism

Worsnop and Flint - Advanced practical physics.

(Ed. London, Methuen & Co. (1954))

Recomendamos os excepcionais livros de R.W.Pohl.

Matemática (para a Física)

Maia, L.P. - Cálculo aplicado à Física, Limites e Derivadas, Cálculo Vetorial e Torsorial. (Ed. EPPUC)

Courant, R. - Cálculo diferencial e integral (Ed. Globo)
(Dois volumes já traduzidos em Português). Um livro excepcional, mundialmente conhecido, escrito em linguagem clara e atraente, por um grande matemático. Com problemas e respostas.

Física (Universidade)

Maia, L.P. - Curso de Mecânica Teórica (Estática, Cinemática, Dinâmica) (Ed. EPPUC)

Frank, N.H. - Introduction to mechanics, heat and sound

Frank, N.H. - Introduction to electricity and optics (existe tradução espanhola)

Timoshenko, S. - Mecânica Técnica (Ed. Tecnoprint Gráfica S.A)
Excelente livro para a parte de Mecânica, com muitos problemas de interesse para o engenheiro.

Slater - Modern Physics

Para uma leitura agradável e formativa aconselhamos:

História da Ciência e Crítica

Mach, E. - La Mécanique

Bell, E. Les grands mathématiciens

Einstein - Infeld - The evolution of Physics

Maggie - Source book in physics

Margenau - Foundations of physics

Divulgação categorizada

Born, Max - Restless universe

Gamow, George - Mr. Tompkins in wonderland

Gamow, George - One, two, three... infinity

Gamow, George - Mr. Tompkins explores the atom

Deixamos de indicar livros de nível de post-graduação, porque achamos que o aluno deve preocupar-se com a base antes de pretender tomar assuntos de especialidade.

Queremos agradecer ao Prof. Luiz P. Maia, da Faculdade Nacional de Filosofia da Universidade do Brasil e da Escola Politécnica da Universidade Católica, inestimáveis críticas. Suas atividades científicas sem dúvida influenciaram decisivamente o nosso ponto de vista ao escrever o presente curso.

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO E VETORES

I - O QUE É A MECÂNICA?

Se a FÍSICA descreve o Universo ao homem, dentro dela a MECÂNICA estuda os MOVIMENTOS. Quando imaginamos o dinamismo do nosso Universo, percebemos a importância e a generalidade da Mecânica. Do movimento dos astros - no macrocosmos - ao movimento das moléculas, átomos e elétrons - no microcosmos, a todos estuda a Mecânica. O Físico dêsse modo, construindo-a, ingressa mais e mais na natureza das coisas que o cercam, percebendo a pouco e pouco o contôrno, para êle sempre dinâmico, da estrutura do Universo.

Dessa busca permanente, traz o Físico não apenas o domínio da Natureza pela técnica, mas também uma particular concepção filosófica do mundo que o cerca.

Dêste quadro, podemos antever que a Mecânica a espinha dorsal da Física, e pela própria natureza dinâmica dos fenômenos, o mais fundamental de seus capítulos. Por ela começaremos nosso estudo. Como qualquer ramo do conhecimento humano, a Mecânica não é nenhum amontoado de fatos experimentais, secos e isolados no seu empirismo, nem um conjunto transparente e frio de axiomas e teoremas lógicos e coerentemente encadeados. Ela é a soma destes dois conjuntos, obtida pelas vivências humanas que os argamassaram. Dêsse modo conhecê-la é saber também a sua história, estudá-la é conhecer também seus caminhos:- DE ARQUIMEDES a GALILEU, de NEWTON a HAMILTON, de EINSTEIN a DIRAC, nas três grandes fases por que passou, a Mecânica possui vida própria e é um repositório de lições notáveis para todo estudante sério e com entusiasmo científico.

Para estudar os movimentos, podemos DESCREVÊ-LOS e INTERPRETÁ-LOS. Há uma parte da Mecânica que apenas DESCREVE os movimentos. Assim podemos dizer acerca do movimento da Terra que ela descreve uma trajetória elítica em tórno do Sol. Para maior descrição poderíamos dar ainda a sua velocidade e aceleração. Esta parte da Mecânica é a CINEMÁTICA.

Por que a Terra se move dêsse modo em tórno do Sol? Esta interpretação das CAUSAS dos movimentos pertence a outra parte da Mecânica, muito mais complexa que a CINEMÁTICA é claro, e que se denomina DINÂMICA. A Dinâmica utiliza o conceito de FÔRÇA como causa básica e única capaz de ALTERAR os movimentos. Quando sôbre um corpo as fôrças se anularem, o corpo ficará em EQUILÍBRIO, pois o seu movimento não se alterará mais. Assim acontece com uma ponte, um prédio (todos em equilíbrio em relação a Terra). A parte da Mecânica que estuda as fôrças em equilíbrio é a ESTÁTICA.

Portanto resumindo:

MECÂNICA	{	CINEMÁTICA —> COMO se dão os movimentos
		DINÂMICA —> PORQUE se dão os movimentos
		ESTÁTICA —> EQUILÍBRIO dos corpos

Começaremos nosso estudo pela Estática, por motivos didáticos.

II - FÔRÇAS E VETORES

A noção de fôrça de nada nos valeria, como qualquer grandeza em uma ciência exata, se não soubéssemos:

- 1 - Como medir fôrças através de uma OPERAÇÃO FÍSICA, isto é, de uma experiência pelo menos.

2 - Como traduzir a MEDIDA FÍSICA QUANTITATIVAMENTE, isto é, como expressá-la matematicamente.

Assim para medirmos o comprimento de um corpo, poderemos utilizar um comprimento padrão, -uma régua- e aplicá-la sobre o corpo (operação física) um certo número de vezes. Após isto, um número com a indicação da unidade escolhida para a medida (o metro por exemplo), dará a expressão quantitativa da grandeza-comprimento do corpo.

As forças podem ser medidas pela ALTERAÇÃO QUE CAUSAM NA VELOCIDADE de um corpo. Assim a força com que a Terra atrai um livro, pode ser medida pela variação da velocidade do livro, quando este fica apenas sob ação desta força (seu peso). Entretanto esta operação física será melhor entendida quando estudarmos Dinâmica. Uma força pode entretanto causar outros efeitos através dos quais se pode medi-la. Assim se pusermos o livro sobre uma mola (fig. 1) esta se DEFORMARÁ, ou se o pendurarmos em um fio estte se ESTICARÁ ou ficará em TENSÃO.

A deformação de molas nos oferece uma operação física bastante conveniente para a comparação de forças (e sua consequente medida).

O problema de conceituação de força e de sua definição é um problema delicado o qual abordamos superficialmente neste curso introdutório. O leitor encontrará ótima discussão do assunto no clássico livro de Ernst Mach "La Mécanique" (tradução francesa de E. Bertrand, Ed. Herman, Paris).

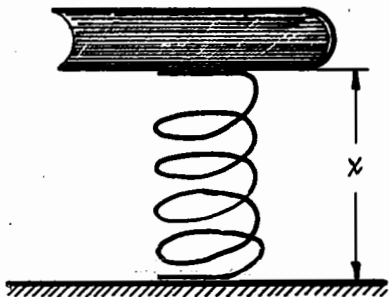


Fig. 1

Conquanto não queiramos aqui entrar em maiores detalhes, diremos apenas que para molas helicoidais, entre certos limites, a força deformante F é proporcional à deformação x . Podemos tomar a deformação x (fig. 1) como sendo a variação no comprimento da mola ao se aplicar a força. Esta observação experimental, constitui a chamada lei de Hooke, cuja expressão matemática é:

$$F = K x \quad (I)$$

Nesta equação (I) K depende do material de que é feita a mola, e da forma geométrica da mola, mas como se disse, dentro de certos limites, independe da força aplicada ou da consequente deformação.

III - UNIDADES DE FORÇAS

No sistema MK*S a unidade de força é o quilograma-força ($kg*$ ou kgf) que é aproximadamente a força gravitacional que age sobre um bloco de platina iridiada guardado no BUREAU DE POIDS E MESURES, em St. Cloud, perto de Paris. O NEWTON (N) que é a unidade do MKS é aproximadamente 9,8 vezes menor que o kgf . O dina (d) do CGS vale 10^{-5} N, sendo portanto uma unidade muito pequena.

PROBLEMA 1: Uma certa mola sofre uma deformação de 2 cm sob a ação de 3 kgf . Qual a constante da mola no sistema MKS?

As forças que se conhecem até hoje são de várias naturezas, mas TODAS ELAS possuem as mesmas AÇÕES MECÂNICAS: podem MODIFICAR A VELOCIDADE de um corpo, ESTICAR um FIO, COMPRIMIR uma MOLA, etc. Na fig. 2 ilustramos vários tipos de forças, exercendo apesar disso as mesmas ações mecânicas:

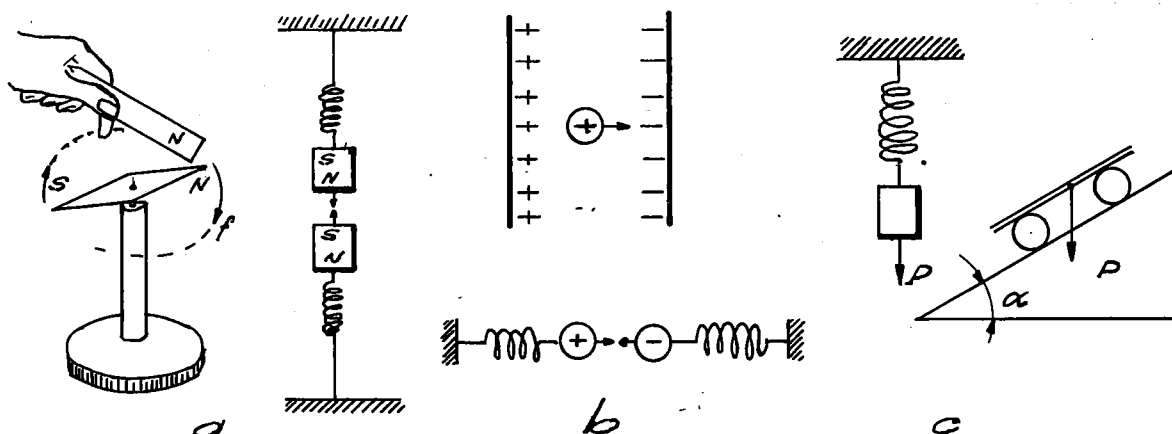


Fig. 2 - Ações estática e dinâmica de vários tipos de forças

Estes exemplos são muito ilustrativos no seguinte sentido: medindo-se a deformação produzida em uma mola por QUALQUER FÔRÇA (elétrica, gravitacional, muscular) podemos medir esta força, sem nos importarmos com a sua natureza. Poder-se-ia indagar porém: de onde surge a força magnética ou a gravitacional ou a elétrica? Isto é outro problema que não pertence mais à MECÂNICA diretamente. Constrói-se então uma TEORIA, como por exemplo o ELETROMAGNETISMO que mostra como se pode CALCULAR as forças elétricas e magnéticas, a partir de outros conceitos básicos como o de carga elétrica. Esta teoria estará certa SE e SÔMENTE SE, o valor calculado das forças (nestas teorias) coincidir com o valor achado experimentalmente, por exemplo através da deformação de molas. Do mesmo modo com as forças gravitacionais. Estas teorias que estudam as forças são as chamadas TEORIAS DOS CAMPOS elétrico, gravitacional, etc. Ainda neste volume estudaremos o Campo GRAVITACIONAL. No Volume II deste curso estudaremos o Campo ELETROMAGNÉTICO.

PROBLEMA 2: Uma força elétrica de 3 N distende de 3 cm uma certa mola. Qual o valor da força magnética que distenderia a mola do mesmo valor?

IV - GRANDEZAS ESCALARES E VETORIAIS

A linguagem do Físico é a Matemática. Para expressarmos sem ambigüidade nesta linguagem um comprimento, nos utilizamos de um número (e da indicação da unidade de medida).

Com grandezas como um deslocamento no espaço, precisamos indicar o módulo, direção e sentido do deslocamento. Assim no caso particular de procurarmos especificar o deslocamento de um móvel num plano, como a ponta de uma caneta nesta folha, precisamos indicá-lo também em módulo, direção e sentido. Outras grandezas como a força, velocidade e aceleração, necessitam também, para que não haja ambigüidade, da indicação do módulo, direção e sentido. As grandezas tais como comprimento, densidade, temperatura, etc. que necessitam para sua completa especificação apenas um número (com ou sem sinal), são chamadas GRANDEZAS ESCALARES.

As outras grandezas, como força, velocidade, deslocamento, podem ser representadas GRÁFICAMENTE por um segmento dirigido, cuja direção e sentido sejam as da grandeza e cujo módulo represente em ESCALA ADEQUADA o módulo da grandeza. Estas são chamadas GRANDEZAS VETORIAIS. Esta representação geométrica de um vetor (grandeza vetorial), é ilustrada na fig. 3.

QUESTIONÁRIO 1

Quais dentre as seguintes grandezas são vetoriais: massa, população de um país, peso de um corpo, raio de curvatura, ângulo plano?

Para distinguir uma grandeza vetorial, sobre o seu símbolo

colocaremos sempre uma pequena flecha. Assim, uma força será representada por \vec{F} , uma velocidade por \vec{v} , uma aceleração por \vec{a} . O símbolo pois admite o conhecimento completo da grandeza, em módulo, direção e sentido. O módulo de um vetor A será indicado por A . É sempre positivo.

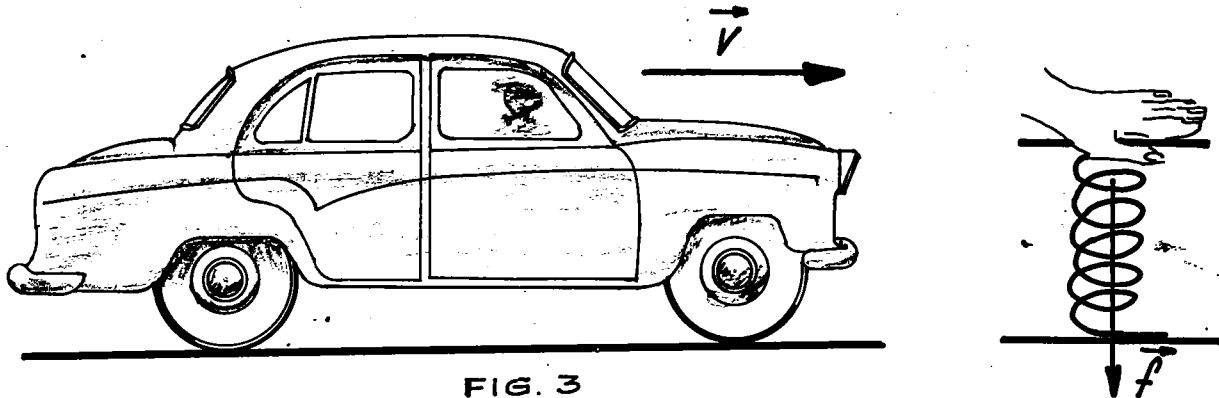
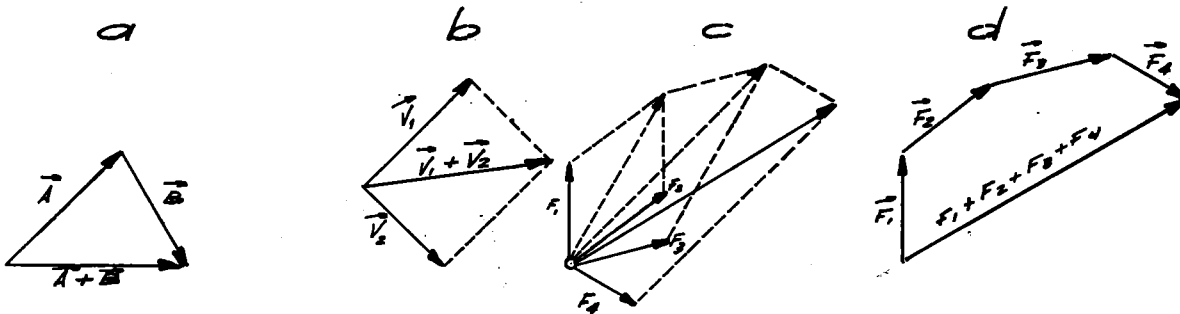


FIG. 3

V - SOMA E DIFERENÇA DE VETORES

Sabemos que quando várias forças agem sobre um mesmo corpo, pode-se compô-las, isto é SOMÁ-LAS de acordo com a regra do paralelogramo ou a do polígono (Fig.4 a e b). Esta última é mais rápida e mais geral. Para se traçar o polígono desloca-se o vetor sem alterar sua direção, módulo e sentido como na fig.4a. Esta operação é puramente GEOMÉTRICA e se quisermos obter por exemplo o módulo da resultante, teremos que fazer o desenho em escala.



a) Dois deslocamentos \vec{A} e \vec{B} e sua soma (Regra do Polígono)

b) Composição de 2 velocidades (Regra do Paralelogramo)

c e d) Composição de 4 forças $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ aplicando, sucessivamente a regra do paralelogramo (c) e a do polígono (d)

Fig.4 - Composição geométrica de várias grandezas vetoriais

• Indicaremos a SOMA DE VETORES ou SOMA GEOMÉTRICA com o sinal + já utilizado para indicar soma numérica, entretanto deve-se frisar que as duas operações são diferentes. Assim

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{R} \quad (1)$$

não implica na validade de

$$A + B = R \quad (2)$$

PROBLEMA 3 - Qual o valor de R em função de \vec{A} , \vec{B} e do ângulo entre \vec{A} e \vec{B} ? Qual a direção de R?

QUESTIONÁRIO 2

- 1 - Quando serão válidas as equações (1) e (2) simultaneamente?
- 2 - Discuta a afirmação: O módulo da soma vetorial é igual ou menor à soma dos módulos das parcelas.
- 3 - Quando a soma de vários vetores é nula, o que acontece com a poligonal?

A DIFERENÇA \vec{D} de dois vetores \vec{A} e \vec{B} será simbolizada por

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} \quad (3)$$

Poderemos obtê-la facilmente se escrevermos que

$$\vec{A} = \vec{D} + \vec{B} \quad (4)$$

A construção correspondente à (3) é ilustrada na fig.5. Vê-se que D (no caso de dois vetores) é uma diagonal e R a outra.

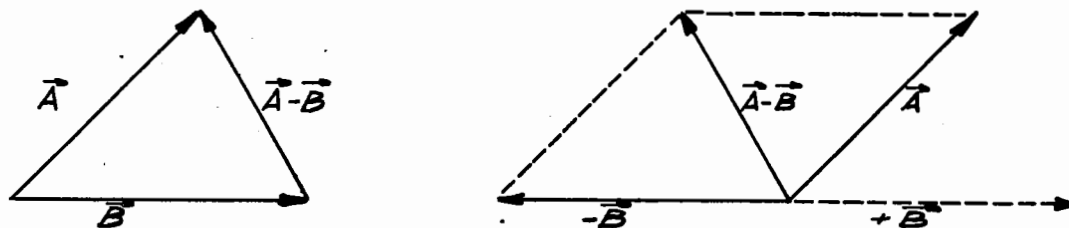


Fig. 5 - Dois métodos para subtrair vetores

Sendo $-\vec{B}$ um vetor de mesmo módulo e direção que \vec{B} mas de sentido oposto, pode-se também operar a diferença pela regra da soma (podendo-se inclusive usar a regra da poligonal), já que

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

A construção é feita na figura acima.

PROBLEMA 4 - Qual o módulo da diferença $\vec{A} - \vec{B}$ em função de \vec{A} , \vec{B} e do ângulo entre eles?

PROBLEMA 5 - Quando será a soma vetorial de dois vetores igual à sua diferença (vetorial)?

QUESTIONÁRIO 3 -

O módulo da diferença de dois vetores pode ser maior que o módulo de sua soma?

VI - REPRESENTAÇÃO ANALÍTICA DOS VETORES-PROJEÇÃO DE UM VETOR SOBRE UMA DIREÇÃO.

Seja um vetor \vec{M} (fig. 6) e uma direção que será indicada por um vetor \vec{v} que tenha esta direção. O vetor \vec{v} será tomado como unidade, isto é, será um VETOR UNITÁRIO ou VERSOR da direção mencionada. Sua função é caracterizar a direção e indicar qual o sentido positivo sobre ela. Se projetarmos \vec{M} sobre \vec{v} , obteremos um vetor que poderá ser escrito

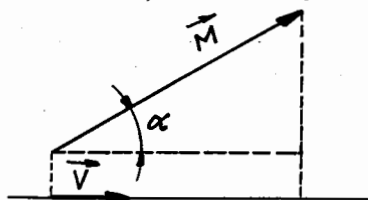


Fig. 6

$$M \cos \alpha \vec{v}$$

onde com $M \cos \alpha$ estamos indicando o VALOR ALGÉBRICO DA PROJEÇÃO (se este for negativo, o valor será oposto a \vec{v}). O valor algébrico de qualquer vetor \vec{M} na direção \vec{v} será sempre chamado de ora por diante COMPONENTE de \vec{M} na direção \vec{v} e será simbolizado por M_v .

Tomemos agora um vetor qualquer \vec{V} no plano da fig. 7 e um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais OXY . Aos eixos OX e OY associaremos dois vetores unitários, \vec{i} e \vec{j} respectivamente. \vec{V} pode ser escrito como

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j}$$

DECOMPUSEMOS pois \vec{V} em suas COMPONENTES ORTOGONAIS V_x e V_y .

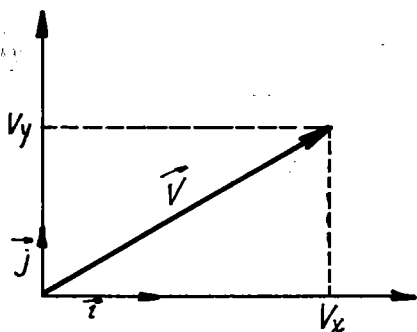


Fig. 7

Essas componentes escritas sempre na ordem (V_x, V_y) servem para representar \vec{V} melhor que o segmento dirigido desenhado no papel. Com as componentes trabalharemos com números ao invés de se fazer desenhos, o que é mais cômodo e mais geral. Esta representação de um vetor denomina-se representação ANALÍTICA ou CARTESIANA. Seja por exemplo SOMAR ANALITICAMENTE

dois vetores \vec{U}_1 e \vec{U}_2 :

$$\vec{U}_1 + \vec{U}_2 = (U_{1x} \vec{i} + U_{1y} \vec{j}) + (U_{2x} \vec{i} + U_{2y} \vec{j}) \quad \text{ou}$$

$$\vec{U}_1 + \vec{U}_2 = (U_{1x} + U_{2x}) \vec{i} + (U_{1y} + U_{2y}) \vec{j}$$

Isto é se chamarmos a resultante de $U_1 + U_2 = R$ então

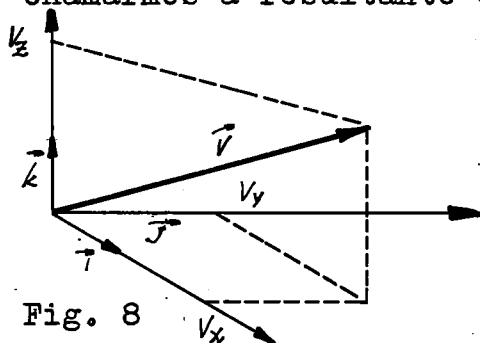


Fig. 8

$$R_x = U_{1x} + U_{2x}$$

$$R_y = U_{1y} + U_{2y}$$

o que nos conduz a dizer que as COMPONENTES DA SOMA SÃO A SOMA DAS COMPONENTES (sobre cada um dos eixos).

No espaço tridimensional um vetor qualquer \vec{V} é obtido como soma de três vetores ortogonais (fig. 8)

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$$

onde \vec{k} é o vetor unitário do eixo OZ (fig. 8). Entretanto na maioria dos problemas encontraremos sistemas de vetores coplanares e neste caso $V_z = 0$ sempre, bastando que se dê as duas outras.

A soma de vários vetores (enfadonha de ser feita geometricamente) tem para componentes:

$$R_x = U_{1x} + U_{2x} + U_{3x} + \dots + U_{nx}$$

$$R_y = U_{1y} + U_{2y} + U_{3y} + \dots + U_{ny}$$

ou adotando uma notação mais condensada:

$$R_x = \sum_n U_{nx} \quad (4)$$

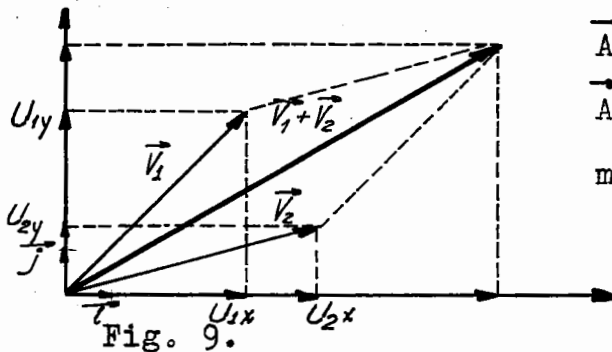
$$R_y = \sum_n U_{ny}$$

No caso da diferença vetorial é fácil ver que basta fazer a diferença dos componentes. Faz-se em geral a soma algébrica.

QUESTIONÁRIO 4

- 1 - Qual a condição que deve satisfazer as equações (4) para ser nula a SOMA VETORIAL ?
- 2 - Qual o significado geométrico das Equações (4) (fig. 9) ?

PROBLEMA 6 - Verifique com a expressão analítica as seguintes propriedades da soma vetorial:-



$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \quad (\text{comutatividade})$$

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} \quad (\text{associatividade})$$

$$m(\vec{A} + \vec{B}) = m\vec{A} + m\vec{B} \quad (\text{Propriedade distributiva da multiplicação por escalar } m, \text{ em relação à soma}).$$

PROBLEMA 7 - Qual o significado geométrico das propriedades acima?

VII - PRODUTO ESCALAR E PRODUTO VETORIAL (*)

(*) Na realidade, como encontraremos em outras partes do curso, os produtos escalar e vetorial nasceram da necessidade de se dar um formalismo cômodo e claro, a conceitos eminentemente físicos: trabalho, decomposição de forças, (produto escalar), momento de uma força, velocidade angular (produto vetorial), etc. O aluno deve pois receber as definições abstratas e a Matemática em geral como uma gramática da língua com que descreverá os fatos físicos.

Usaremos nas aplicações à Física essas 2 outras operações com vetores. O PRODUTO ESCALAR (ou INTERNO) de dois vetores \vec{A} e \vec{B} é definido como:

$$AB \cos \alpha \quad \text{onde } \alpha \text{ é o ângulo entre } \vec{A} \text{ e } \vec{B}.$$

O produto como se vê é um escalar, donde a sua denominação. Este produto é comumente indicado com a notação $\vec{A} \cdot \vec{B}$, (*) isto é

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \alpha$$

As principais propriedades deste produto são:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \quad (\text{comutatividade})$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C} \quad (\text{distributividade em relação à soma})$$

(*) Outras notações são $(\vec{A} \vec{B})$, $\vec{A} \vec{B}$. Os americanos que usam mais a notação $\vec{A} \cdot \vec{B}$ chamam por isso ao produto de produto pontual (dot product).

É interessante notar que o produto escalar pode ser nulo mesmo quando são nulos A ou B. Basta que os dois vetores sejam ortogonais. Podemos por exemplo aplicar estas propriedades para verificar que no caso dos vetores unitários \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} teremos:

$$\begin{aligned}\vec{i} \times \vec{i} &= \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 1 \\ \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{i} \times \vec{k} = \vec{j} \times \vec{k} = 0\end{aligned}\quad (5)$$

Obtenhamos agora a EXPRESSÃO ANALÍTICA do PRODUTO ESCALAR $\vec{A} \times \vec{B}$ (no plano):

$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j}) \cdot (B_x \vec{i} + B_y \vec{j})$ desenvolvendo e usando as equações (5)

$$\vec{A} \times \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y$$

QUESTIONÁRIO 5

- 1 - Terá sentido falar no produto $\vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C}$?
- 2 - Qual o significado de $\vec{A} \times \vec{A}$?

PROBLEMA 8 - Mostre que a projeção de um vetor \vec{M} sobre um eixo de vetor unitário \vec{v} pode ser escrita (valor algébrico) como $M \times \vec{v}$

O outro produto de dois vetores \vec{A} e \vec{B} que definiremos a seguir nos dá UM OUTRO VETOR \vec{C} e é por isso chamado PRODUTO VETORIAL e indicado por:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{C}$$

O módulo de \vec{C} é definido como sendo $|\vec{A} \times \vec{B}| \sin \alpha$ onde α é o ângulo entre \vec{A} e \vec{B} . A direção de \vec{C} é sempre perpendicular ao plano de \vec{A} e \vec{B} . Quanto ao seu sentido convencionou-se que é do polegar da mão esquerda se o médio representar \vec{A} e o indicador \vec{B} (estando o polegar normal ao plano dos outros dois).

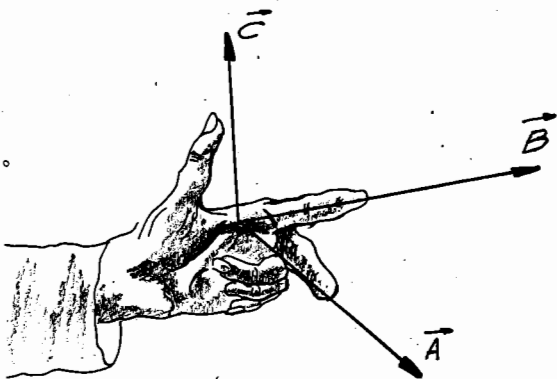


Fig. 10

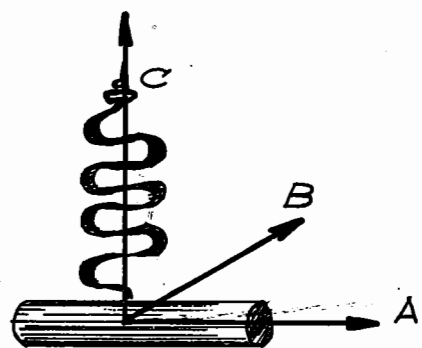


Fig. 11

Outra regra, equivalente é a chamada regra do sacarroalha. O sentido do vetor \vec{C} resultante do produto vetorial $\vec{A} \wedge \vec{B}$ é o de avanço de um sacarroalha girando no sentido de \vec{A} para \vec{B} (pelo menor ângulo).

O fato de podermos orientar uma reta é equivalente, quando consideramos o espaço tridimensional à orientação de dois triedros triortogonais. Assim como não podemos superpor as duas flechas da fig. 12 (Se exigirmos que não se pode sair com as flechas da reta suporte (isto é uma dimensão), assim como não podemos superpor os dois triângulos (vértice a vértice) sem sairmos do plano, do mesmo modo não podemos superpor os dois triedros da figura sem sairmos das três dimensões.

O produto vetorial formaliza este fato quando diz que

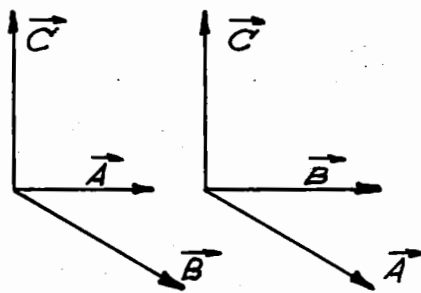
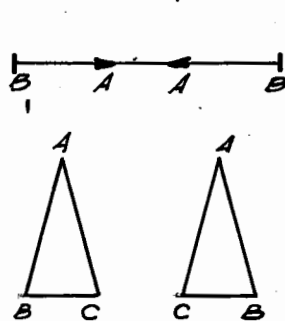


Fig. 12



$$\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$$

Vê-se pois que:

$\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$ isto é, o produto vetorial é ANTI COMUTATIVO, entretanto

$\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$ é DISTRIBUTIVO em relação à soma.

Aqui novamente devemos notar que o produto vetorial pode ser nulo sem que sejam os fatores. Basta que os dois vetores sejam paralelos. Ilustração interessante da definição de produto vetorial, pode ser feita com a tríade unitária i, j, k :

$$\begin{aligned} \vec{i} \wedge \vec{i} &= \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = 0 \\ \vec{i} \wedge \vec{j} &= \vec{k}; \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}; \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \\ \vec{i} \wedge \vec{k} &= -\vec{j}; \quad \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}; \quad \vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k} \end{aligned} \quad (6)$$

- PROBLEMA 9**
- 1 - Mostre que $(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C}$ está contido no plano de \vec{A} e \vec{B} .
 - 2 - Mostre que o PRODUTO MISTO $\vec{A} \times \vec{B} \wedge \vec{C}$ mede o volume do prisma que tenha para lados \vec{A}, \vec{B} e \vec{C} .

Podemos agora obter facilmente a expressão ANALÍTICA do produto $\vec{A} \wedge \vec{B}$ (coplanares a XOY):

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j}) \wedge (B_x \vec{i} + B_y \vec{j})$$

Desenvolvendo e usando (6):

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k}$$

Em três dimensões:

$\vec{A} \wedge \vec{B} = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \wedge (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k})$ desenvolvendo e usando (6)

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \vec{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k}$$

Esta expressão pode ser escrita com grande simplicidade com a notação

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

QUESTIONÁRIO 6

Qual o erro na Equação seguinte: $\vec{A} \wedge \vec{B} = A_x B_y - A_y B_x$?

PROBLEMA 10 - Mostre que o produto $\vec{A} \times \vec{B} \wedge \vec{C}$ pode ser escrito como:

$$\vec{A} \times \vec{B} \wedge \vec{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

VIII - DERIVAÇÃO DE VETORES

Muitas vezes em Física ocorre que um vetor \vec{V} é função de uma variável escalar t , isto é $\vec{V} = \vec{V}(t)$. Quando t varia, também o faz \vec{V} . A variável t pode ser, por exemplo, o tempo ou uma distância e \vec{V} uma velocidade ou uma força. Quando t passa a $t + \Delta t$, \vec{V} poderá variar a $\vec{V} + \Delta \vec{V}$ (fig. 12).

Façamos o quociente $\frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$. Este quociente é um vetor, pois

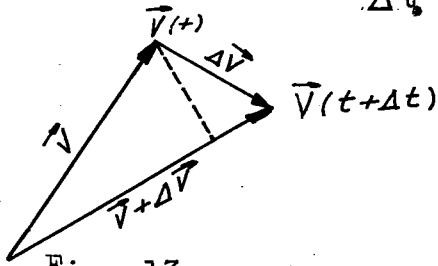


Fig. 13

$$\frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \left(\frac{1}{\Delta t} \right) \Delta \vec{V}.$$

Chamamos DERIVADA DE \vec{V} EM RELAÇÃO A t , ao limite (se existir):

$$\lim \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$\Delta t \rightarrow 0$$

A derivada $\frac{d\vec{V}}{dt}$ é pois um vetor cuja direção é em geral diferente da de \vec{V} . A derivação de vetores tem propriedades semelhantes à derivação de funções escalares:

$$\frac{d}{dt} (\vec{A} + \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\vec{B}}{dt}$$

(distributiva em relação à soma)

$$\frac{d}{dt} (\vec{A} \times \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \frac{d\vec{B}}{dt}$$

Mas deve-se notar que no caso do produto vetorial não se pode trocar a ordem dos fatores, pois:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} \wedge \vec{B} = - \vec{B} \wedge \frac{d\vec{A}}{dt}$$

Como um vetor pode variar em módulo, direção ou em ambos a derivada de \vec{V} (um vetor qualquer) pode não ser nula apenas porque $\vec{V} = \text{constante}$ (fig. 14) pois $d\vec{V}$ pode não ser nula. Demonstramos a seguir, a tal respeito, um importante teorema:

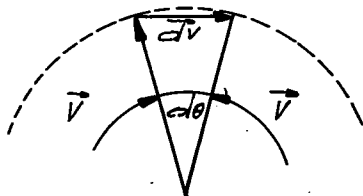


Fig. 14

TEOREMA: A derivada de um vetor \vec{V} de módulo constante ($V = \text{constante}$) ou é nula ou é normal ao vetor.

Para demonstrar o teorema, façamos o produto

$$\vec{V} \times \vec{V} = V^2 = \text{constante}$$

e em seguida obtenhamos a sua derivada

$$\frac{d\vec{V}}{dt} \times \vec{V} + \vec{V} \times \frac{d\vec{V}}{dt} = 0$$

portanto teremos:

$$1^\circ) \quad \frac{d\vec{V}}{dt} \times \vec{V} = 0 \quad \left(\frac{d\vec{V}}{dt} \perp \vec{V} \right)$$

ou

$$2^\circ) \quad \frac{d\vec{V}}{dt} = 0 \quad (V \neq 0 \text{ por hipótese})$$

No 1º caso há derivada (o vetor varia em direção) e ela é NORMAL a \vec{V} ($V = 0$) e no 2º caso o vetor de módulo constante também não varia em direção e

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = 0.$$

Geomètricamente o Teorema é imediato (fig. 14) pois o triângulo sendo isósceles se $d\theta \rightarrow 0$, $d\vec{V}$ se torna normal a V .

QUESTIONÁRIO 7

É falso ou verdadeiro o seguinte Teorema: A derivada de um vetor de direção constante ou é nula ou conserva essa direção?

PROBLEMA 11 - Demonstre que as componentes do vetor derivada são as derivadas das componentes do vetor.

PROBLEMA 12 - Demonstre o teorema: Se um vetor é paralelo à sua derivada, sua direção é fixa.

EXERCÍCIOS

1. Num certo sistema de unidades u (L) = 3,5 cm, U (T) = 2 s
 U (M) = 4 u t m. Qual o valor neste sistema, da constante de \underline{u}
ma mola que se distende 0,05m sob ação de 80 N ?
2. Um barco tem velocidade de 10 km/h em águas paradas. Ao atravessar normalmente as margens de um rio, cujas águas têm uma velocidade de 15 km/h qual será sua velocidade total ?
3. Mostre que a resultante \vec{R} da soma de n vetores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$, faz com o eixo i , um ângulo θ tal que

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sum_{n=1}^n U_{ny}}{\sum_{n=1}^n U_{nx}} \quad \text{e ainda que } R^2 = \left(\sum_{n=1}^n U_{nx} \right)^2 + \left(\sum_{n=1}^n U_{ny} \right)^2$$

4. Forças coplanares e concorrentes de módulos $P, 2P, 4P$ atuam sobre um corpo. Quais suas direções para a resultante ser a) máxima, b) mínima ?
5. Sejam O, P e R os vértices de um triângulo qualquer. Mostre que a soma das projeções de OP e PR sobre qualquer direção passando por O é igual à projeção de OR sobre aquela mesma direção. Sugestão: Use as propr. do produto escalar.
6. Mostre que $\vec{A} \times \vec{B} \wedge \vec{C} = -\vec{B} \times \vec{A} \wedge \vec{C}$
7. Qual o módulo da derivada

$$\frac{d\vec{V}}{dx}, \quad \text{de } \vec{V} = 3x^2 \vec{i} + 4\sqrt{x} \vec{j}$$

quando $x = 3$? Qual o ângulo entre \vec{V} e $\frac{d\vec{V}}{dx}$ neste ponto?

8. Pode-se representar um vetor pelas suas componentes polares (fig. 15) obtidas projetando-se o vetor na direção $\vec{\theta}$ (vetor unitário do raio vetor) e na direção \vec{r} (unitário) a ela perpendicular.

Estas duas componentes são denominadas: radial (V_r) e transversa (V_θ).

Mostre que

$$\vec{V} = (\vec{V} \times \vec{r}) \vec{r} + (\vec{V} \times \vec{\theta}) \vec{\theta} \quad \text{e que}$$

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2$$

Qual o ângulo de \vec{V} com \vec{r} ?

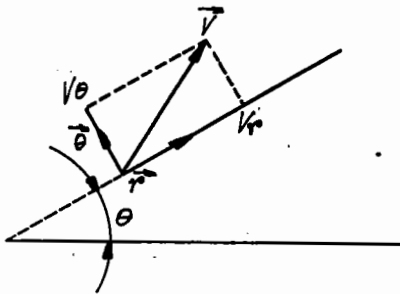


Fig. 15

9. Mostre que $(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2) \wedge \vec{r}_3 = \vec{r}_2 (\vec{r}_1 \times \vec{r}_3) - \vec{r}_1 (\vec{r}_2 \times \vec{r}_3)$

$$10. \text{Mostre que } (\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2) \times (\vec{r}_3 \wedge \vec{r}_4) = \begin{vmatrix} \vec{r}_1 \times \vec{r}_3 & \vec{r}_1 \times \vec{r}_4 \\ \vec{r}_2 \times \vec{r}_3 & \vec{r}_2 \times \vec{r}_4 \end{vmatrix}$$

CAPÍTULO II - ESTÁTICA

I - A ESTÁTICA é a parte da Mecânica que estuda as condições de equilíbrio dos sistemas. Com SISTEMA queremos dizer uma parte qualquer do Universo que ISOLAMOS para estudar: um livro, uma molécula, um gás. Por outro lado chamamos de EXTERIOR tudo aquilo que não faz parte do sistema. Poderíamos perguntar por exemplo: Qual a condição para que o livro b (fig. 1) fique em equilíbrio em cima da mola? O nosso sistema no caso é o livro B. Para indicar mais claramente, desenhamos em torno de B uma circunferência pontilhada.

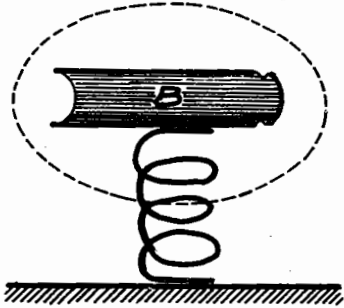


Fig. 1

O bloco B é o sistema em estudo
 equilíbrio de um corpo ?

Respondendo a estas duas perguntas, resolveremos também o problema.

"Diz-se que um corpo está em EQUILÍBRIO quando está em REPOUSO ou em MOVIMENTO RETILÍNEO UNIFORME". (*)

Dêste modo o VETOR VELOCIDADE de um corpo em equilíbrio ou é NULO ou NÃO VARIA, quer em MÓDULO, DIREÇÃO ou SENTIDO.

QUESTIONÁRIO 1: Assinale quais sistemas não estão em equilíbrio:

- Um trem fazendo uma curva com rapidez(**) constante de 100 km/h.
- Um corpo que desliza para baixo, com velocidade \vec{V} , num plano inclinado com atrito.
- Um livro sobre uma mesa, sabendo que a mesa está dentro de um trem que tem uma aceleração de $2m/s^2$.
- Um pêndulo que oscila em torno de um eixo.

(*) De ora em diante a Terra será o nosso referencial, a menos que se especifique o contrário. Isto introduz um pequeno erro como mostraremos à frente.

(**) Chamamos rapidez ao módulo do vetor velocidade. Os autores de língua inglesa chamam-na "speed". O termo velocidade significará sempre o VETOR velocidade.

Este problema simples, é em sua essência idêntico a todos os que nos aparecerão em estática, podendo, é claro, os outros serem mais complexos na apresentação. Porém o espírito mesmo da lei científica está nessa generalidade com que abrange os fenômenos.

Uma vez que o problema é dar as condições de equilíbrio de B, impõem-se duas perguntas:

1ª pergunta: O que é EQUILÍBRIO ?

2ª pergunta: O que AFETA o equilíbrio?

II - A PRIMEIRA E TERCEIRA LEIS DE NEWTON SÃO A BASE DA ESTÁTICA - Uma vez que já chegamos a uma convenção sobre o que é equilíbrio, passemos à 2ª pergunta: O que afeta o equilíbrio de um corpo ?

Suponha-se que se coloque o livro b (fig. 1) sobre a mola. Todos sabemos que a mola se deformará ; irá diminuindo a distância x até que em um certo instante não mais se deformará e o livro ficará em repouso; estaremos então em EQUILÍBRIO. Sem dúvida o livro e a mola procuraram uma posição de equilíbrio. Qual a causa da deformação da mola ? É a FÔRÇA que nela se exerce. A fôrça é pois a grandeza Física que determinará ou não o equilíbrio de um corpo.

Newton enunciou a respeito de tal questão, duas leis básicas, com as quais resolveremos todos os nossos problemas. Estas duas leis, acompanhadas de uma outra foram enunciadas na sua célebre obra "Principia Mathematica Philosophia Naturalis". Por tradição são chamadas 1ª, 2ª e 3ª leis de Newton. As que se referem ao nosso problema são a 1ª e 3ª.

1ª Lei de Newton (Princípio da Inércia): "UM CORPO SÓ MUDA O SEU ESTADO DE REPOUSO OU DE MOVIMENTO RETILÍNEO UNIFORME (EQUILÍBRIO) SOB AÇÃO DE FÔRÇAS".

Isto é, podemos inferir que SE um corpo estiver em equilíbrio isto IMPLICA QUE é NULA a soma de TÔDAS AS FÔRÇAS que atuam sobre o corpo. Isto pode ser expresso matematicamente pela Equação 1.

$$\sum \vec{F}_i = 0 \quad (\text{Equação 1})$$

Nunca se deve deixar de observar que a equação 1 indica a soma VETORIAL de TÔDAS as fôrças que atuam SOBRE o corpo.

Na outra lei, Newton nos dá uma das principais propriedades das fôrças: ELAS OCORREM AOS PARES.

3ª Lei de Newton (Princípio da Ação e Reação) - "Tôda vez que um corpo exerce sobre OUTRO uma fôrça (AÇÃO), êste exerce SOBRE O PRIMEIRO uma outra fôrça (REAÇÃO), de igual intensidade, na mesma linha de ação e em sentido oposto".

Apliquemos estas leis ao nosso problema: SE o livro B está em equilíbrio, terá que ser $\sum \vec{F}_i = 0$ onde as \vec{F}_i são as fôrças que agem SOBRE o livro. Isto é DEVE-SE INICIALMENTE PROCURAR TÔDAS AS FÔRÇAS QUE AGEM SOBRE O SISTEMA E SUBMETÊ-LAS DEPOIS, (SE O CORPO ESTIVER EM EQUILÍBRIO) À CONDIÇÃO DA EQUAÇÃO 1.

O leitor tem pois que se habituar a isolar o corpo (para só entrar com as fôrças que atuam sobre ele) e principalmente a achar corretamente as fôrças. Isto é essencial, e é a única dificuldade que o iniciante encontra. Porém, a 3ª lei nos é de auxílio nesta tarefa: A 3ª lei é aplicada para se achar as fôrças e a 1ª para impôr a condição necessária para o equilíbrio.

Quando isolamos o livro (nosso sistema) no exemplo da figura 2, podemos considerar como agindo sobre êle as fôrças: que o exterior exerce sobre o livro e as fôrças internas do livro. Assim o peso de um livro é uma fôrça que o exterior exerce sobre o livro, do mesmo modo a fôrça da mola sobre o livro. Estas fôrças são por isso chamadas fôrças externas. Já as fôrças que se exercem entre as partes do próprio livro (exemplo as fôrças do cordão usado para encadernar o livro, ou as fôrças que mantêm as páginas intactas quando folheamos o livro) são denominadas, como dissemos, fôrças-internas.

Uma fôrça poderá ser interna ou externa, dependendo da escolha do sistema. É um conceito relativo. Assim se tomarmos a mola e o livro como nosso sistema, a fôrça da mola sobre o livro passará a ser uma fôrça interna.

Para aplicar a 1ª lei como mostraremos no exemplo do livro e da mola e como generalizaremos mais à frente (problema 4), basta considerarmos as fôrças externas. Isto porque a cada fôrça interna (pela 3ª lei) corresponde uma outra de módulo igual, na mesma direção e de sentido oposto. Dêsse modo a soma das fôrças internas (que ocorrem sempre aos pares, pela 3ª lei) é nula. No nos

so caso, sôbre o livro age o pêsso P (atração da Terra) e uma vez que o livro exerce uma força sôbre a mola (pois vemos que ela se deforma) PELA 3ª LEI A MOLA EXERCE UMA FÔRÇA N SÔBRE O LIVRO, dirigida para cima e verticalmente (fig. 2).

Se o livro está em equilíbrio pela 1ª lei: $\vec{P} + \vec{N} = 0$
Ou levando em conta a colinearidade dos dois vetores

$$P = N$$

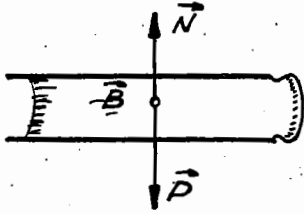


Fig. 2 - As forças sôbre o livro B

Isto é a mola tem que exercer no equilíbrio uma força sôbre o livro, igual e de sentido oposto ao pêsso do livro.

Questionário 2:

- Por que \vec{N} não é a reação correspondente ao pêsso \vec{P} do livro?
- Antes do equilíbrio do livro, a força da mola sôbre ele era ou não igual ao pêsso? Deve ficar bem claro que enquanto a 1ª lei se refere a UM CORPO e sua condição

de equilíbrio, a 3ª lei se refere À INTERAÇÃO DE DOIS CORPOS e na da tem a ver com equilíbrio.

Se retirássemos a mola, o livro cairia atraído pela força que a Terra exerce sôbre ele e a Terra "subiria" atraída pelo livro. Entretanto, como a inércia da Terra é muito grande em relação do corpo, o movimento da Terra é desprezível em relação ao do corpo.

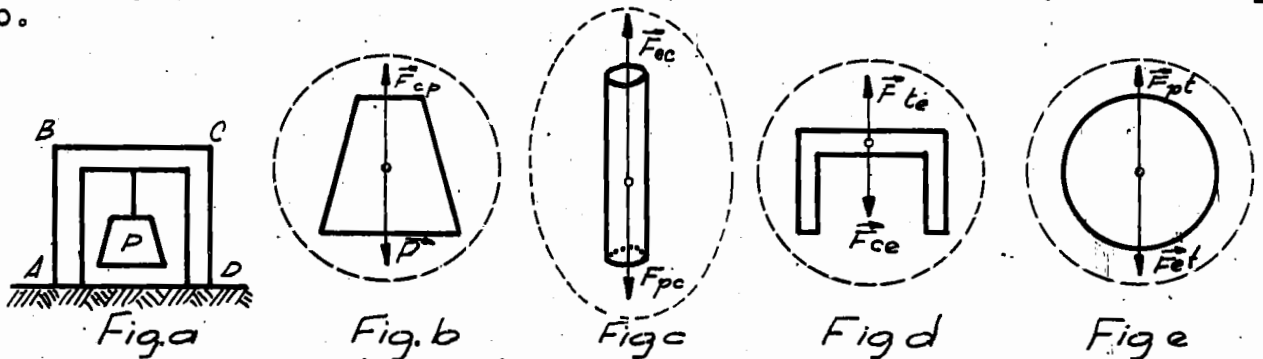


Fig. 3 - As forças sôbre cada corpo do Problema 1

A 3ª lei vale pois em tôdas as situações em que apareçam forças, em equilíbrio ou não. Note-se também que deve-se ter cuidado ao procurar as reações. São a êste respeito esclarecedores os exemplos da fig. 3.

PROBLEMA 1 - ABCD é uma estrutura rígida e quase sem pêsso apoiada sôbre a Terra. Da barra horizontal BC pende uma corda de pêsso também desprezível, que sustenta em equilíbrio um pêsso $P = 80 \text{ N}$. Achar as forças sôbre o pêsso, corda, estrutura e Terra (fig. 3).

Solução:- Isolando o 1º sistema: o pêsso P.

Achando as forças (fig. 3b): Pêsso \vec{P} (terra sôbre o corpo) e força F_{cp} da corda sôbre o pêsso.

Aplicando a 1ª lei: $\vec{P} = \vec{F}_{cp}$

Isolando o 2º sistema: a corda (fig. 3c)

Achando as forças: Força F_{pc} do pêsso sôbre a cor

da (já que a corda age sôbre o pêsso, pela 3ª lei o pêsso age sôbre a corda), e força F_{ec} da estrutura sôbre a corda

(do contrário a corda desceria e com ela o pêsso, o que é contra a hipótese do problema).

Aplicando a 1ª lei:

$$\vec{F}_{pc} = \vec{F}_{ec}$$

Isolando o 3º sistema: a estrutura ABCD (fig. 3d)
Achando as forças: Força \vec{F} (pela 3ª lei) e força \vec{F}_{te} da terra sobre a estrutura, atuando sobre as duas barras verticais.

Aplicando a 1ª lei:

$$\vec{F}_{ce} = \vec{F}_{te}$$

Isolando o 4º sistema - A Terra (admitindo que a Terra está em repouso).

Achando as forças-Força \vec{F}_{et} da estrutura sobre a terra (fig. 3c) e força de atração do corpo sobre a terra \vec{F}_{pt} (ambas pela 3ª lei)

Aplicando a 1ª lei:

$$\vec{F}_{pt} = \vec{F}_{et}$$

A cada força corresponde ao seu par pela 3ª lei (em corpos diferentes) e que são:

$$\vec{P} \text{ e } \vec{F}_{pt}; \vec{F}_{ce} \text{ e } \vec{F}_{ec}; \vec{F}_{et} \text{ e } \vec{F}_{te}$$

Entretanto todas são de módulo igual a 80 N (1ª lei).

PROBLEMA 2 - Um caminhão de 4 toneladas-força de peso e com rapidez de 30 km/h se choca com um carro de 1,5 tonelada-força de peso, porém a 100 km/h. Qual bate com maior força?

Solução:- Pela 3ª lei de Newton a força que o caminhão exerce em cada instante do choque sobre o carro, é exatamente igual à força que o carro exerce sobre o caminhão.

PROBLEMA 3 - Um carro de peso 2 tonelada-força sobe uma estrada reta, porém inclinada de 40 graus com a horizontal. A rapidez do carro é de 50 km/h. Sabendo que o motor tem uma potência de 80 hp, qual a força externa total sobre o carro?

Solução:- Pela 1ª lei de Newton a força externa TOTAL sobre o carro é NULA. É claro que existem forças parciais sobre o carro (da estrada, do peso, etc.) porém todas somam zero.

PROBLEMA 4 - Demonstre que se um sistema de três partículas se que interatuaem está em equilíbrio, então é nula a soma das forças externas (não de interação entre as partículas do sistema).

Solução:- Sejam \vec{F}_1 , \vec{F}_2 e \vec{F}_3 as forças externas e \vec{F}_{12} , \vec{F}_{23} , \vec{F}_{31} ... as forças internas (fig. 4). Como o sistema está em equilíbrio então é necessário que a $\vec{F} = 0$ para CADA partícula.

$$(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{13}) + (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3) = 0$$

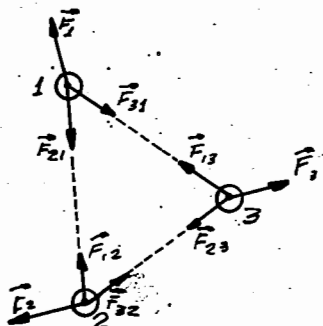


Fig. 4

As forças no primeiro parenteses são as forças internas e pela 3ª lei a sua soma é nula.
Portanto

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$$

PROBLEMA 5 - Generalize o problema anterior para o caso de n partículas.
Como vemos pelo Problema 5 bastará que se aplique a equação

$$\sum \vec{F}_e = 0$$

Equação 2

Onde as F_e são as forças EXTERNAS, se se afirma que o sistema está em equilíbrio. Esta soma vetorial no caso de forças coplanares, pode ser expressa pelas duas equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{array} \right.$$

Equação 3

A grande maioria dos problemas que se apresentam na prática recai no caso de forças coplanares e neste caso temos duas equações a utilizar (Equação 3). É claro pois que o número máximo de incógnitas de tais problemas será dois, a menos que se forneça m outras equações por meio de relações geométricas ou outros dados constantes dos problemas.

III - PARTÍCULAS, CORPOS RÍGIDOS E SISTEMAS - A Mecânica estuda os movimentos (e suas causas) de quaisquer corpos: um gás, um líquido, um sólido, uma molécula, um elétron, etc. Dêsse modo talvez o mais lógico seria estudarmos inicialmente a Mecânica de uma partícula e depois considerando que todos os corpos na natureza são constituídos de partículas estudar êsses corpos aplicando a cada uma de suas partículas as leis da Mecânica. Mas ao nos lembrarmos que 18g de água por exemplo possuem aproximadamente 6×10^{23} moléculas, veremos que isto seria impratiável na maioria dos casos. Por isso em Mecânica costuma-se estudar os sistemas de partículas (como um gás por exemplo) através de métodos especiais como mostraremos em outra parte desta exposição. No caso dos sistemas cujas partículas mantêm uma distância fixa entre si (como uma barra de ferro) é possível, entretanto, uma grande simplificação. Estes sistemas cujas partículas não se afastam nem se aproximam uma das outras nós denominaremos CORPOS RÍGIDOS.

Na prática um corpo nunca é rígido. Assim sabemos que mesmo uma barra metálica quando aquecida se dilata e quando resfriada se contrai. Do mesmo modo se a barra for submetida a uma grande tração ou compressão sabemos que ela sempre se deforma mais ou menos. Mas em Física sempre se constroi abstratamente em MODELO IDEAL para que se possa tratar com simplicidade MATEMÁTICA os problemas que correspondem ao MODELO FÍSICO.

Ao físico cabe decidir se pode ou não admitir se há correspondência razoável entre os dois modelos. Assim poderemos tratar uma bala de aço como um corpo rígido durante a sua trajetória, mas já não poderíamos considerá-la como tal ao se chocar com uma chapa metálica.

Pode-se considerar as deformações como desprezíveis se as forças que atuam são pequenas e se outras grandezas como a temperatura se matêm praticamente constantes. Quando se quer levar em conta tais deformações, o problema tem que considerar a natureza do material.

A grande simplificação que o estudo dos corpos rígidos permite, tem por base o seguinte fato: Seja A uma tábua rígida. A ação da Força F (fig. 5) sobre o corpo é a mesma, quer empurremos a tábua em 1 ou puxemo-la por 2. Do mesmo modo se pudessemos aplicar a F em um qualquer ponto da linha 1-2, o efeito seria o mesmo. Assim poderíamos amarrar um cordel sem pêso em 2 e puxar o corpo pelo ponto 3 do cordel, ou ainda empurrar a tábua através de uma haste muito leve e muito fina pelo ponto 4, todos pertencentes à direção 1-2.

Desta experiência vê-se que as forças sobre um corpo rígido não precisam ter seu ponto de aplicação especificado, mas ape-

nas sua linha de ação. Podemos deslizar a força em sua linha de ação que o seu efeito é o mesmo. Diz-se então que as forças atuantes sobre corpos rígidos são representadas por VETORES DESLIZANTES. O efeito das forças é o mesmo no que se refere ao equilíbrio (fig. 5a-d). Assim, nas figuras à frente deslizam as forças: quanto ao equilíbrio o sistema forneceu invariante, mas em um caso está submetido à tração e em outro à compressão; como o corpo é rígido, esta diferença entretanto não nos interessará.

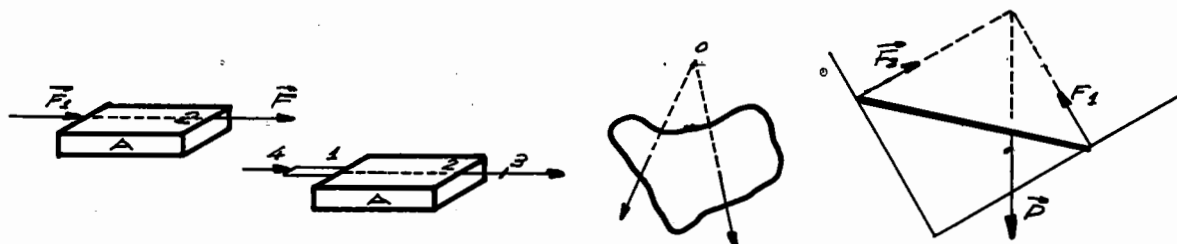
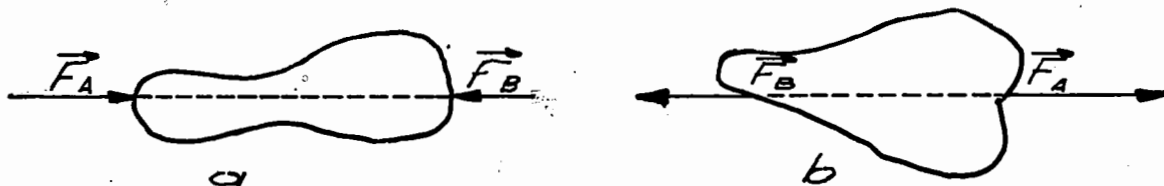


Fig. a Fig. b Fig. c Fig. d
Fig. 5 - As forças sobre um corpo rígido são vetores deslizantes

O que dissemos nos permite no CASO DE FORÇAS CONCORRENTES, tratarmos o equilíbrio do corpo rígido como o de UMA PARTÍCULA situada no PONTO DE CONCURSO DAS FORÇAS (fig. 5c e 5d). Neste ponto de concurso poderemos então decompor as forças segundo dois eixos ortogonais e aplicar as Equações 3.



Dêsse modo seja a barra AB da fig. 5d, colocada sobre dois planos inclinados sem atrito. As forças F_1 , F_2 e P que atuam sobre a barra, concorrem no ponto O. Podemos deslizá-las até O e impor a condição:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{P} = 0$$

Se não quisermos utilizar as Equações 3, poderemos construir o polígono de forças (no caso é um triângulo) e resolver o problema graficamente se representarmos as forças em escala.

PROBLEMA 6 - Discuta fisicamente o papel das forças internas em um corpo rígido para determinarem a propriedade de deslizamento das forças externas discutidas acima. Considere a transmissibilidade da força em um líquido e em um gás. Discuta também como se comporta uma corda perfeitamente flexível sob ação de: a) forças ao longo da corda; b) forças transversais.

A grande maioria dos problemas que se apresentam na prática forças coplanares concorrentes, pode ser mais facilmente resolvida com o auxílio dos seguintes teoremas, todos eles, é claro simples consequências da 1ª lei de Newton e da condição dela decorrente de ser nula a soma das forças sobre um corpo em equilíbrio.

TEOREMA - Se três forças estão em equilíbrio são então coplanares, e concorrentes ou paralelas.

TEOREMA (LAMY) - Para três forças em equilíbrio (fig. 6) vale o seguinte sistema de duas equações:

$$\frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{F_3}{\sin \gamma} \quad \text{Equação 4}$$

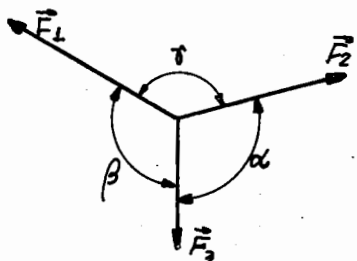


Fig. 6.

PROBLEMA 7 - Demonstre os dois Teoremas precedentes.

PROBLEMA 8 - Qual a tensão nas cordas da fig. 7, sabendo que o sistema está em equilíbrio?

Solução: - Como todo sistema está em equilíbrio, também o estará o ponto O. Tomemos pois O como nosso sistema.

As forças sobre ele são \vec{F}_1 e \vec{F}_2 (das

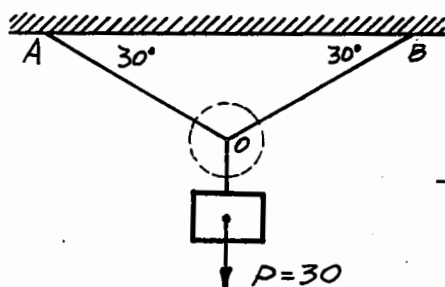
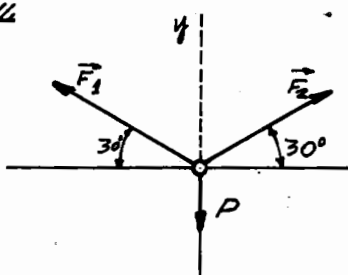


Fig. 7.



cordas e portanto na direção das mesmas já que a corda em equilíbrio só pode estar em tração (Problema 6) e \vec{F}_3 na direção do peso \vec{P} do bloco suspenso.)

Pela 3ª lei:

$$\vec{F}_3 = P;$$

$$\vec{F}_1 = \text{tensão na corda OA};$$

$$\vec{F}_2 = \text{Tensão em OB, pela 1ª lei e tomando eixos XOY, como na fig. 7 (b)}$$

$$\begin{cases} F_x = F_1 \cos 30^\circ - F_2 \cos 30^\circ = 0 \\ F_y = F_1 \cos 60^\circ + F_2 \cos 60^\circ - P = 0 \end{cases}$$

Donde $F_1 = F_2 = 30 \text{ N}$

PROBLEMA 9 - Determinar a mínima força horizontal \vec{F} aplicada ao centro de um rolo de peso P e raio a (fig. 8) necessária para arrastá-lo sobre um obstáculo de altura h .

Solução: - O nosso sistema é o rolo considerado como um corpo rígido. As forças sobre ele são (quando estiver quasi deixando o solo): o peso P , a força F a determinar, e a reação R do obstáculo.

Para a mínima força \vec{F} , o rolo estará em equilíbrio. Três forças em equilíbrio têm que se interceptar em um mesmo ponto C e desse modo determina-se a direção da reação R .

Pela 1ª lei:

$$F_x = R \cos \alpha - F = 0$$

$$F_y = R \sin \alpha - P = 0$$

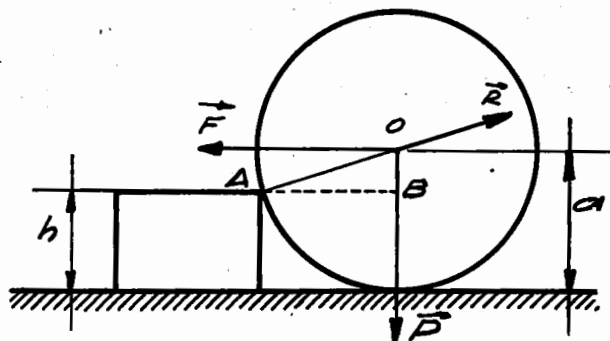


Fig. 8 .

Temos 3 incógnitas R , F e α e duas equações. A terceira é obtida de considerações geométricas, elementares: considerando-se o triângulo AOB obtém-se

$$a - h = a \operatorname{sen} \alpha$$

Donde

$$F = P (A^2 - (a-h)^2)^{1/2} / (a-h)$$

PROBLEMA 10 - Resolva o problema anterior graficamente utilizando o polígono de forças.

Solução:- A \vec{F} é horizontal, a \vec{P} vertical e conhecida, a \vec{R} está na linha de ação do raio que toca no obstáculo. Constrói-se \vec{P} verticalmente e em escala, de sua extremidade, traça-se a linha de ação de \vec{F} normal a \vec{P} . Da outra extremidade de \vec{P} traça-se uma linha paralela à direção de \vec{R} ; onde esta interceptar a linha de ação de \vec{F} estará o outro vértice do triângulo (já que as forças estão em equilíbrio. Medindo-se os lados obtidos e com o conhecimento da escala saber-se-á os valores de F e R (fig. 9)

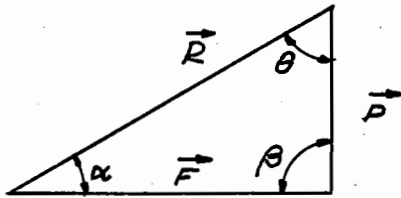


Fig. 9

PROBLEMA 11 - Resolva o problema anterior aplicando o teorema de Lamy.

Solução:- Considerando os ângulos entre as três forças

$$\frac{R}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{F}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{P}{\operatorname{sen} \alpha}$$

donde levando em conta o valor de sen.

$$F = P (a^2 - (a-h)^2)^{1/2} / (a-h)$$

Nunca nos devemos esquecer que o método gráfico não permite considerações gerais e que o Teorema de Lamy só vale para o caso de três forças. Dêsse modo deve-se sempre preferir o método geral que é o primeiro.

PROBLEMA 12 - Qual a tensão na corda A? (fig. 11a)

PROBLEMA 13 - Nas figuras 11 b,c, determinar as tensões nos elementos indicados, quando possível.

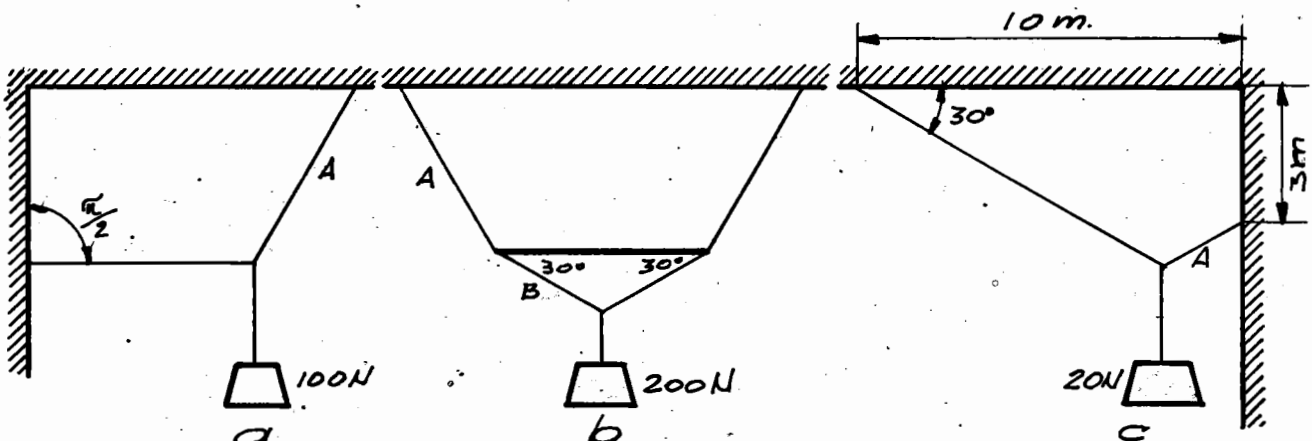


Fig. 11.

IV - ATRITO - Como vimos, na sistemática seguida na solução dos problemas, o ponto essencial é a procura das forças que atuam sobre o sistema. Precisamos pois estar aptos a reconhecer forças dos mais diferentes tipos. Já vimos forças que atuam sem que os corpos estejam em contacto (forças de ação à distância como o peso de um corpo), vimos também em problemas anteriores forças que resultam do contacto entre os corpos, tais como a da mola sobre o livro (fig. 1), ou a reação de uma mesa em um livro apoiado sobre ela, ou a força de uma corda que sustenta um peso. Outras forças que sempre aparecem na prática são forças também em contacto, entre as superfícies dos corpos. Assim acontece quando procuramos deslocar um objeto sobre uma mesa, ou um barco dentro da água ou quando um avião se desloca no ar. Tais forças são chamadas **FORÇAS DE ATRITO**.

Estas forças de atrito são em geral muito complexas em sua natureza e dependem de muitos fatores tais como a velocidade relativa das superfícies, densidade dos corpos, temperatura, etc. Mas como sempre o físico procura um **MODELO IDEAL** simplificado para ser tratado matematicamente e a partir do qual se possam tirar algumas conclusões que devem então ser comparadas com os resultados experimentais. Se a concordância é razoável, a simplificação feita é válida e portanto útil.

No nosso caso, não trataremos por ora do atrito em meios fluidos, e suporemos - justificados pelos trabalhos de Coulomb - que a força de atrito, entre sólidos:

- sempre se opõe ao movimento **RELATIVO** de duas superfícies;
- depende da natureza do par de superfícies;
- depende diretamente da componente **NORMAL DE REAÇÃO** entre as duas superfícies;
- independe da área de contacto das duas superfícies bem como da velocidade (aproximação válida para pequenas velocidades).

Este modelo nos conduz à formulação quantitativa muito simples:

$$F_a = k N \quad \text{Eq. 1}$$

onde k é o chamado coeficiente de atrito - variável para cada par de superfícies (hipótese b) - e N é a componente normal de reação entre as duas superfícies (hipótese c). A hipótese (a) nos dá a direção e o sentido do vetor F_a . As hipóteses a, b, c, naturalmente têm origem no quadro físico que imaginamos do deslocamento de duas superfícies sólidas.

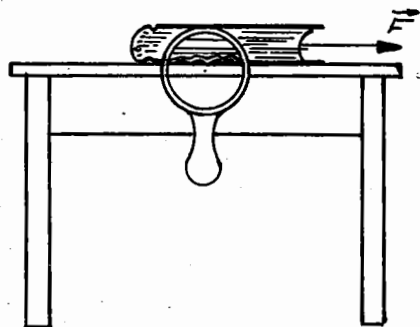


Fig. 12

Assim imaginemos a interface de dois corpos (um livro e uma mesa) vista através de uma potentíssima lente (fig. 12). As rugosidades das duas superfícies impedem mesmo o **INÍCIO** do movimento do livro sob ação de uma força F . Aumentando esta força chega-se a um ponto em que as rugosidades do livro resvalam sobre as da mesa e tem início o movimento. Portanto a F tem que ir aumentando gradualmente, a ela corresponde em cada instante uma força de atrito igual e posta que mantém o equilíbrio. No instante em que o movimento é iminente seja F_a o valor da F . Chama-se coeficiente de atrito estático a relação

$$k_e = F_a / N$$

É claro que antes do movimento iminente

$$F \leq k_e N$$

Mas o Físico não gosta de lidar com desigualdades, uma vez que elas são satisfeitas por um número infinito de valores da variável, enquanto as experiências conduzem a valores bem determinados (as soluções das equações que representam as leis Físicas corretas). Por isso o físico sempre se refere a fôrça de atrito estático máxima, quando $F_a = k_e N$.

Uma vez que o corpo se ponha em movimento o coeficiente de atrito muda em geral e é o chamado coeficiente de atrito de DESLIZAMENTO k_d .

Em geral para um mesmo par de substâncias: $k_e > k_d$

Damos abaixo um quadro de valores ilustrativos

TABELA I

Superfícies	K estático	Ang. atrito (em graus)
Madeira sôbre madeira	0,25 - 0,30	14,1 - 26,5
Metal sôbre madeira	0,50 - 0,60	26,5 - 31,0
Metal sôbre metal	0,15 - 0,20	8,5 - 11,5

Um ponto básico ao se colocar a fôrça de atrito atuando sôbre um corpo é nos lembrarmos de que ela SEMPRE SE OPÕE AO MOVIMENTO RELATIVO DOS 2 CORPOS.

Como a 1ª lei de Newton vale para quaisquer tipos de fôrças, basta que nos problemas de equilíbrio que se nos apresentarem, consideremos também as fôrças de atrito como uma das fôrças aplicadas. Vemos então o gênio de Newton: Ele generalizou sua lei para tôdas as fôrças: elétricas, gravitacionais, elásticas (como em uma mola), de atrito, etc. Ainda hoje ao se descobrir novas fôrças, como as nucleares, verifica-se que também elas seguem a lei que Newton enunciou há 300 anos. Do mesmo modo a 3ª lei também é obedecida e a tôda fôrça de atrito corresponde uma outra igual, de mesma direção, de sentido oposto e agindo no outro corpo.

Seja o sistema da figura 13. Quanto maior N , maior a fôrça de atrito e f poderá não ser suficiente para mover A relativamente a B. Antes do movimento há equilíbrio. Isolando (A) e (B) teremos:

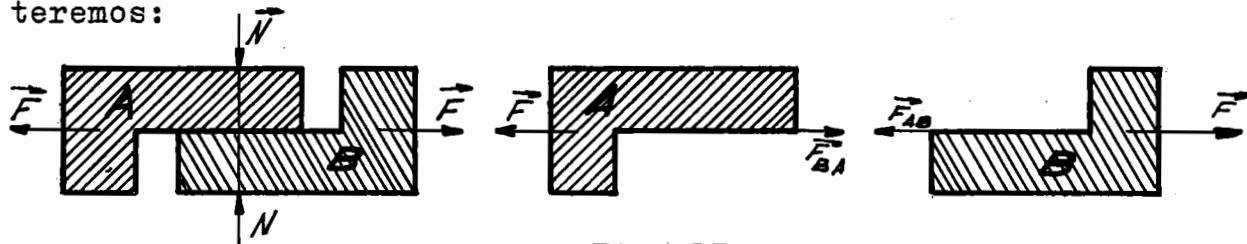


Fig. 13

\vec{f}_{BA} - fôrça de atrito de B sôbre A; \vec{f}_{AB} - idem de A sôbre B.

$$\text{Pela 1ª lei } \vec{f} = \vec{f}_{BA} \text{ em A}$$

$$\vec{f} = \vec{f}_{AB} \text{ em B}$$

$$\text{Pela 3ª lei } \vec{f}_{AB} = - \vec{f}_{BA}$$

O sentido da fôrça de atrito como se vê é sempre contrário ao do movimento que o corpo teria se não houvesse atrito. Ao se aumentar f , a fôrça de atrito (\vec{f}_{BA} e logo \vec{f}_{AB}) irá aumentando mas sempre $f =$ (fôrça atrito) enquanto houver equilíbrio. Porém em um dado ponto a fôrça de atrito não pode aumentar mais $f >$ fôrça a

atrito e teremos deslizamento de A sobre B. Chamamos f_a à força máxima de atrito: ela é a maior força que pode ser transmitida de A para B (ou vice-versa) sem deslizamento. É como se existisse um rebite entre A e B que se rompesse com uma certa força máxima (figura 14).

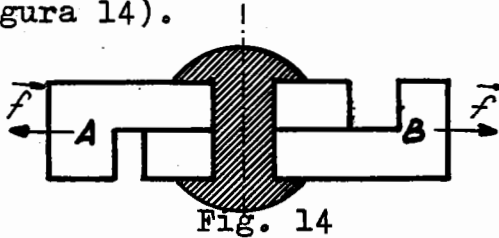


Fig. 14

Vale ainda dizer que quando entre as superfícies em contacto se interpõe uma camada fluida (como uma película de óleo) o atrito varia enormemente. Do mesmo modo observa-se que varia com a velocidade se estas não são bastante pequenas.

PROBLEMA 15 - Um ímã é atraído por outro com uma força de 0,3 N. Sendo de 3 N o peso do ímã, qual o mínimo coeficiente de atrito entre o ímã e a superfície A (fig. 15) para haver equilíbrio?

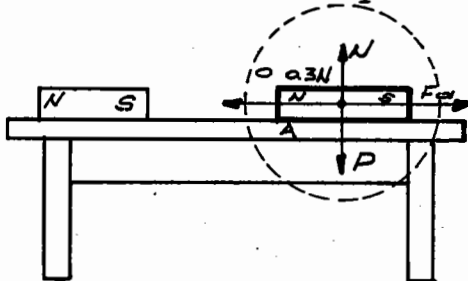


Fig. 15

Solução: Isolando o sistema: o ímã
Achando as forças: Força magnética de 0,3 N, normal N de reação da mesa, Peso P e força de atrito F_a .

Aplicando a 1ª lei:

$$F_x = N - P = 0$$

$$F_y = k_e N - 0,3 = 0$$

Donde se obtém $k_e = 0,1$

PROBLEMA 16 - Qual a reação R' total sobre a mesa e R sobre o livro, em módulo e direção? (fig. 16)

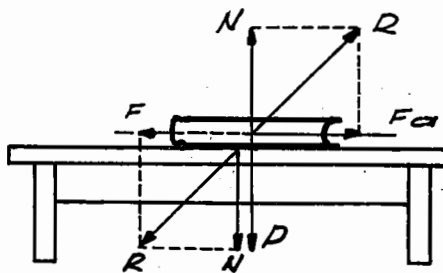


Fig. 16

Solução: Isolando o sistema: a mesa
Achando as forças: Força normal N' do corpo sobre a mesa (3ª lei) e reação à força de atrito da mesa sobre o corpo (3ª lei), isto é, força de atrito F'_a devido ao deslocamento da mesa em relação ao livro:

a força total é pois a soma vertical destas duas

$$\vec{F}'_a + \vec{N}' = \vec{R}'$$

Uma vez que as duas são ortogonais (fig. 16) o valor de R' é:

$$R' = (0,3^2 + 3^2)^{1/2} \text{ newtons}$$

E o ângulo que ela faz com a horizontal é tal que:

$$\text{tg } \theta = F'_a / N'$$

E é portanto igual a k_e . Pela 3ª lei de Newton a força \vec{R} que a mesa exerce sobre o livro é igual a R' e de sinal oposto. **PORTANTO QUANDO HÁ ATRITO A REAÇÃO R NÃO É MAIS NORMAL À SUPERFÍCIE.**

PROBLEMA 17 - Um bloco é posto sobre uma superfície áspera horizontal. Sendo P o peso do bloco e k_e o coeficiente de atrito estático entre os dois corpos, qual a mínima força a aplicar F para que o bloco inicie o seu movimento?

Solução: Isolando o sistema: O bloco

Achando as forças: Peso P do bloco, força de atrito \vec{F}_a , reação normal da mesa \vec{N} e força aplicada \vec{F} .

Aplicando as condições de equilíbrio: Pela 1ª lei: movimento iminente

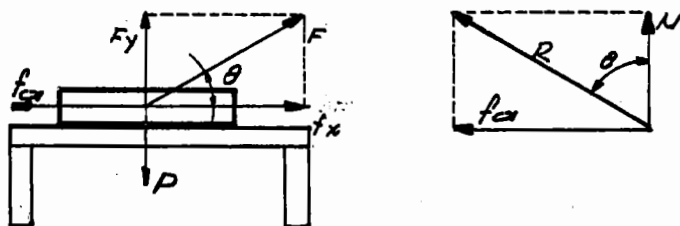


Fig. 17

$$\begin{cases} \sum F_x = F \cos \theta - k_e N = 0 \\ \sum F_y = F \sin \theta + N - P = 0 \end{cases}$$

Ou ainda para valor de F:

$$F = k_e P / (\cos \theta + k_e \sin \theta)$$

Para F ser mínimo é necessário que o denominador seja máximo o que nos dá

$$k_e = \operatorname{tg} \theta \quad \text{e} \quad F = P \sin \theta$$

Vemos da figura que a reação total da mesa sobre o bloco é a soma de \vec{F} e \vec{N} o que nos dá uma força total \vec{R} (fig. 17) inclinada com a vertical exatamente de um ângulo θ (ângulo de atrito) tal que $\operatorname{tg} \theta = k_e$. Antes do movimento iminente a reação \vec{R} obviamente faria um ângulo com a vertical compreendido entre 0 e θ . A linha de ação de \vec{R} (dependente da linha de ação da força \vec{F}) poderia pois ocupar qualquer posição dentro de um cone cujo semiângulo do vértice fosse exatamente o ângulo do atrito. No instante em que o corpo vai iniciar o movimento a reação \vec{R} se confunde com a geratriz deste chama-se do CONE DE ATRITO.

PROBLEMA 18 - Uma escada de peso desprezível e comprimento L é posta encostada a uma parede, fazendo um ângulo com a horizontal. De terminar a distância x a que um homem pode subir sendo o ângulo de atrito entre as superfícies em contacto quer na parede quer no chão.

PROBLEMA 19 - O bloco A (fig. 18) desliza sobre o plano e o bloco B está fixo. Sendo P_A e P_B os pesos, qual o ângulo do plano para haver movimento uniforme de A? k_e é o mesmo para as superfícies em contacto.

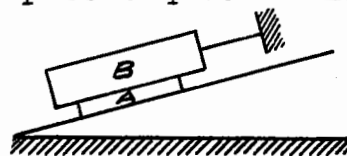


Fig. 18

$\sum \vec{F} = 0$ NÃO É CONDIÇÃO SUFICIENTE PARA HAVER EQUILÍBRIO - anteriormente dissemos que: SE um corpo está em equilíbrio, então $\sum \vec{F} = 0$. Isto decorre da 1ª lei de Newton. É NECESSÁRIO pois para haver equilíbrio que $\sum \vec{F} = 0$. Entretanto a condição não é SUFICIENTE, como mostraremos a frente.

Tôda vez que uma condição A é necessária para um acontecimento B então:

B implica A

Se a condição é também suficiente, então valem simultaneamente:

B implica A

A implica B

A condição $\sum F = 0$ (A) é necessária para o equilíbrio (B), mas o inverso não é em geral verdadeiro e a condição não é suficiente. Assim considere-se a barra AB da fig. 19 presa sem atrito pelo pino O. A soma das forças sobre a barra é:

$$\sum F = 3 - 3 = 0$$

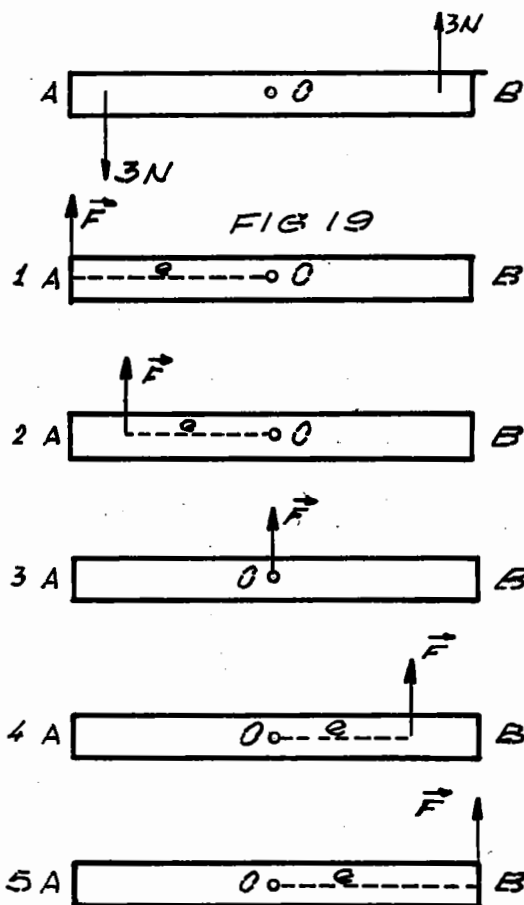


Fig. 20

utilizar uma grandeza que seja proporcional a ambas. É pois um novo conceito que vamos introduzir, para simplificar o estudo das rotações. Chamemos esta grandeza **MOMENTO DA FÔRÇA F EM RELAÇÃO AO EIXO QUE PASSA POR O**, e a indiquemos por

$$M_f^O = f e$$

Equação 1

Realmente, esta formulação está de acordo com os fatos que observamos experimentalmente, pois se $F = 0$, não há rotação. Domesmo modo se a força passa pelo eixo $e = 0$ e também não há rotação. Quanto ao outro efeito observado da mudança de sentido, façamos, para também levá-lo em conta, a seguinte convenção: SE A TENDÊNCIA À ROTAÇÃO FÔR NO SENTIDO CONTRÁRIO DOS PONTEIROS DO RELÓGIO, O MOMENTO É POSITIVO. É NEGATIVO NO CASO CONTRÁRIO.

PROBLEMA 20 - Quais as unidades de momento nos sistemas MKS, MKFS, CGS? Quais os fatores de conversão?

Poder-se-ia perguntar: E no caso da força da fig. 21, como calcular o momento em torno do ponto O?

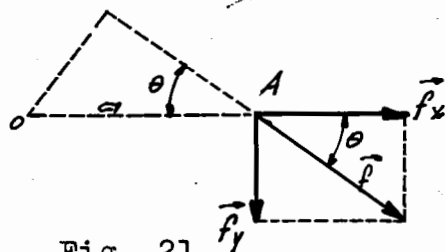


Fig. 21

Aqui aplicamos o fato de que uma força sendo um vetor pode ser decomposta em suas componentes ortogonais:

$$\begin{cases} f_x = f \cos \theta \\ f_y = f \sin \theta \end{cases}$$

Procuramos agora o MOMENTO DE CADA UMA DELAS E SOMAMOS PARA OBTER O MOMENTO TOTAL:

$$M_f^O = M_{fx}^O + M_{fy}^O$$

Mas como a f_x passa pelo eixo, seu momento é nulo e portanto:

$$M_f^O = f_y \cdot a$$

ou ainda

$$M_f^O = f a \text{ sen } \theta \quad \text{Equação 2}$$

Vê-se pois que o momento da \vec{F} é menor do que seria se a força fosse normal a barra. A equação acima é pois mais geral que a Equação que introduzimos inicialmente e que só é válida para forças normais a barra.

Ficaremos com esta definição quantitativa uma vez que ela é mais geral.

NOTA: Como se vê da Equação 2 e da fig. 21, a $\text{sen } \theta$ é também a distância da força ao ponto O por onde passa o eixo.

PROBLEMA 21 - Demonstre que o número que mede o momento de uma força F em relação a um ponto O é o mesmo número que mede o dobro da área do triângulo que se obtém unindo as extremidades da \vec{F} a O (fig. 22).

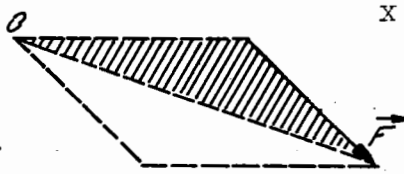


Fig. 22

PROBLEMA 22 - Discuta a questão da convenção do sinal do momento e do sinal do ângulo que a força faz com a direção obtida, OA. Discuta também se o fato de deslizar a força ao longo de sua linha de ação em um corpo rígido altera ou não o seu momento (muito importante).

MOMENTO DE UMA FÔRÇA* PODE SER CONSIDERADO COMO UM VETOR - Vimos no Capítulo I que o módulo do produto vetorial de dois vetores A e B era dado por:

$$|\vec{A} \wedge \vec{B}| = |AB \text{ sen } \theta| \quad \text{Equação 3}$$

Ora, a expressão do momento de uma força pode ser interpretada como o módulo de um produto vetorial, se os dois vetores forem F (a força) e a a distância do ponto de aplicação da força ao eixo). Pela figura 23 vemos que θ é o ângulo entre as direções dos dois vetores. Mas o produto vetorial de dois vetores é também um vetor (**) e portanto o MOMENTO terá que ser interpretado como um

vetor, e nesse caso poder-se-ia perguntar: Qual a direção e o sentido do vetor momento cujo módulo é dado pelo produto.

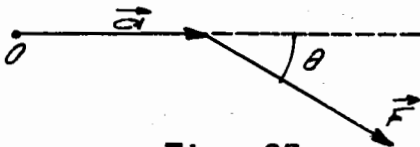


Fig. 23

$$M_F^O = F a \text{ sen } \theta$$

Pode-se atribuir, como direção do vetor momento, a direção do eixo de rotação que passa por O e que é perpendicular pois ao plano formado pela F e a . Isto fica em acôrdo com a própria definição de produto vetorial (Cap. I). Quanto ao sentido, a convenção anteriormente adotada nos é suficiente (veja Fig. 10, Cap. I).

(*) Em relação a um ponto. Para uma formulação mais rigorosa, ver de Bruhat, Mécanique ou Maia, Cálculo Vetorial.

(**) Vetor axial.

Dêste modo a expressão GERAL do momento de uma fôrça será:

$$\vec{M}_F^O = \vec{a} \wedge \vec{F} \quad \text{Equação 4}$$

Esta sendo uma equação vetorial, nos dá tôdas as informações sôbre o vetor momento, quer a sua direção, intensidade ou sentido, de acôrdo com a definição de produto vetorial.

Entretanto só nos interessaremos pelo valor algébrico (isto é módulo e sinal) de M_F^O de vez que a maioria dos sistemas de fôrças que consideraremos serão coplanares. Neste caso os vetores momento têm todos, a mesma direção, perpendicular ao plano das fôrças consideradas. Basta pois que se indique o seu valor algébrico. É claro que o eixo de rotação se projeta como um ponto no plano. A êste respeito damos, sem demonstrar, um importante TEOREMA (DE VARIGNON): "O momento resultante (total de um sistema de fôrças é igual ao momento da resultante, em relação a um mesmo ponto". O presente teorema é apenas válido quando o sistema de fôrças não é equivalente a um binário, como mostraremos à frente.

VI - A $\sum M = 0$ é também condição de equilíbrio - Agora estamos aptos a entender porque a $\sum \vec{F} = 0$ não é condição suficiente para o equilíbrio. No caso de um corpo rígido é necessário também que haja equilíbrio translacional ($\sum \vec{F} = 0$). No caso de fôrças planas temos pois as duas condições

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = 0 \\ \sum M = 0 \end{cases}$$

que representam três equações algébricas

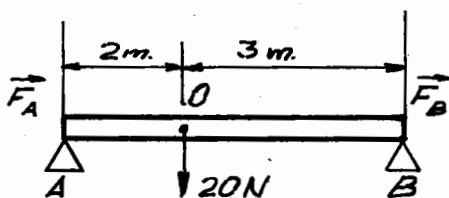
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M = 0 \end{cases}$$

Equações 5

Assim as três equações 5 são as condições agora NECESSÁRIAS E SUFICIENTES, para que um corpo rígido esteja em equilíbrio no plano.

PROBLEMA 23 - Qual a reação dos suportes A e B que sustentam a barra da figura 24 ?

- Solução: a) Seja a barra o nosso sistema
 b) Achando as fôrças: as fôrças sôbre a barra são três: a de 20 N, a reação do suporte A e de B.
 c) Aplicando as condições de equilíbrio



$$F_x = 0 \text{ (não há fôrças horizontais)}$$

$$F_y = F_B + F_A - 20 = 0 \text{ (fôrças verticais)}$$

Eqs. 6

$$M_{Fi}^O = M_{FA}^O + M_{FB}^O + M_{20}^O = F_A \cdot 2 + 20 \cdot 0 - F_B \cdot 3 = 0$$

Fig. 24.

Temos pois duas equações e duas incógnitas. Observe-se que somente as duas primeiras condições ($\sum \vec{F} = 0$) não resolveria o problema. A solução do sistema de equações 6 é

$$F_B = 8 \text{ N}; \quad F_A = 12 \text{ N}$$

PROBLEMA 24 - Demonstrar que a condição $M_{Fi}^0 = 0$ vale para qualquer ponto se vale para um ponto e o corpo está em equilíbrio. Seja que as forças F_1, F_2, \dots, F_i , ajam nos pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_i, y_i)$.

Decomponhamos estas forças em duas componentes ortogonais $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \dots$, etc.

Então

$$\begin{cases} \sum X_i = 0 \\ \sum Y_i = 0 \end{cases}$$

Para obter a condição e os momentos basta que se considere inicialmente a figura 24a onde traçamos para exemplo a força F_1 . Tome mos como eixo o que passa pela origem. Então pelo Teorema de Varignon:

$$\sum M_{F_1}^0 = (Y_1 x_1 - X_1 y_1)$$

Para todas as F_i , teremos pois a 3ª condição, escrita do seguinte modo:

$$\sum M_{Fi}^0 = \sum (Y_i x_i - X_i y_i) = 0$$

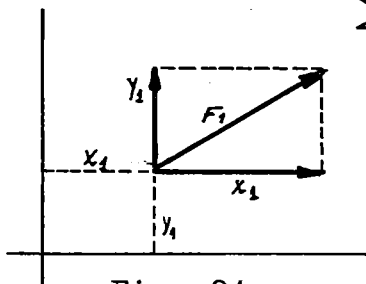


Fig. 24a

Ora tomemos agora um outro ponto P qualquer (x_0, y_0) para origem dos momentos. A soma dos momentos será

$$\sum M_{Fi}^P = \sum [Y_i (x_i - x_0) - X_i (y_i - y_0)]$$

Mas pela propriedade distributiva da soma

$$M_{Fi}^P = (Y_i x_i - X_i y_i) - x_0 \sum Y_i + y_0 \sum X_i \quad \text{Eqs. 6a}$$

Mas como $\sum Y_i = \sum X_i = 0$, por hipótese vem que $\sum M_{Fi}^P = 0$

Isto vale para qualquer ponto.

Dêste modo, se um corpo está em equilíbrio, a soma dos momentos é nula em relação a qualquer ponto. Escolhemos o ponto de acordo com a nossa conveniência.

PROBLEMA 25 - Aplique duas vezes a equação $\sum M = 0$ aos pontos A e B no problema anterior e obtenha F_A e F_B sem empregar $\sum F = 0$.

PROBLEMA 26 - A barra articulada em O da figura 25 está segura pela corda AB e sustenta na extremidade de B um peso de 80 N. Admita que o peso P = 40 newtons da viga está aplicado no centro da viga.

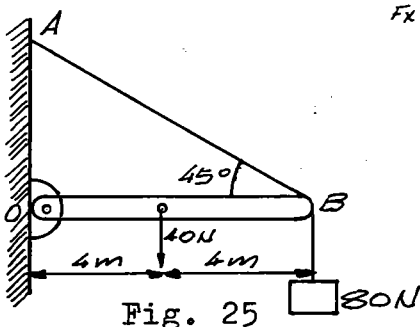


Fig. 25

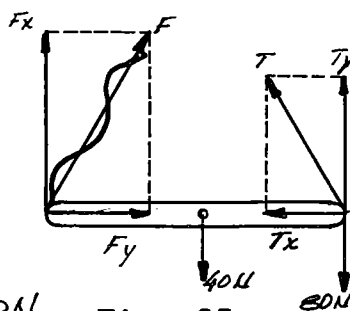


Fig. 25a

Qual a tensão na corda ?
Quais as forças na extremidade A da viga ?
Em primeiro lugar isolemos o sistema (viga) e em segundo achemos TÓDAS as forças externas atuando sobre o sistema (fig. 25a).
Em B temos o peso de 80 N e a força T com que a corda sustenta a viga, igual e de

sentido contrário à tensão na corda. (3ª lei de Newton). Decomposemos esta força em T_x e T_y . No centro da viga o peso de 40 N (força de atração da Terra). Em O só existe em contacto com a viga a arti

culação. Esta exerce uma força F que "a priori" desconhecemos em direção e módulo. Determiná-la-emos por suas componentes F_x e F_y . Uma vez achadas tôdas as forças, escolhamos o ponto O para origem dos momentos e imponhamos as condições de equilíbrio.

$$\text{Equações 7} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum f_x = F_x - T \cos 45^\circ = 0 \\ \sum f_y = F_y + T \sin 45^\circ - 40 - 80 = 0 \\ \sum M_{fi}^A = 40 \cdot 4 + 80 \cdot 8 - T \sin 45 \cdot 4 = 0 \end{array} \right.$$

O sistema de equações 7 nos fornece então

$$T = 141 \text{ N}; F_y = 20 \text{ N}; F_x = 100 \text{ N}$$

Observe-se que se escolhêssemos o ponto para tomar momento no centro, o sistema de equações resolveria o problema, mas a equação dos momentos seria mais complicada. Escolhendo a origem dos momentos em O anulamos automaticamente os momentos de F_x e F_y .

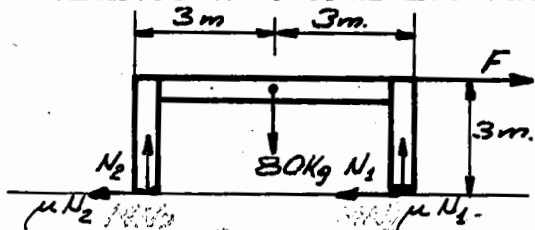


Fig. 26

Na figura 26 a mesa é puxada pela força F com movimento uniforme.

Qual o valor de F , N_2 e N_1 ?

$$N_1 = 56 \text{ kg}^*; N_2 = 24 \text{ kg}^*; F = 32 \text{ kg}^*$$

VII - CONJUGADOS OU BINÁRIOS - Um caso interessante que surge frequentemente na prática é aquele em que $\sum f = 0$ entretanto o corpo **NÃO ESTÁ EM EQUILÍBRIO**.

Um exemplo deste caso é aquele em que o corpo está sujeito à ação de duas forças paralelas, iguais e de sentidos opostos (figura 27). Estas duas forças cujas linhas de ação são paralelas e não coincidentes, constituem um BINÁRIO ou conjugado. O binário produz rotação cada vez mais rápida, pois as forças têm a $\sum M \neq 0$.

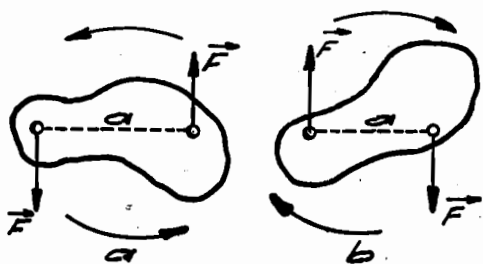


Fig. 27

Tome-se, por exemplo, o ponto médio que dista $a/2$ das duas forças. Então pela figura 27a,

$$\sum M = -F \frac{a}{2} - F \frac{a}{2} = -Fa$$

e pela b

$$\sum M = +Fa$$

PROBLEMA 27 - Demonstrar que se tomássemos qualquer outro ponto o valor do momento do conjugado seria o mesmo.

QUESTIONÁRIO 3: Por que o Teorema de Varignon não vale para um binário?

VIII - SISTEMAS DE FORÇAS - É muito comum na prática, lidarmos com sistemas de forças paralelas, atuando sobre um corpo rígido. Um exemplo de um tal sistema é o das forças atuando sobre a placa suspensa, fig. 28a. Na realidade, desprezando a curvatura da terra, o sistema de forças com que a terra atrai um corpo, também é um sistema de forças paralelas (fig. 28b).

Poder-se-ia perguntar: Qual a resultante do sistema? Isto

é, qual a força única que exerceria o MESMO EFEITO do sistema? Ora, o sistema de forças, como vimos, exerce dois efeitos:

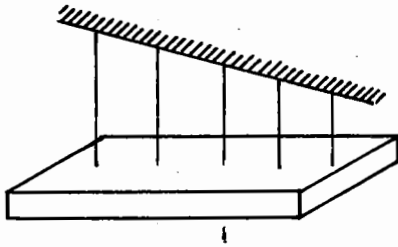


Fig. 28a - Um sistema de forças paralelas atuando sobre a placa.

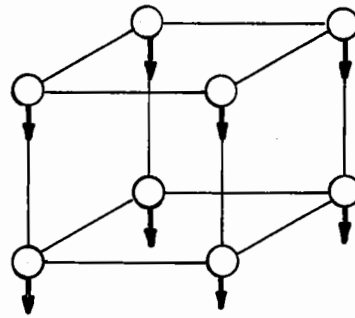


Fig. 28b- As forças de atração da terra que atuam sobre cada átomo de molécula, formam um sistema paralelo.

- 1 - Translacional (arrasta o corpo com movimento acelerado como vemos mais tarde).
- 2 - Rotacional (pelos momentos das forças o corpo gira com rotação cada vez mais rápida).

Portanto a força \vec{R} que substituir o sistema terá que exercer estes dois efeitos do mesmo modo e as condições para isto são:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1^\circ) \vec{R} = \sum \vec{F}_i \\ 2^\circ) M_R = \sum M_i \end{array} \right. \quad \text{Eqs. 8}$$

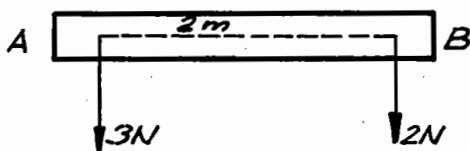
O valor efetivo da resultante é a soma dos valores algébricos das forças para produzir o mesmo efeito da translação.

O momento da resultante é a soma dos momentos das componentes para produzir o mesmo efeito de rotação.

A condição 2 pois, determina a linha de ação da resultante, pois a linha de ação é que tem a ver com os momentos.

Vamos ilustrar o que se disse, com um exemplo (fig. 29).

Seja AB uma tábua de espessura e peso desprezíveis sob ação de duas forças paralelas do mesmo sentido 3 N e 2 N. A resultante será



$$R = 5 \text{ N}$$

paralela às componentes, porém ainda não sabemos a sua linha de ação. Para isto es creveremos:

$M_R = R \times X$ onde X é a distância da linha de ação da R a um ponto qualquer escolhido como origem. Escolhamos o ponto A como origem. Então

$$M_R = R \cdot x = \sum M_i$$

ou

$$R \cdot x = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 2$$

ou ainda

$$x = 415 \text{ m}$$

Para mostrar que a 2 vale em relação a qualquer ponto, tomemos agora B como origem. Então:

$$5 \cdot x' = -3 \cdot 2 + 1,5 \cdot 0 \quad x' = -\frac{6}{5} \text{ m}$$

que é o mesmo ponto determinado em relação a A, pois $|x'| + |x| = 2\text{m}$

PROBLEMA 28 - Demonstrar que a posição da linha da ação da resultante de um sistema de forças paralelas e coplanares independe da escolha da origem dos momentos.

Sejam F_1 as forças, então

$$R = \sum F_1 \text{ (pois são paralelas)}$$

e seja $x_1; x_2; x_3; \dots x_i$, a distância da linha de ação de cada uma a um ponto O e $x'_1; x'_2; \dots x'_i$ a distância a outra origem O' qualquer.

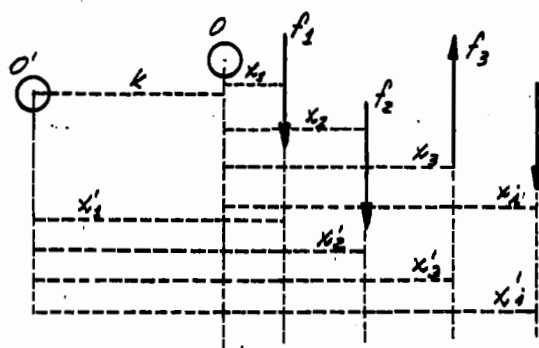


Fig. 30

Seja $x'_i = x_i + K$, (veja fig.30) para o significado de K). Então temos

$$R \cdot x = \sum f_1 \cdot x_1$$

$$\text{e} \quad R \cdot x' = \sum f_1 \cdot x'_1$$

donde

$$(1) \quad x = \frac{\sum f_1 x_1}{R} = \frac{\sum f_1 x_1}{\sum f_1}$$

$$(2) \quad x' = \frac{\sum f_1 x'_1}{\sum f_1}$$

Diminuindo a (2) da (1) teremos

$$x' - x = \frac{\sum f_1 x'_1 - \sum f_1 x_1}{\sum f_1}$$

Ou desenvolvendo

$$x' - x = \frac{f_1 x'_1 + f_2 x'_2 + \dots + f_i x'_i - f_1 x_1 - f_2 x_2 - \dots - f_i x_i}{\sum f_1}$$

$$x' - x = \frac{f_1 (x'_1 - x_1) + f_2 (x'_2 - x_2) + \dots + f_i (x'_i - x_i)}{\sum f_1}$$

ou ainda

$$x' - x = \frac{\sum f_1 K}{\sum f_1} = K$$

O que nos prova que a linha de ação é a mesma referida a qualquer dos dois sistemas.

Portanto, em resumo:

- (1) resultante - Soma algébrica das componentes (direção é a mesma pois são paralelas).
- (2) distância da linha de ação = $\frac{\text{soma dos momentos}}{\text{resultante}}$

IX - C.G. - O caso mais importante de forças paralelas é o das forças gravitacionais

Neste caso é útil também considerar um ponto do corpo por onde SEMPRE PASSA A RESULTANTE (a direção dela é sempre na vertical). Esse ponto é tradicionalmente chamado centro de gravidade do corpo (*). Tome-se por exemplo o corpo da figura 31. Se sero

(*) Ver nota de rodapé à página 32.

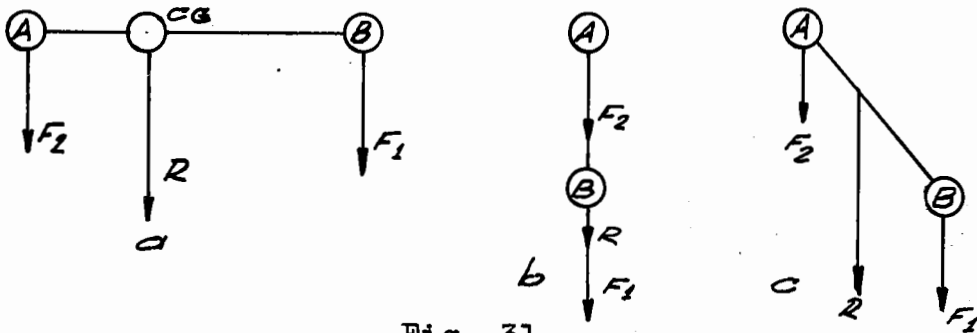


Fig. 31

O centro de gravidade é o ponto por onde sempre passa a resultante

dar o corpo AB a direção da resultante passará ainda pelo ponto C.G. DETERMINAÇÃO DO C.G. Se quiséssemos manter AB em equilíbrio, teríamos que aplicar-lhe uma equilibrante E de mesma direção que a resultante. Assim se pendurássemos por uma corda perfeitamente flexível a direção da corda passaria pelo C.G. Pendurando o corpo em outra posição poderíamos determinar o centro de gravidade pela intersecção das duas direções (EM RELAÇÃO AO CORPO). Fig. 31.

Desde que o C.G. é um ponto, poderemos determiná-lo analiticamente se soubermos (no caso de um campo de força no plano) as suas duas coordenadas X_0 e Y_0 em relação a um sistema de EIXOS FI XO NO CORPO.

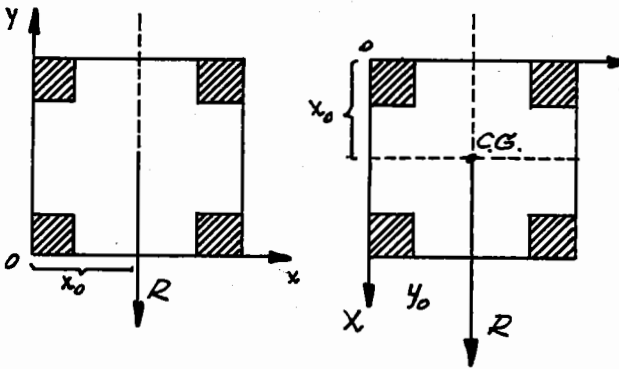


Fig. 32

Para obter a expressão de x_0 e y_0 basta que REPITAMOS A EXPERIÊNCIA FÍSICA porém DESCRREVENDO-A MATEMATICAMENTE. Seja o corpo uma placa como o da figura 32 e a equação a linha de ação da resultante em relação aos eixos XOY é: $x_0 = \text{Constante}$.

Ao girarmos o corpo, o sistema de coordenadas também gira e a equação da reta passa a ser

$$y_0 = \text{constante}$$

As coordenadas de C.G. são pois

$$\begin{cases} x_0 = \frac{\sum m_i g x_i}{R} \\ y_0 = \frac{\sum m_i g y_i}{R} \end{cases} \quad \text{Eqs. 9}$$

Se o corpo for contínuo, dividi-lo-emos em partículas de massa dm e as coordenadas do C.G. são dadas por

$$\begin{cases} x_0 = \frac{\int g \cdot x \, dm}{\int g \, dm} = \frac{\int x \, dm}{\int dm} \\ y_0 = \frac{\int g \cdot y \, dm}{\int g \, dm} = \frac{\int y \, dm}{\int dm} \end{cases} \quad \text{Eqs. 10}$$

(*) Não confundir com centro de massa, embora os dois sejam praticamente coincidentes no caso de corpos de pequena extensão em relação ao raio da terra.

Se μ for a massa específica

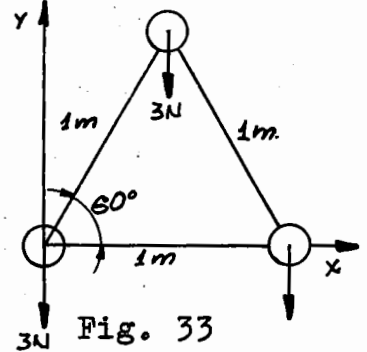
teremos

$$\text{Eqs. 11} \quad \begin{cases} \mu = dm/dV \\ x_0 = \frac{\int_V \mu x dV}{\int_V \mu dV} \\ y_0 = \frac{\int_V \mu y dV}{\int_V \mu dV} \end{cases}$$

(\int_V significa integre-se através de todo o volume)

e ainda se μ for constante (corpo homogêneo)

$$\text{Eqs. 12} \quad \begin{cases} x_0 = \frac{\int_V x dV}{\int_V dV} \\ y_0 = \frac{\int_V y dV}{\int_V dV} \end{cases}$$



PROBLEMA 29 - Qual o centro de gravidade do corpo da fig. 33 ?

Solução: Tomando como eixos os da figura, teremos:

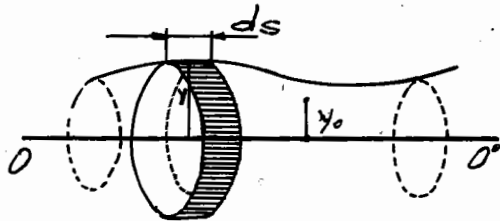


Fig. 33a

$$\begin{cases} x_0 = \frac{3 \cos 60^\circ + 3}{9} = 0,5 \text{ m} \\ y_0 = \frac{3 \cos 30^\circ}{9} = \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ m} \end{cases}$$

PROBLEMA 30 - É ou não nulo o momento total das forças-pêso em relação ao centro de gravidade?

PROBLEMA 31 - Demonstre que se um corpo possui um centro de simetria, o seu C.G. coincide com ele. Sugestão: Leve em conta a solução do problema anterior.

PROBLEMA 32 - Demonstre que se um corpo possui um plano ou eixo de simetria o C.G. está sobre o mesmo.

PROBLEMA 33 - Demonstre o Teorema de Pappus: "Se uma curva plana (ou uma superfície plana) gira em torno de um eixo coplanar e não coincidente com a mesma, a área (volume) gerada pela curva (superfície) é igual ao produto do comprimento da trajetória do centro de gravidade da curva (superfície) pelo comprimento (área) da curva (superfície)". Para o caso da curva, vide fig. 33a.

PROBLEMA 34 - Demonstre, por considerações de simetria, que o c.g. de um triângulo homogêneo está a um terço da altura de qualquer de suas bases (ponto de interceção das medianas).

OBSERVAÇÃO: Na eq. 12 acima, vemos que as coordenadas do c.g. dependem apenas da geometria do sistema e não do material que é feito (independente de μ). Um mesmo volume de ferro, madeira ou água, teria o c.g. na mesma posição. Podemos até dizer que o volume tem um CENTROIDE definido pelas equações 12 e que no caso do corpo homogêneo coincide com o c.g. Do mesmo modo com um corpo em forma de superfície plana de $\mu =$ constante e espessura λ constante e muito pequena:

$$x_0 = \frac{\int x dA}{\int dA} ; y_0 = \frac{\int y dA}{\int dA} \quad (\text{pois } dm = \mu \lambda dA) \quad \text{Eqs. 13}$$

para um corpo linear (plano) de seção reta λ , constante e pequena

$$x_0 = \frac{\int x dL}{\int dL}; \quad y_0 = \frac{\int y dL}{\int dL} \quad \text{Eqs. 14 (pois } dm = \mu \lambda dL). \quad \text{Refe-$$

rimo-nos igualmente aos centroides da superfície e da linha.

MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO - Poderemos, com um corpo como o da fig. 33b, decompô-lo em duas partes A e B, achar o c.g. de cada uma separadamente e depois o c.g. do conjunto, como se tivéssemos duas partículas a e b de massas iguais às de A e B e colocadas em seus respectivos c.g. Do mesmo modo, ao acharmos o c.g. de um corpo contínuo por integração, poderemos decompô-lo em elementos diferenciais dos quais se conhece a posição do c.g.

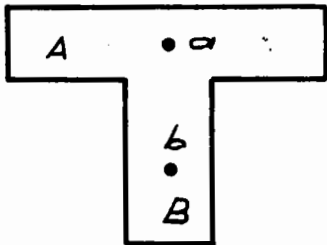


Fig. 33 b

Portanto podemos estender as equações 9 e 10 anteriores, para

$$x_0 = \frac{\sum x_i \mu g V_i}{\sum \mu g V_i}; \quad y_0 = \frac{\sum y_i \mu g V_i}{\sum \mu g V_i}; \quad z_0 = \frac{\sum z_i \mu g V_i}{\sum \mu g V_i}$$

$$x_0 = \frac{\int x \mu g dm}{\int \mu g dm}; \quad y_0 = \frac{\int y \mu g dm}{\int \mu g dm}$$

onde x_i e y_i são as coordenadas dos c.g. dos elementos V_i e x e y dos elementos dm .

No caso de corpos com superfícies de espessura constante e pequena ou de linhas, teremos (no plano):

$$x_0 = \frac{\sum x_i \mu g A_i}{\sum \mu g A_i}; \quad y_0 = \frac{\sum y_i \mu g A_i}{\sum \mu g A_i}$$

ou

$$x_0 = \frac{\sum x_i \mu g L_i}{\sum \mu g L_i}; \quad y_0 = \frac{\sum y_i \mu g L_i}{\sum \mu g L_i}$$

PROBLEMA 35 - Achar o c.g. de um quadrante circular homogêneo pelo método da decomposição.

Decomponhamos o setor em elementos dm de forma triangular (figura 33c), sendo μ a massa específica:

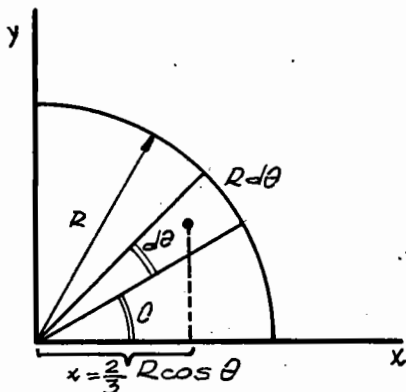


Fig. 33 c

$$dm = \mu \frac{R^2 d\theta}{2}; \quad x = \frac{2}{3} R \cos \theta \quad y = \frac{2}{3} R \sin \theta$$

$$x_0 = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int_0^{\pi/2} \frac{2}{3} R \cos \theta \cdot \frac{R^2 d\theta}{2}}{\int_0^{\pi/2} \mu R^2 \frac{d\theta}{2}}$$

$$x_0 = \frac{4}{3} \frac{R}{\pi}$$

Pela simetria vê-se que $x_0 = y_0$

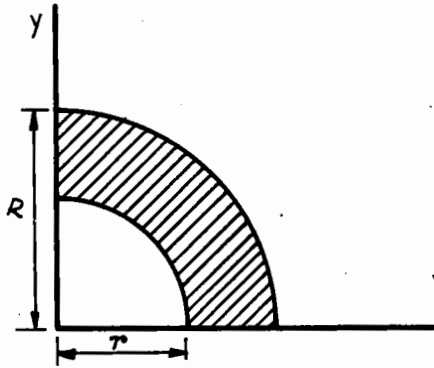


Fig. 33 d

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE - Seja achar o c. g. de uma placa como a da fig. 33 d em que de um setor circular de raio R cortou-se um setor de raio r. Ora, podemos admitir que da área A_1 do setor de raio tiramos a área A_2 do setor de raio A_2 para obtermos a área da figura. Se decomposermos, pois, a área A como $A = A_1 - A_2$, obviamente teremos que μ e g constantes):

$$x_0 = \frac{A_1 x_1 - A_2 x_2}{A_1 - A_2} \text{ e } y_0 = \frac{A_1 y_1 - A_2 y_2}{A_1 - A_2}$$

onde x_1, y_1 são as coordenadas do c.g. de A_1 e x_2, y_2 do c.g. de A_2 . Portanto apenas generalizamos o sinal Σ da equação para significar soma algébrica.

PROBLEMA 36 - Ache o c.g. da placa da fig. 33 d.

EXERCÍCIOS

1. Demonstre que a expressão geral para a força F horizontal, necessária para fazer subir, com velocidade constante, um corpo de peso P , em um plano inclinado de ângulo θ é

$$F = P \frac{\text{sen } \theta + K \cos \theta}{\cos \theta - K \text{sen } \theta}$$

onde K é o coeficiente de atrito de deslizamento entre o corpo e o plano.

2. A extremidade A da barra AB (fig. 34) repousa numa superfície horizontal sem atrito. A extremidade B é sustentada por um pino. Quais as componentes horizontal e vertical da reação do pino sobre a barra, se se aplica em A uma força F horizontal valendo 5 N? Despreze o peso da barra.

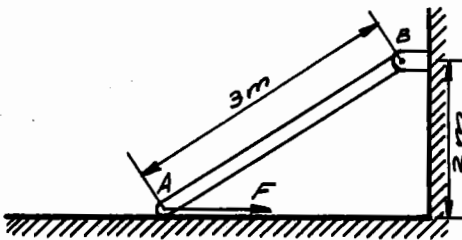


Fig. 34

Resposta: $H = 5 \text{ N}$ para a esquerda

$$V = 2 \sqrt{5} \text{ N para baixo}$$

3. Uma corda flexível (fig. 35) de peso P , está suspensa por dois ganchos situados na mesma horizontal.



Fig. 35

- a) Qual o módulo e direção da força que a corda exerce sobre cada gancho?
b) Qual a tração na corda, no seu ponto mais baixo?

Resposta: a) $\frac{P}{2 \text{sen } \theta}$; b) $\frac{P}{2} \cotg \theta$

4. Cada braço da estrutura da figura 36 pesa 30 kg^* e tem seu C.G. no ponto médio do braço. Um peso de 20 kg^* está suspenso no centro de um dos braços. Supondo que a estrutura repousa sobre superfície perfeitamente lisa, determinar:

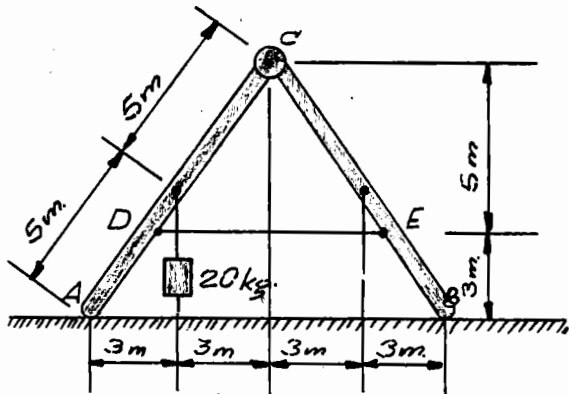


Fig. 36

- a) as reações de apoio em A e B;
b) a tração T no cabo DE;
c) as forças que solicitam o pino no C.

Despreza-se o peso do cabo.

Resposta

$$A = 45 \text{ kg}^*; \quad B = 35 \text{ kg}^*;$$

$$T = 24 \text{ kg}^*; \quad C = 24,5 \text{ kg}^*.$$

5. O sistema simétrico da fig. 37 repousa numa superfície lisa. Desprezando o peso das barras, calcular:
- a) as reações da superfície em A e B;
b) as componentes horizontais e verticais das forças que os pinos C e E exercem sobre a barra BC.

RESPOSTAS

$$A = 7 \text{ t}^*; \quad B = 3 \text{ t}^*$$

$$H_C = 6,25 \text{ t}^* \text{ (para a direita)}$$

$$V_C = 7 \text{ t}^* \text{ (para baixo)}$$

$$H_E = 6,25 \text{ t}^* \text{ (para a esquerda)}$$

$$V_E = 4 \text{ t}^* \text{ (para cima)}$$

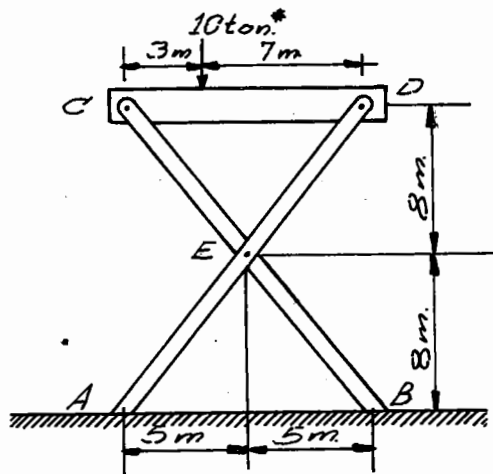


Fig. 37

6. Despreze o pêsso das barras na fig. 38 e ache as fôrças que sollicitam as barras A, B e C, dizendo se elas são tracionadas ou comprimidas.
Resposta:

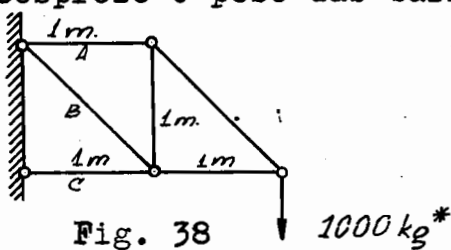


Fig. 38

$$\begin{aligned} A &= 1000 \text{ kg* (tração)} \\ B &= 1414 \text{ kg* (tração)} \\ C &= 2000 \text{ kg* (compressão)} \end{aligned}$$

7. O bloco A da figura 39 pesa 4 kg* e repousa sôbre o bloco B que pesa 8 kg*. Os blocos são ligados por uma corda passando em tórno de uma polia sem atrito. O coeficiente de atrito de escorregamento entre os blocos A e B e entre B e a superfície é de 0,25. Achar a fôrça P necessária para arrastar o bloco para a esquerda, com velocidade constante.

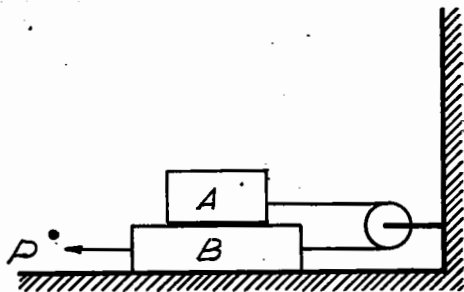


Fig. 39

$$P_A = 4 \text{ kg*} \quad P_B = 8 \text{ kg*} \quad \mu = 0,25$$

Resposta: $P = 5 \text{ kg*}$

8. Para arrancar uma estaca usa-se o dispositivo da fig. 40. Um cabo ABC, preso na estaca em A e no quadro em C, é vertical no trecho AB, e inclinado em BC de um ângulo α com a vertical. O cabo BDE ligado por um anel a B e ao quadro em E, tem o trecho BD horizontal e o trecho DE inclinado em relação à horizontal do pequeno ângulo β . No anel D, um homem puxa verticalmente para baixo, com todo seu pêsso G. Determinar a fôrça vertical P aplicada em A, para arrancar a estaca, sendo $\alpha = \beta = 0,1 \text{ rad}$ e $G = 75 \text{ kg*}$

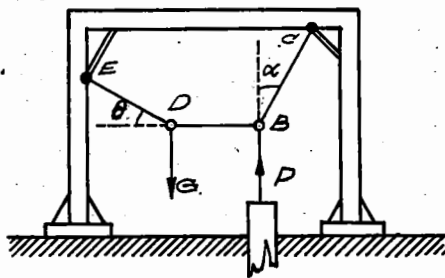


Fig. 40

Resposta: 7500 kg*

9. Uma barra pesada (fig. 41) é sustentada, por atrito, entre dois pinos horizontais que distam a entre si. É dado o ângulo de inclinação sôbre a horizontal. Que distancia x deverá haver entre C.G. da barra e o pino A para que aquela não deslize? O coeficiente de atrito estático vale μ .

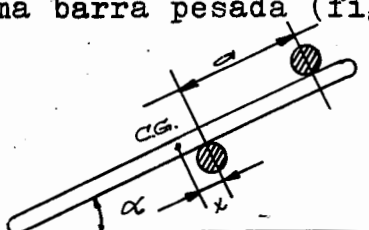


Fig. 41

Resposta:

$$x \geq \frac{a}{2} \left(\frac{\text{tg} \alpha}{\mu} - 1 \right)$$

10. Uma porta corredeira pesando 80 kg^* , é montada sobre trilhos na parte superior (fig. 42). Admitindo que A e B deslizarem (sem rolar) sobre os trilhos, com um coeficiente de atrito $0,2$, qual o valor da força F para que a porta deslize em movimento uniforme, quando $h = 3 \text{ m}$? Quais são os valores das reações normais em A e B, neste caso? Qual é o máximo valor de h para que B não se levante do trilho?

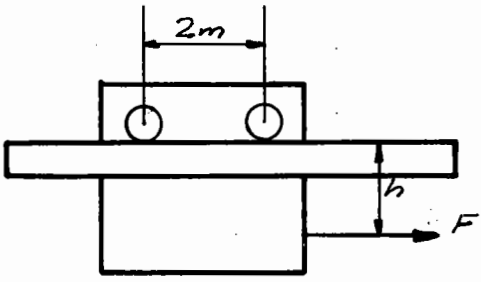


Fig. 42

Resposta: $F = 16 \text{ kg}^*$
 $A = 64 \text{ kg}^*$ $B = 16 \text{ kg}^*$
 $h \leq 5 \text{ m}$

11. Valendo $0,2$ o coeficiente de atrito entre o pé da cadeira e o chão (fig. 43) e não havendo atrito entre a cadeira e a parede, dizer se haverá ou não equilíbrio, na posição indicada na figura. São dados o peso do homem $= 60 \text{ kg}^*$, o peso da cadeira $= 20 \text{ kg}^*$, e as posições do C.G. do homem (A) e do C.G. cadeira (B)

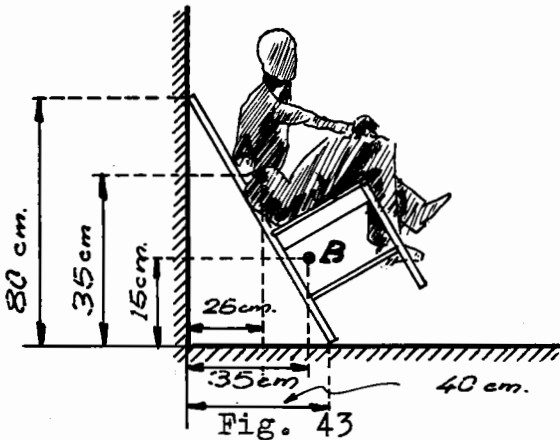


Fig. 43

Resposta .
 Haverá equilíbrio

12. Prove analiticamente que o centro de gravidade de uma figura plana e homogênea, com um centro C de simetria, está em C.

13. Uma peça de máquina consiste de dois cilindros homogêneos maciços e coaxiais (fig. 44). Qual a posição do centro de gravidade da peça?

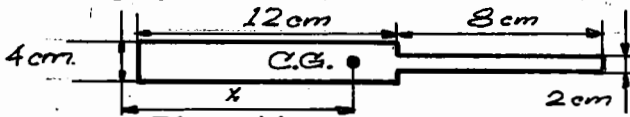


Fig. 44

Resposta: $x \approx 7,4 \text{ cm}$

14. Achar, usando o Teorema de Pappus, o c.g. de um quadrante de circunferência, de raio R.

Resposta: $(\frac{2}{3} \frac{R}{\pi})$ ao longo do Raio, a 45°

15. Usando o Teorema de Pappus e o método da decomposição, achar o c.g. da área achuriada da figura 45 (de um quadrante circular de raio R, tirou-se um semi-círculo de diâmetro R)

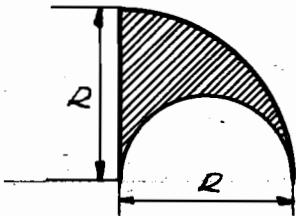


Fig. 45

Resposta:

$x_0 \approx 0,345 R$
$y_0 \approx 0,636 R$

16. Achar a posição do c.g. de um cone reto, homogêneo, de altura h e raio da base R, por integração

Resposta: $\frac{h}{3}$ a partir da base.

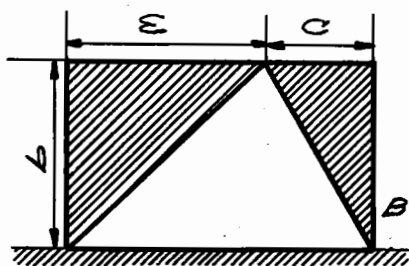
17. Achar a posição do c.g. de uma placa em forma de quadrante de círculo de raio R, cuja massa específica varia linearmente ao longo do raio ($\mu = \mu_0 + a r$)

$$\text{Resposta: } r_o = \frac{\frac{\sqrt{2} \mu_o R}{3} + \frac{a R^2 \sqrt{2}}{4}}{\frac{\pi \mu_o}{4} + \frac{\mu a R}{6}}$$

(no raio a 45°)

18. Achar as reações do apoio B que sustenta o corpo da figura 46 (homogêneo) de peso total P.

Resposta:



$$R_2 = \frac{P}{a+c} \left[a^2 + c \left(a + \frac{2}{3} c \right) \right]$$

Fig. 46

CAPÍTULO III - O PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

I - INTRODUÇÃO - A Mecânica, de Arquimedes a Galileu, era uma coleção de fatos experimentais e de alguns PRINCÍPIOS ISOLADOS harmonizadores do caos constituído pelos fatos da realidade.

Mas, como disse Poincaré:

A Ciência não é um aglomerado de fatos, assim como uma casa não é um amontoado de tijolos.

Antes de Newton, conhecia-se isoladamente e de um modo estanque:

O Equilíbrio das Alavancas (Arquimedes)

As leis de movimentos dos planetas em torno do Sol (Kepler)

As leis da queda livre e do pêndulo simples (Galileu)

As leis do pêndulo composto e do movimento periódico (Huyghens)

Mas, conquanto não se possa dizer que esses conhecimentos correspondiam aos "tijolos", é fora de dúvida que o fato de serem estanques fugia ao próprio espírito de método científico com as suas características de generalização e simplicidade.

Coube ao gênio de Newton buscar no âmago daqueles conhecimentos a harmonia de uma estrutura. Newton com apenas três leis (a rigor, pois a segunda compreende a primeira), pôde explicar quantitativamente todos aqueles fatos. A esta estrutura formal chamamos hoje Mecânica Newtoniana. Mas do mesmo modo que com um aglomerado de tijolos se pode constituir muitas casas, outros cientistas como D'Alembert, Lagrange e Hamilton procuraram representar a Mecânica sob outros aspectos. Enquanto Newton se preocupou com as FÔRÇAS, Lagrange e Hamilton, seguindo as idéias lançadas muito antes por Fermat e Leibniz consideraram como conceito central de suas teorias a noção de trabalho e energia. O que faremos agora será muito instrutivo, pois mostraremos como formular toda a Estática com apenas um Princípio: - O Princípio dos Trabalhos Virtuais. Apenas com este Princípio desta vez, DEDUZIREMOS (a partir dele) que a condição necessária e suficiente para um corpo rígido estar em equilíbrio (no plano) é que:

$$\begin{cases} \sum \vec{f} = 0 \\ \sum M = 0 \end{cases}$$

Portanto daremos outra formulação da estática. O aluno poderá se interrogar: Mas não basta uma formulação tão simples como a Newtoniana? Há, entretanto, certos problemas que são muito mais trabalhosos por um método, e muito mais simples pelo outro. O aluno terá pois, dois instrumentos, que executam a mesma tarefa, porém com características diferentes, e que portanto se complementam. Assim como na formulação Newtoniana precisamos introduzir o conceito de equilíbrio e momento, agora precisamos, antes de formular o princípio, introduzir a noção de:

II - TRABALHO DE UMA FÔRÇA - A noção de trabalho é um exemplo que ilustra a confusão muitas vezes existente entre o vocabulário da vida comum e o da Física. O Físico diz: "O Trabalho W de uma força constante F , cujo ponto de aplicação se desloca de uma distância s , sendo θ o ângulo entre duas direções (figura 1) é por definição

$$W = Fs \cos \theta$$

Dêste modo, o trabalho é nulo se pelo menos uma das seguintes condições for verificada:

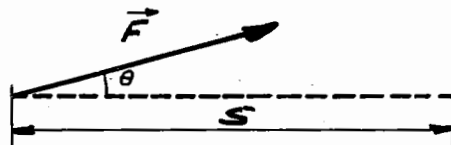


Fig. 1

$$\begin{cases} F = 0 \\ s = 0 \\ \theta = \pi/2 \end{cases}$$

Neste sentido é útil responder ao questionário:

QUESTIONÁRIO 1: Em quais exemplos é o trabalho da força especificada diferente de zero?

1 - Um carro (fig.2) leva uma carga de duas toneladas-força numa estrada plana e sem atrito. Qual o trabalho do peso da carga?

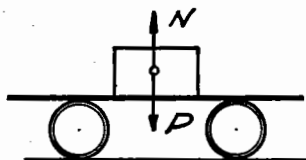


Fig.2

2-No mesmo exemplo anterior o carro sobe uma rampa inclinada. Qual o trabalho do peso da carga?

3-Qual é o trabalho da reação normal N do carro sobre o peso nos dois exemplos anteriores? É útil ver que trabalho é relativo a uma força especificada.

PROBLEMA 1 - Demonstrar que o trabalho de um conjugado de momento constante M , que gira de um ângulo θ é $\omega = M \theta$.

Solução: Seja o conjugado indicado pelo par de forças iguais F a uma distância a uma da outra. Ao girar, a barra AB de um ângulo θ os arcos descritos pelos pontos de aplicação serão AA' e BB' iguais. O trabalho total será a soma dos trabalhos de cada força.

$$\text{Mas } \omega_1 = F \cdot AA' = F \cdot \frac{a}{2} \theta$$

$$\omega_2 = F \cdot BB' = F \cdot \frac{a}{2} \theta$$

donde

$$\omega_{\text{total}} = F \cdot \frac{a}{2} \theta + F \cdot \frac{a}{2} \theta \text{ ou finalmente } \omega = M \theta$$

Se o deslocamento não for retilíneo ou se a força variar, (Fig.4), pode-se imaginar que a trajetória é dividida em partes ds tão pequenas, que a direção θ da força e o seu módulo F quase não variam naquele intervalo, então o trabalho elementar $d\omega$ neste deslocamento ds , seria:

$$d\omega = F ds \cos \theta$$

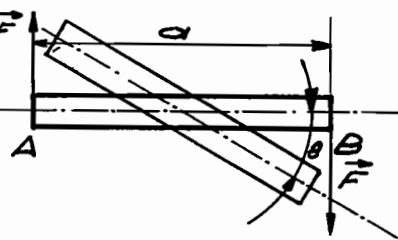


Fig.3

Para obter o trabalho total em uma distância finita de A a B, basta somar todos os trabalhos elementares. O valor limite para que tende essa soma é a integral:

$$\omega_{AB} = \int_A^B F ds \cos \theta \quad (1)$$

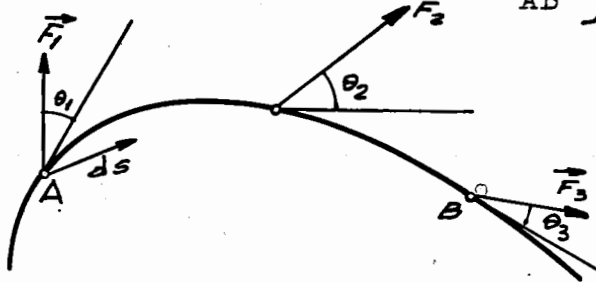


Fig.4

Em geral F e θ dependem de s na equação 1.

TRABALHO COMO PRODUTO ESCALAR - A noção de produto escalar de dois vetores surgiu exatamente para se dar numa notação concisa para a expressão do trabalho de uma força. Se \vec{F} for a força e se se considerar o deslocamento ds como um vetor ds de direção igual à tangente à curva e sentido do percurso, então:

$$d\omega = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

ou se F e ds são constantes:

$$\omega = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

Do mesmo modo a integral ao longo do percurso AB será mais concisamente indicada por

$$\omega_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

é a chamada integral de linha do vetor \vec{F} . Isto é somente uma notação, pois no instante de calcular a integral temos que reverter à expressão 1 ou então utilizar a expressão do produto escalar e escrever:

$$W_{AB} = \int_A^B (F_x dx + F_y dy) = \int_A^B F_x ds_x + \int_A^B F_y ds_y \begin{cases} ds = dx \vec{i} + dy \vec{j} \\ \vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} \end{cases}$$

onde fazemos a soma dos produtos das componentes homólogas. E temos então que integrar os dois produtos e somá-los.

Passemos aos outros conceitos que necessitamos introduzir:

III - FÓRCAS CONSERVATIVAS DE LIGAÇÃO - Em muitas ocasiões um cor

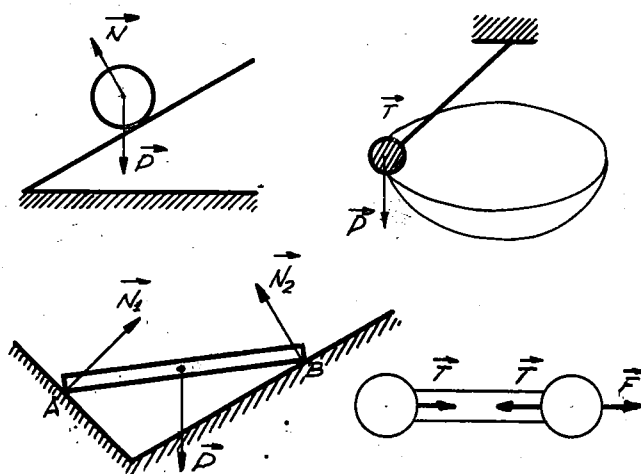


Fig. 5

po pode ser OBRIGADO a se movimentar em uma certa trajetória. Assim, uma esfera posta em cima de um plano sem atrito é obrigada a se mover sobre o plano. O que a obriga a isto é a reação \vec{N} (fig. 5) normal ao plano. Do mesmo modo a massa pendurada a um fio inextensível de comprimento l é OBRIGADA a se mover em uma superfície esférica de raio l (figura). O que a OBRIGA a isto é tensão T no fio. Ainda um outro exemplo é o de uma tábua AB (figura 5) posta sobre dois planos sem atrito. A tábua pode mover-se desde que as suas extremidades AB estejam sempre em

contacto com os planos. As reações \vec{N}_1 e \vec{N}_2 é que determinam isto. Ainda como último exemplo, tome-se duas esferas (fig. 5), ligadas por uma haste rígida e sem peso. Se aplicarmos, por exemplo, uma força \vec{F} qualquer na esfera (1), a esfera (2) terá que segui-la em sua trajetória já que o sistema é rígido. Quem a OBRIGA a isto é a tração T na haste. Todas estas forças que OBRIGAM o sistema a uma certa trajetória, chamam-se FÓRCAS DE LIGAÇÃO OU DE SUJEIÇÃO. Assim \vec{N}_1 , \vec{N}_2 , T são forças de ligação. Todas as outras forças que possam atuar, denominam-se forças aplicadas. Assim o peso \vec{P} da esfera (ex. do plano), o peso da massa pendular, o peso da tábua, a força \vec{F} aplicada a esfera (1) são forças aplicadas.

Essas forças de ligação poderão ou não executar trabalho num movimento do sistema COMPATÍVEL com a ligação. Assim o caso da esfera OBRIGADA a se mover sem atrito sobre o plano, a reação \vec{N} sendo sempre normal ao plano, não executa trabalho. Quanto ao par de forças internas de ligação entre as partículas de um corpo rígido também não executa trabalho, pois a soma dos dois trabalhos é nula.

Uma força de ligação que não executa trabalho é chamada FÓRÇA DE LIGAÇÃO CONSERVATIVA.

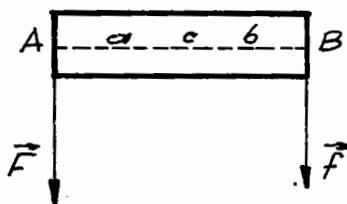
PROBLEMA 2 - Uma certa massa é presa a um fio EXTENSÍVEL e posta a oscilar como um pêndulo. A força de ligação é ou não conservativa?

IV - O PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS - Agora estamos prontos a enunciar o Princípio dos Trabalhos Virtuais: "Um sistema com ligações conservativas está em equilíbrio se, e somente se for nula a soma dos trabalhos das forças aplicadas, realizados num virtual deslocamento infinitesimal compatível com as ligações do sistema".

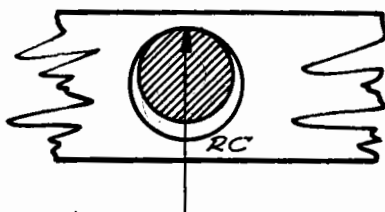
O deslocamento se diz virtual porque na realidade o sistema

pode estar em repouso. Imaginamos então o deslocamento e vemos se o **TRABALHO QUE VIRTUALMENTE** seria executado pelas forças aplicadas seria ou não nulo. Se nulo, o sistema está em equilíbrio. O deslocamento não pode ser qualquer, mas sim um deslocamento compatível com as ligações.

Por exemplo: A barra AB pode girar sem atrito em torno do pino C e está submetida à



a



b

Fig. 6

ação das forças F e f (fig. 6a). A força de ligação é a reação R_C da barra no pino C, normal às superfícies em contato por não existir atrito (fig. 6b). Como a barra só pode girar, R_C não executa trabalho, pois o deslocamento é sempre perpendicular à força. A força de ligação R_C é pois conservativa. Qual um deslocamento compatível com as ligações? Uma rotação $d\theta$ em torno de C.

AS FÓRÇAS APLICADAS são F e f e os seus trabalhos virtuais são: $\delta w_F = Fa \delta \theta$. $\delta w_f = -fb \delta \theta$

Para haver equilíbrio $\sum \delta w_v = \delta w_F + \delta w_f = 0$ ou seja $Fa = fb$, que é a conhecida condição de equilíbrio das alavancas.

Vê-se que nem nos preocupamos com a força de ligação em C ou com as forças entre as partículas da barra. A grande vantagem do **Princípio dos Trabalhos Virtuais** está em que **NÃO SE ENTRA** com as forças de ligação desde que sejam conservativas, pois seus trabalhos são nulos. Se quiséssemos aplicar as leis de Newton teríamos que levar em conta a reação em C.

Os pontos importantes acêrca do conceito de deslocamento virtual são os seguintes:

- 1 - O deslocamento virtual tem que ser compatível com as ligações, isto é, não se pode utilizar um deslocamento virtual que viole as condições impostas pelos vínculos e as forças que a eles correspondem. Assim, por exemplo, se imaginamos dois corpos ligados por uma haste rígida, não podemos dar um deslocamento virtual ao longo da haste, o que violaria os vínculos.
- 2 - O deslocamento virtual não é um deslocamento real da posição de um corpo com o tempo. Antes é um deslocamento imaginado no instante em que consideramos o sistema e independente do tempo. Para esclarecer êste ponto tomemos um corpo descendo num plano inclinado com velocidade constante e portanto em equilíbrio. A força que se opõe a $mg \sin \theta$ tomaremos como uma força aplicada que pode ser a de atrito de deslizamento f_a (fig. 7). O

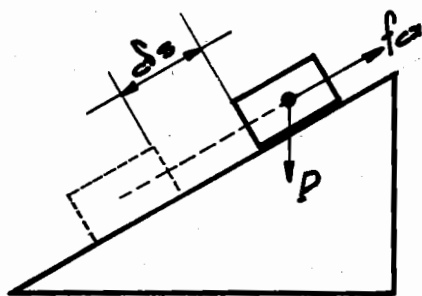


Fig. 7

deslocamento real ds é conceitualmente diferente de um deslocamento virtual que designaremos por δs . Assim êste último poderia ser imaginado para cima, enquanto pela hipótese do problema, o deslocamento real é para baixo. No caso de estar o corpo em repouso, nem existirá o deslocamento ds , ao passo que o δs poderá ser imaginado de vários modos desde que compatíveis com os vínculos. Por isto o símbolo δ (delta)

será sempre usado para distinguir um deslocamento virtual.

3 - As forças que acompanham o sistema durante o deslocamento virtual, são constantemente iguais àquelas da situação inicial. Não variam com o tempo (*).

4 - Para se calcular um deslocamento virtual infinitesimal em função de dados geométricos de um problema, utiliza-se o cálculo diferencial distinguindo porém sempre as diferenciais dos deslocamentos virtuais com o símbolo δ .

Todos estes pontos importantes são ilustrados nos seguintes exemplos:

PROBLEMA 3 - Uma barra de madeira apoia-se simultaneamente sobre o chão e uma parede lisos. Sobre a parte inferior da barra se exerce uma força F paralelamente ao chão.

O ângulo que a barra faz com o chão é α . Sendo P o peso da barra, determinar a força F .

Os vínculos a que está sujeito o sistema obrigam a que as extremidades da barra estejam sempre em contacto com a parede e o chão (forças vinculadas respectivamente N_1 e N_2)

Um deslocamento virtual compatível com as ligações é então o da extremidade A da barra deslizando sobre o chão para a direita enquanto a outra extremidade também desliza sobre a parede.

As forças aplicadas são a força F e o peso P . Notemos que de acordo com os itens (2) e (3) a força F é constante no deslocamento virtual e igual ao seu valor na posição de equilíbrio.

Tomando-se como eixos coordenados a parede e o chão, teremos respectivamente para coordenadas do centro de gravidade e do bastão e da sua extremidade B :

$$\begin{cases} y = b \operatorname{sen} \alpha \\ x = 2b \operatorname{cos} \alpha \end{cases}$$

Deslocamentos virtuais:

$$\begin{cases} |\delta y| = b \operatorname{cos} \alpha \delta \alpha \\ |\delta x| = 2b \operatorname{sen} \alpha \delta \alpha \end{cases}$$

Aplicando o princípio dos trabalhos virtuais:

$$\begin{aligned} - T |\delta x| + W |\delta y| &= 0 \\ - T |2b \operatorname{sen} \alpha \delta \alpha| + W |b \operatorname{cos} \alpha \delta \alpha| &= 0 \end{aligned}$$

$$T = \frac{W}{2} |\operatorname{cotg} \alpha|$$

(*) Em dinâmica avançada usa-se um princípio dos trabalhos virtuais generalizado. É importantíssimo então distinguir o deslocamento virtual com o trabalho das forças com seus valores instantâneos de um deslocamento real em que as forças mudam em geral com o tempo.

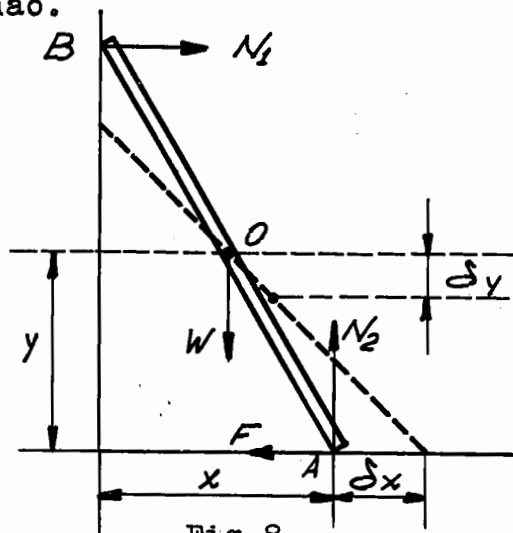


Fig. 8

PROBLEMA 4 - Tem-se um bloco B sobre um plano sem atrito inclinado de 30° com a horizontal. Qual a força \vec{F} paralela ao plano a aplicar para o corpo ficar em equilíbrio?

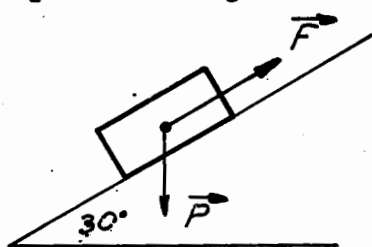


Fig. 9

Solução: Só temos que procurar as fôrças aplicadas que são \vec{F} e \vec{P} . Um deslocamento virtual compatível com a ligação é um deslocamento ds ao longo do plano. A soma dos trabalhos virtuais será:

$\sum \delta W_v = P \operatorname{sen} \alpha \delta s = F \delta s$. Para haver equilíbrio $\delta W = 0$ ou $F = P \operatorname{sen} \alpha$ que é também o que encontramos aplicando a primeira lei.

PROBLEMA 5 - Uma alavanca muito leve e em forma de L com braços a e b é suspensa, sem atrito, pelo vértice do ângulo reto de forma a poder oscilar em um plano vertical; pesos P e p são então presos à extremidade. Mostre que há apenas duas posições de equilíbrio.

PROBLEMA 6 - Um pêndulo (fig. 10) de peso P é sustentado por uma força \vec{F} de tal forma que o fio de comprimento ℓ faz um ângulo θ com a vertical. Qual o valor de \vec{F} ?

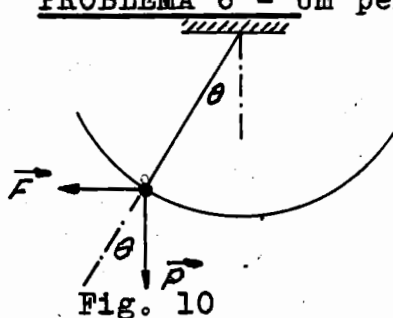


Fig. 10

Solução: FÔRÇAS APLICADAS: \vec{F} e \vec{P}
DESLOCAMENTO VIRTUAL: Uma pequena rotação θ em torno de O .
APLICANDO O PRINCÍPIO:

$$F \ell \delta \theta \cos \theta = P \ell \theta \operatorname{sen} \theta \quad \therefore$$

$$F = P \operatorname{tg} \theta$$

Dos problemas anteriores, vemos que apenas temos que:

- A - Procurar as fôrças aplicadas
- B - Imaginar um deslocamento virtual compatível com as ligações
- C - Aplicar o Princípio dos Trabalhos Virtuais.

V - O PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS EQUIVALE ÀS CONDIÇÕES NEWTONIANAS PARA O EQUILÍBRIO - Poder-se-ia dizer: "O Princípio dos Trabalhos Virtuais dá mais rápidas soluções que as condições que obtivemos da primeira lei, porém, por outro lado, não nos dá os valores das fôrças de ligação tais como: A reação do ponto C (fig. 6) ou a reação normal do plano inclinado" (fig. 9)

Para mostrar que o Princípio é geral, vamos resolver alguns problemas em que se pedem, inclusive, as fôrças de ligação. Inicialmente considere-se um corpo C rígido, livre de se mover em um plano \mathcal{U} (fig. 11). O movimento mais geral de C é uma translação tal como OP e uma rotação $d\theta$ em torno de O . Com estes dois movimentos poderemos levar C a qualquer posição. Ora, se impusermos que C (um corpo completamente livre no plano) está em equilíbrio sob a ação de fôrças $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ quaisquer, então o trabalho virtual tem que ser nulo, num deslocamento qualquer, por mais geral que seja, pois, C está livre. Mas, o deslocamento mais geral, é uma translação ds e uma rotação $d\theta$. Ora, a translação ds e as fôrças \vec{F}_i podem ser decompostas em duas direções X e Y e assim teremos os seguintes trabalhos:

Trabalho da componente dx do deslocamento =

$$\vec{F}_{1x} dx + \vec{F}_{2x} dx + \dots + \vec{F}_{nx} dx = \sum \vec{F}_x dx$$

Trabalho da componente dy do deslocamento =

$$F_{1y} dy + F_{2y} dy + \dots + F_{ny} dy = \sum F_y dy$$

$$\text{Trabalho na rotação } d\theta = \sum M_i d\theta$$

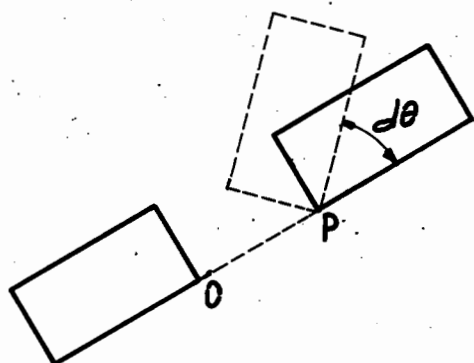


Fig. 11

Onde M_i é o momento das forças F_i em relação a qualquer ponto em torno do qual se queira fazer C girar. Portanto todos a quês trabalhos tem que serem los ou

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_i = 0 \text{ (em relação a qualquer ponto)} \end{cases}$$

O que nos dá as condições necessárias e suficientes para o equilíbrio de C , de maneira muito mais simplificada que obtivemos anteriormente.

Vejamos agora, com um exemplo, como também se pode calcular

as forças de ligação, pelo princípio dos trabalhos virtuais. Na figura 12 são dados F , fazendo um ângulo θ com a vertical, e as distâncias a e b . Não existe atrito no pino C . Pede-se calcular a força vertical f necessária para equilibrar o sistema, bem como as componentes R_x e R_y da reação do pino C .

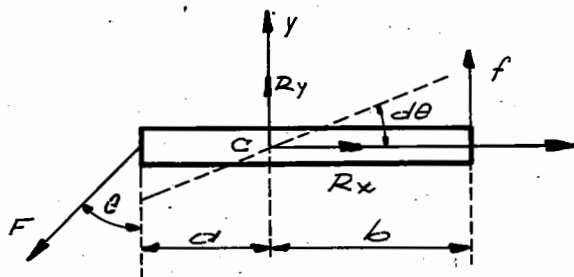


Fig. 12

Solução: a) Fôrças aplicadas à barra: Retiraremos o pino C , para deixar a barra com toda liberdade de movimento no plano vertical que a contém. Feito isto, as componentes R_x e R_y dei-

xam de ser forças de LIGAÇÃO, passando a ser forças APLICADAS (convém notar que estas operações são equivalentes a operação de "ISOLAR" a barra, já vista no Capítulo II). Temos agora um plano vertical sem atrito, onde a barra está livre de movimentar-se, com as forças aplicadas F , f , R_x e R_y .

b) Deslocamento virtual compatível com as ligações: Escolhendo dois eixos de referência C_x e C_y , o deslocamento mais geral será definido por:

- I) uma translação δs , no plano, de componentes δx e δy
- II) uma rotação $\delta \theta$ em torno de C .

c) Aplicando o princípio: Acharemos

$$\begin{cases} R_x \delta x - F \sin \theta \delta x = 0 & (1) \\ R_y \delta y - F \cos \theta \delta y + f \delta y = 0 & (2) \\ f b \delta \theta + F \cos \theta \delta a \delta \theta = 0 & (3) \end{cases}$$

Resolvendo, obtém-se:

$$R_x = F \sin \theta \quad (1')$$

$$f = \frac{-a}{b} F \cos \theta \quad (3')$$

$$R_y = F \cos \theta - f = F \cos \theta \frac{a+b}{b} \quad (2')$$

Oberve-se que supusemos, de início, certos sentidos para as forças desconhecidas, R_x , R_y e f . Ao aplicar-se o princípio (equações (1) (2) e (3)), somam-se todos os trabalhos virtuais, tomando-os positivos ou negativos, conforme os deslocamentos sejam no mesmo sentido, ou em sentido contrário das forças. Calculadas as forças desconhecidas, um valor positivo indica que o sentido suposto de início está correto ((1') e (2')); um valor negativo (3') significa que a força incógnita tem sentido contrário ao inicialmente suposto.

VI - PRINCÍPIO DE LIBERTAÇÃO - Segundo alguns autores (*) é indispensável, a fim de ser mantido o rigor da formulação axiomática da Mecânica, o uso do chamado "princípio da libertação". É o seguinte o seu enunciado: Podemos eliminar um vínculo, com a condição de, ao efetuarmos um deslocamento que antes era impedido, contar entre as forças aplicadas a reação vincular pertinente ao vínculo antes da sua eliminação, ou Podemos eliminar um vínculo, substituindo-o pela força vincular correspondente. O movimento passa a ser permitido e a força de ligação é tratada como força aplicada.

Foi o que fizemos nos parágrafos anteriores para calcular as reações vinculares.

A possibilidade de libertar o sistema de vínculos, substituí-los por forças e poder calcular estas forças, é pois o que generaliza o nosso enunciado do Princípio dos Trabalhos Virtuais.

Proporemos duas questões muito interessantes (vide Maia, Estática), a tal respeito:

- 1ª) Uma força de atrito estático pode ser calculada pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais, simplesmente ?
 - 2ª) Uma força de atrito de deslizamento é vincular ou aplicada ?
- 1º) Obviamente não. Sendo uma força vincular (impede o movimento de um corpo) não há nenhum deslocamento virtual compatível com o vínculo (qualquer deslocamento violaria a condição vincular). Somente libertando-se o sistema, isto é, usando-se o Princípio da libertação, poder-se-á calcular a força de atrito estático que passará a ser força aplicada.
- 2º) Aplicada. Ela não impede o movimento. Ela se opõe ao movimento relativo de duas superfícies, mas não o impossibilita. Antes a força de atrito de deslizamento só aparece quando há o movimento.

PROBLEMA 7 - Qual a força de atrito de deslizamento sobre um corpo que desliza em movimento uniforme sob ação do seu peso num plano inclinado de um ângulo θ com a horizontal ?

PROBLEMA 8 - Qual o máximo ângulo do qual se pode inclinar um plano com a horizontal para que não haja movimento de um corpo situado sobre o mesmo. Coeficiente de atrito entre plano e corpo K_e .

PROBLEMA 9 - Obtenha a reação N do plano inclinado no problema 4.

PROBLEMA 10 - Uma estrutura A B C D consiste de quatro partes iguais, articuladas sem atrito formando um quadrado. A estrutura é suspensa em A e um peso P é preso a C. A estrutura é mantida em forma por uma haste ligando P a D. Despreze os pesos das hastes e determine a tensão na haste CD.

(*) Vide Maia, Estática ou

G. Hamel, Theoretische Mechanik (Ed. Berlin, Springer).

PROBLEMA 11 - Na prensa da fig. 13, determine a compressão Q sobre o bloco, quando se aplica uma força P em cada extremidade da barra AB . O atrito na rosca do parafuso é desprezível. As forças P são perpendiculares à barra AB e ao eixo do parafuso. São dados o passo h do parafuso e o comprimento a do braço da prensa.

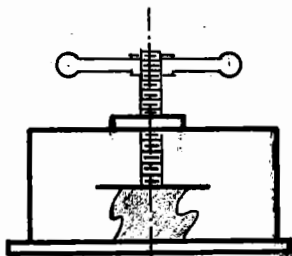


Fig. 13

Solução:

a) Forças aplicadas ao parafuso:

Retirando o bloco para que haja liberdade de movimento, a força Q passa a ser força aplicada ao parafuso.

b) Deslocamento virtual compatível com as ligações:

Avanço δx do parafuso, quando o braço gira de $\delta \theta$. Como o avanço é h para um ângulo de giro de 2π radianos, conclui-se que δx e $\delta \theta$ estão ligados pela relação

$$\frac{\delta x}{h} = \frac{\delta \theta}{2\pi} \therefore \delta x = \frac{h}{2\pi} \delta \theta$$

c) Aplicando o princípio:

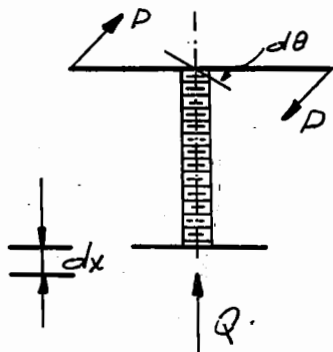


Fig. 14

$$Pa \delta \theta + Pa \delta \theta - Q \delta x = 0$$

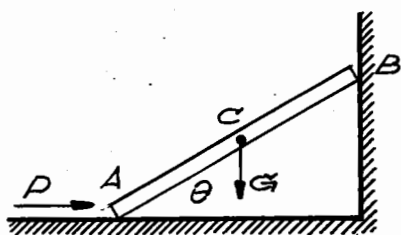
$$\therefore 2 Pa \delta \theta = Q \cdot \frac{h}{2\pi} \delta \theta$$

$$\therefore Q = \frac{4\pi a}{h} P$$

Imagine-se como seria complicada a solução deste problema pelo método Newtoniano (veja Bruhat pg. 64).

Para que o aluno se familiarize com o princípio, damos aqui a solução do seguinte problema:

PROBLEMA 12 - Uma barra prismática rija AB , de comprimento l e peso G é apoiada em A sobre um plano liso horizontal e em B sobre uma parede lisa vertical. Determinar a intensidade da força horizontal P em A , necessária para que a barra permaneça em equilíbrio quando inclinada sobre a horizontal de um ângulo θ , como indica a figura 15 (Timoshenko).



Solução:

a) Forças aplicadas à barra:

P e G

b) Deslocamento virtual compatível com as ligações: Uma variação $d\theta$ no ângulo θ , de maneira que as extremidades A e B sempre fiquem em contacto com o plano e com a parede, respectivamente. Na figura abaixo, temos:

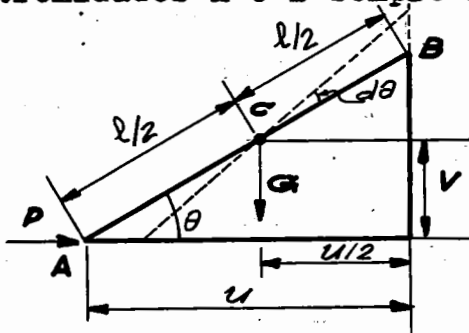


Fig. 16

$$u = l \cos \theta$$

$$v = \frac{l}{2} \sin \theta$$

Quando θ sofre uma variação $d\theta$, as distâncias u e v terão variado de du e dv , que, a menos de infinitésimos de ordem superior valerão:

$$(1) du = - \ell \operatorname{sen} \theta d\theta \quad (u \text{ decresce pois } du < 0)$$

$$(2) dv = \frac{\ell}{2} \cos \theta d\theta \quad (v \text{ cresce pois } dv > 0)$$

c) Aplicando o princípio: O deslocamento virtual de A vale $|du|$ e se faz na direção e sentido de P. O trabalho virtual de P será $dW_p = P \ell \operatorname{sen} \theta d\theta$ (positivo). Deve-se notar que o sinal negativo ou positivo das expressões (1) e (2) decorre de convenções completamente independentes das convenções feitas para o sinal do trabalho virtual. O aluno deve interpretar tanto uma como outra, para não confundí-las.

O deslocamento virtual do ponto C tem as componentes $|\frac{du}{2}|$, horizontal e $|dv|$, vertical. Só nos interessa a componente vertical, por ser nulo o trabalho virtual de G no deslocamento horizontal. Como v aumenta ($dv > 0$), o deslocamento vertical de C é de sentido contrário a G, e o trabalho virtual desta força será:

$$dW_G = - G \frac{\ell}{2} \cos \theta d\theta \quad (\text{negativo})$$

Pelo princípio dos trabalhos virtuais:

$$dW_p + dW_G = 0 \quad \therefore \quad P \ell \operatorname{sen} \theta d\theta - G \frac{\ell}{2} \cos \theta d\theta = 0$$

$$\therefore \quad \boxed{P = \frac{G}{2} \cot \theta}$$

EXERCÍCIOS

- 1 - Usando o princípio dos trabalhos virtuais, calcular a tração na corda A, da fig. 17 (Imaginar a extremidade superior da alavanca sendo deslocada uma pequena distância para a direita (Sears))

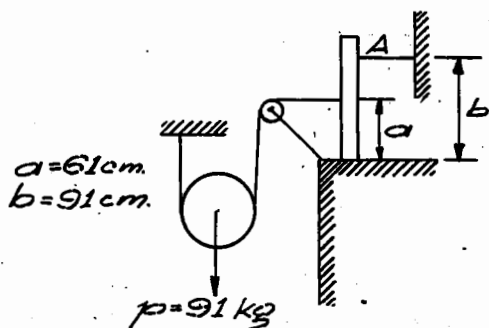


Fig. 17

Resposta: - 30 kg* de tração em A.

- 2 - Determinar a relação Q/P para cada um dos três sistemas de polia dados na fig. 18, no caso de haver equilíbrio. Desprezar o atrito e o peso das polias e cordas.

(Timoshenko)

Resposta:

$$(a) \quad Q / P = \frac{1}{2}$$

$$(b) \quad Q / P = \frac{1}{8}$$

$$(c) \quad Q / P = \frac{1}{6}$$

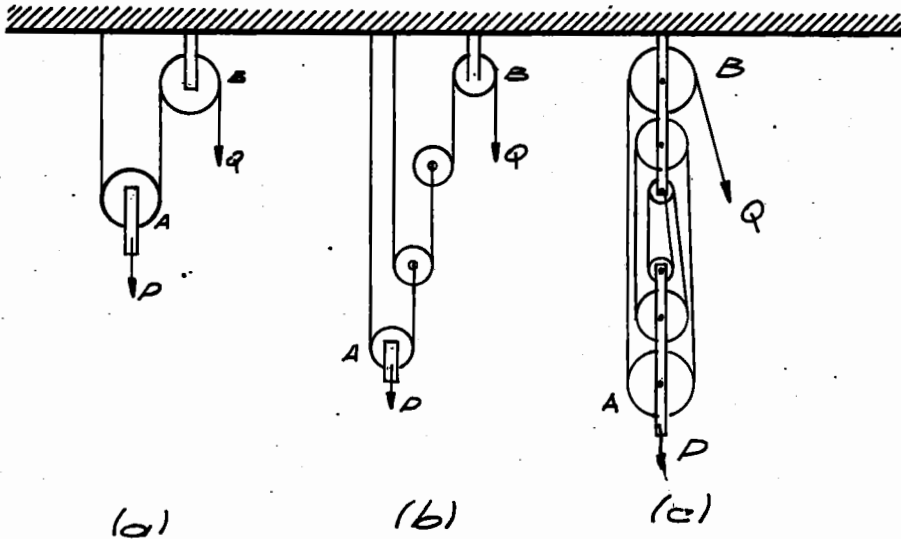


Fig. 18

- 3 - Demonstrar que, na balança de Roberval representada na fig.19, $P_a = Q_b$, independente - mente da posição dos pontos de suspensão dos pesos (Wittenbauer)

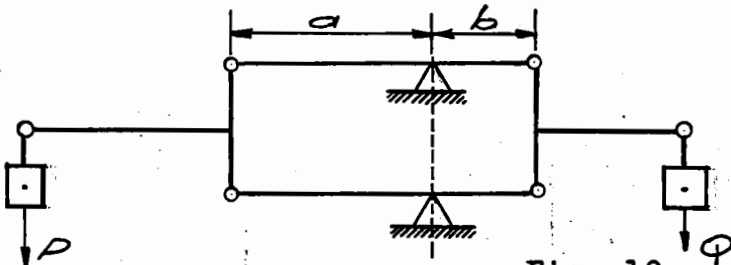


Fig. 19

- 4 - Determinar a relação entre as forças P e Q que atuam na polia diferencial da fig. 20, quando houver equilíbrio. As rodas são dentadas e a força P atua na corrente que passa por elas. (Timoshenko)

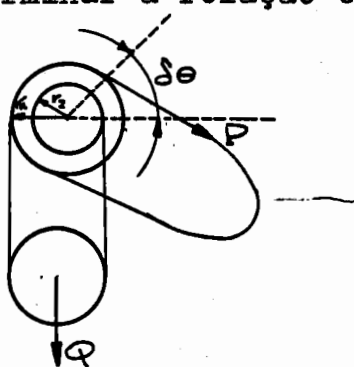


Fig. 20

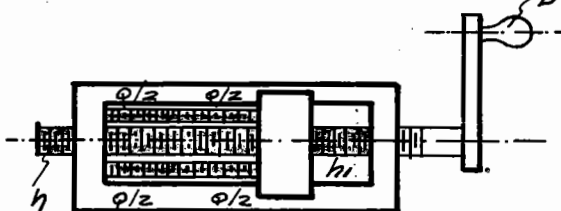
Resposta:

$$P = \frac{r_1 - r_2}{2 r_1} Q.$$

- 5 - Um tubo cilíndrico de secção circular é comprimido pelo dispositivo que se vê na fig. 21. Determinar a relação entre a força de compressão total Q no tubo e a força P, aplicada normalmente ao cabo da manivela, num plano perpendicular ao eixo do parafuso.

Os passos das duas partes filetadas do parafuso são h e h_1 como indica a fig. 21.

Desprezar o atrito. (Timoshenko)



Resposta:

$$\frac{P}{Q} = \frac{h - h_1}{2 \pi r}$$

Fig. 21

- 6 - Para suspender uma carga Q por meio de uma força vertical P , é utilizado o dispositivo da fig. 22, cujas 8 barras articuladas, formam tres losangos idênticos. Determinar a relação P/Q no caso de haver equilíbrio desprezando o atrito. (Timoshenko)

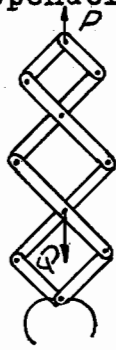
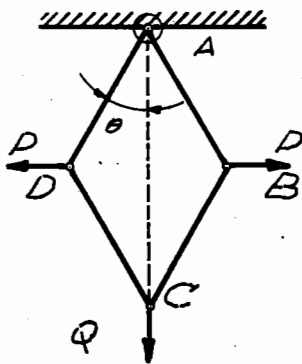


Fig. 22

Resposta:

$$P = Q/3$$

- 7 - Quatro barras articuladas formando um losango ABCD estão suspensas em A e são submetidas à ação das forças P e Q , aplicadas como indica a fig. 23. Determinar a configuração de equilíbrio do sistema, definida pelo ângulo θ . (Timoshenko)



Resposta:

$$\tan \theta = P/Q$$

Fig. 23

- 8 - Uma barra prismática AB de comprimento 2ℓ e peso Q , passa por um anel liso em D, e apoia-se contra uma parede lisa vertical em A, distante a do anel D, como indica a fig. 24. Determinar a posição de equilíbrio da barra, definida pelo ângulo θ que ela faz com a parede, sendo desprezado o atrito. (Timoshenko)

Resposta:

$$\sin \theta = \sqrt[3]{\frac{a}{\ell}}$$

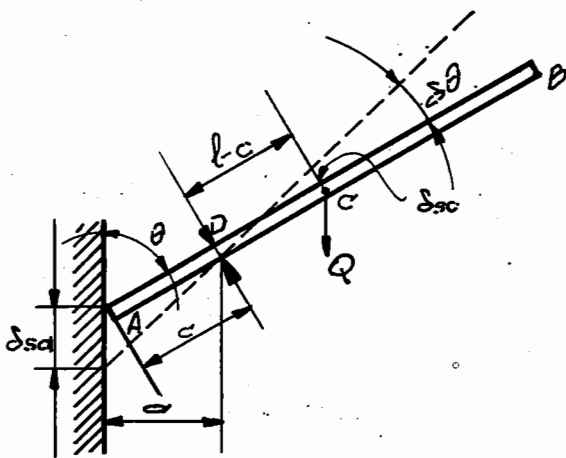


Fig. 24

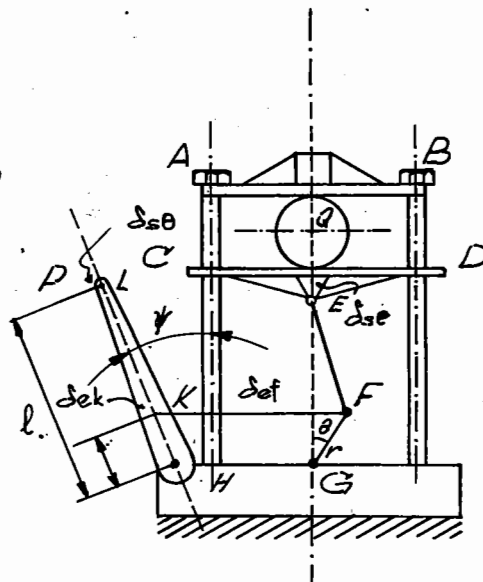


Fig. 25

9 - Para comprimir uma esfera entre duas chapas AB e CD, fig. 25, usa-se o sistema de barras EF, FG, KF, e a alavanca HKL. Determinar a relação entre a força P aplicada perpendicularmente à alavanca HKL e a compressão da esfera, no caso da configuração particular do sistema, definida pelos ângulos θ , φ e ψ , como indica a figura. Supor que as barras são absolutamente rijas.
(Timoshenko)

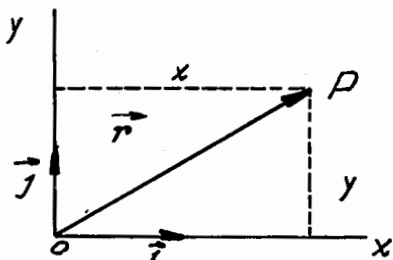
Resposta:

$$\frac{P}{Q} = \frac{a}{l} \cos \psi (\tan \theta + \tan \varphi)$$

* * *

CAPÍTULO IV - CINEMÁTICA

I - Em Cinemática estudaremos a GEOMETRIA dos movimentos. Tome-mos, para fixar idéias, um ponto móvel P no plano. Sua POSIÇÃO pode ser descrita de dois modos: ou damos as COORDENADAS de P em relação a um sistema de eixos XOY (fig. 1) ou damos um vetor \vec{r} de origem O e extremidade P. \vec{r} é o denominado VETOR POSIÇÃO. Vê-se pois que



$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} \quad \text{Equação 1}$$

O MOVIMENTO de P determina a variação de (x, y) com o tempo t , isto é, as suas coordenadas passam a ser funções de t , o que podemos representar com a notação:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \text{Equação 2}$$

Fig. 1

Essas duas equações ALGÉBRICAS podem ser condensadas em uma só equação VETORIAL:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad \text{Equação 2A}$$

As equações 2 (ou 2A) são chamadas EQUAÇÕES DO MOVIMENTO.

Se eliminarmos o parametro t das Equações 2, obteremos a EQUAÇÃO DA TRAJETÓRIA:

$$F(x, y) = 0 \quad \text{Equação 3}$$

Êstes conceitos são ilustrados no seguinte problema:

PROBLEMA 1 - As equações do movimento de um ponto móvel são:

$$\begin{cases} x = 3 \cos 3t & \text{a) Qual a equação da trajetória?} \\ y = 3 \sin 3t & \text{b) Qual o módulo de } \vec{r} \text{ em qualquer instante?} \end{cases}$$

Solução: Elevando ao quadrado e somando ambas as equações, obtém-se a equação da trajetória:

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 3^2 = 0$$

A trajetória é pois uma circunferência de raio 3 unidades.

Como $\vec{r} = 3 \cos 3t \vec{i} + 3 \sin 3t \vec{j}$ temos que $r = 3$. Como é ra de se esperar da trajetória.

PROBLEMA 2 - O movimento de um eletrôn em tórno de um núcleo é descrito pelas seguintes equações, quando o núcleo é tomado na origem:

$$\begin{cases} x = 4 \cos 3t & \text{a) Qual a equação da trajetória?} \\ y = 3 \sin 3t & \text{b) Qual o maior e menor valor de } r \text{?} \end{cases}$$

PROBLEMA 3 - Generalize as equações 2 e 2A para 3 dimensões.

Questionário 1: Qual a equação de uma trajetória retilínea no plano?

II - VELOCIDADE E ACELERAÇÃO - A VARIACÃO da posição de P, pode - ser especificada matematicamente como:

$$d\vec{r}/dt = dx/dt \vec{i} + dy/dt \vec{j} \quad \text{Equação 4}$$

que é a chamada VELOCIDADE \vec{v} do móvel no ponto e no instante onde se calculou a derivada. A derivação em relação ao tempo é também usualmente indicada por um ponto acima da função, exemplo:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

$\vec{v} = d\vec{r}/dt$ tendo a direção de $d\vec{r}$ é pois TANGENTE À TRAJETÓRIA em cada ponto (fig. 2). Podemos escrever que

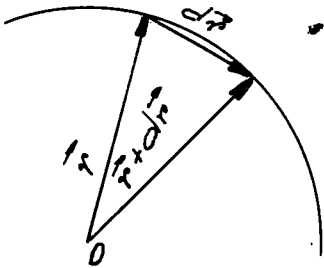


Fig. 2

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} \quad \text{onde}$$

$$v_x = \dot{x} \text{ e } v_y = \dot{y}$$

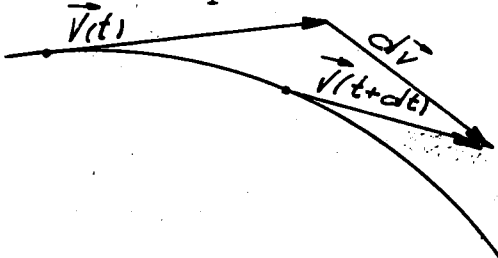
Assim DECOMPUSEMOS \vec{v} em suas componentes ortogonais. Isto é tão vantajoso quanto decompor forças, como fizemos no Cap. II.

Assim quando um móvel estiver submetido a vários movimentos, podemos somá-los pelo método das componentes. Este reconhecimento da natureza vetorial de \vec{v} foi feito por Galileu quando enunciou o seu PRINCÍPIO DE INDEPENDÊNCIA DOS MOVIMENTOS. Todas as grandezas vetoriais têm o seu princípio de independência, isto é, podem ser decompostas pela regra do paralelogramo.

Na maioria dos movimentos encontrados na natureza \vec{v} varia com o tempo. Podemos medir esta variação pela aceleração \vec{a} definida como o vetor:

$$\vec{a} = d\vec{v}/dt \quad \text{ou} \quad \vec{a} = \ddot{\vec{r}}$$

A aceleração pois, em geral, não tem a direção de \vec{v} , mas de $d\vec{v}$. (Fig. 3 (vide exemplo)). Assim, em uma trajetória circular percorrida com $v = \text{constante}$ \vec{a} aponta para o centro da circunferência e é portanto perpendicular a \vec{v} . Mesmo quando as direções de \vec{a} e \vec{v} coincidem os seus sentidos podem não ser os mesmos: um carro freiando numa reta, tem aceleração oposta à velocidade. Vê-se facilmente que:



$$= d^2\vec{r}/dt^2 = d^2x/dt^2 \vec{i} + d^2y/dt^2 \vec{j} =$$

$$= dv_x/dt \vec{i} + dv_y/dt \vec{j} = \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j}.$$

Equação 5

ou ainda

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$$

Fig. 3

Pode-se pois também decompor a aceleração. Quando a aceleração é constante o movimento é denominado UNIFORMEMENTE ACELERADO ou VARIADO. Não se torna necessário descrever a variação de \vec{a} com o tempo, isto é $d\vec{a}/dt$ pois em Mecânica consegue-se estudar os movimentos simplesmente com \vec{a} .

Como \vec{v} pode variar em direção ou módulo (ou em ambos) a aceleração existe mesmo quando o módulo de \vec{v} é constante como se disse acima. Não há pois movimento uniforme se a trajetória não é retilínea.

QUESTIONÁRIO 2: Estará certa a denominação: movimento circular uniforme ?

PROBLEMA 4 - Qual o valor de $\vec{\gamma}$, \vec{v} e qual o ângulo entre \vec{v} e $\vec{\gamma}$ para o movimento:

$$\begin{cases} x = 3 \cos 3t \\ y = 3 \sin 3t \end{cases} \quad (x \text{ e } y \text{ em metros e } t \text{ em segundos})$$

Solução:

$$\begin{cases} \vec{v} = -9 \sin 3t \vec{i} + 9 \cos 3t \vec{j} \\ v = 9 \text{ m/s} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{\gamma} = -27 \cos 3t \vec{i} - 27 \sin 3t \vec{j} \\ \gamma = 27 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$

Ambos têm pois módulos constantes com o tempo. A direção θ de \vec{v} com o eixo OX em um qualquer t é:

$$\text{tg } \theta = v_y/v_x = -1/\text{tg } 3t \quad \text{e a direção } \alpha \text{ de } \gamma \text{ com o mesmo eixo é}$$

$$\text{tg } \alpha = \gamma_y/\gamma_x = \text{tg } 3t$$

As duas direções variam com o tempo t , mas sempre são ortogonais, ($\text{tg } \theta$ é inversa e contrária à $\text{tg } \alpha$). A trajetória, como vimos no problema 1, é uma circunferência descrita com rapidez e aceleração escalar constante (fig. 4). O movimento é corretamente chamado MOVIMENTO CIRCULAR ESCALARMENTE UNIFORME.

PROBLEMA 5 - Mostre que a aceleração do problema anterior passa sempre pelo centro da circunferência (aceleração centrípeta e movimento central).

Solução: A solução é imediata uma vez que $\vec{\gamma}$ é normal e coplanar a \vec{v} (fig. 4) \vec{v} sendo a todo instante tangente à circunferência $\vec{\gamma}$ só poderá estar na direção do raio (que passa sempre por O).

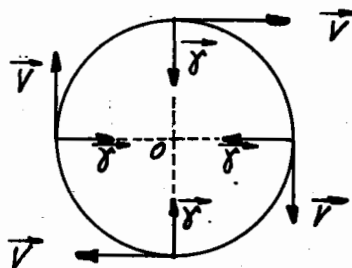


Fig. 4

Entretanto para ilustrar a elegância dos métodos vetoriais provaremos isto de outro modo: queremos provar que $\vec{\gamma}$ está na direção de \vec{r} . Logo o seu produto vetorial deve ser nulo. Realmente:

$$\vec{r} \wedge \vec{\gamma} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 \cos 3t & 3 \sin 3t & 0 \\ -27 \cos 3t & -27 \sin 3t & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (2 \text{ linhas proporcionais})$$

PROBLEMA 6 - Demonstre que $\vec{v} \times \vec{\gamma} = 0$

Façamos um resumo dos conceitos até agora apresentados:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \text{ ou } \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Equações do movimento} \\ F(x,y) = 0 \text{ Equação da} \\ \text{trajetória} \end{array}$$

$$\vec{v} = d\vec{r}/dt = dx/dt \vec{i} + dy/dt \vec{j} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} \quad \text{Velocidade}$$

$$\vec{\gamma} = d\vec{v}/dt = d^2\vec{r}/dt^2 = d^2x/dt^2 \vec{i} + d^2y/dt^2 \vec{j} = \gamma_x \vec{i} + \gamma_y \vec{j} \quad \text{Aceleração}$$

III - REFERENCIAL NA TRAJETÓRIA - Passaremos agora a usar um outro referencial diferente de XOY, mas tão importante quanto este nas aplicações. Não INTRODUZIREMOS NENHUM CONCEITO NOVO. O essencial de Cinemática já está dado. Consideremos a trajetória C (descrita

pelo móvel). Poderemos contar as distâncias percorridas por P, **SÔBRE A PRÓPRIA TRAJETÓRIA**. É o que se faz quando se anda de automóvel, em uma estrada de rodagem, que tem inclusive os marcos quilométricos que facilitam esta tarefa. Seja S uma tal distância sobre a trajetória. Quando B tende a A (fig. 5) Δs tende a ds e Δr a dr. Do mesmo modo ds se confunde com dr. Sendo $\vec{\sigma}$ o vetor unitário (versor) da tangente à C em A, podemos escrever que $d\vec{r} = ds \vec{\sigma}$. E portanto a velocidade será:

$$\vec{v} = d\vec{r}/dt = (ds/dt)\vec{\sigma}$$

valendo em módulo

$$v = \frac{ds}{dt}, \text{ pois } \vec{\sigma} = 1$$

Dêsse modo \vec{v} também pode ser medido com distâncias contadas sobre a trajetória. Sabemos da Geometria que o RAIOS DE CURVATURA ρ da curva em cada ponto é NORMAL à tangente (fig. 6) \vec{n} o versor desta direção normal (aponta sempre para o centro de curvatura C). O

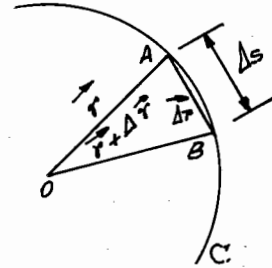


Fig. 5

raio de curvatura ρ e o centro de curvatura C podem ser conceituados intuitivamente do seguinte modo: Em uma curva plana tomemos o ponto P onde queremos calcular ρ . Na vizinhança de P tomemos dois pontos p_1 e p_2 (fig. 7).

Por esses três pontos podemos fazer passar uma circunferência de círculo. Quando p_1 e p_2 se aproximam de P, o arco da circunferência irá se confundindo com o arco da curva. O raio da circunferência que se obtém como limite deste processo é o raio de curvatura ρ no ponto p. C é o centro de curvatura. Este círculo limite é chamado círculo oscilador.

Podemos tomar agora UM SISTEMA DE COORDENADAS SOBRE A TRAJETÓRIA definido pelos vetores unitários $\vec{\sigma}$ e \vec{n} , mutuamente ortogonais. Deve-se entretanto notar que estas duas direções, conquanto sempre perpendiculares, MUDAM (EM DIREÇÃO) DE PONTO A PONTO da curva (fig. 8). O nosso problema agora é o seguinte: COMO EXPRESSAR \vec{v} e \vec{a} neste novo sistema de eixos? É imediato que:

$$\vec{v} = ds/dt \vec{\sigma} + 0 \vec{n}$$

Isto decorre do fato de \vec{v} estar inteiramente na direção da tangente à curva em cada ponto. Agora \vec{a} pode ser obtida derivando-se \vec{v} em relação ao tempo:

$$\vec{a} = d\vec{v}/dt = d^2s/dt^2 \vec{\sigma} + (ds/dt)(d\vec{\sigma}/dt)$$

Identifiquemos o vetor $\frac{d\vec{\sigma}}{dt}$:

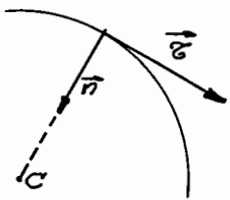


Fig. 6

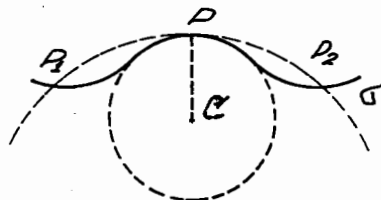


Fig. 7

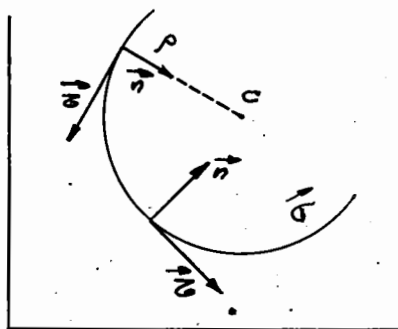


Fig. 8

- a) direção e sentido: Como $d\vec{\sigma}/dt$ representa apenas a variação em direção de um vetor de módulo constante ($\vec{\sigma}$ é unitário), sua direção deve ser normal a $\vec{\sigma}$ segundo vimos no teorema do Capítulo I. $d\vec{\sigma}$ é paralelo a \vec{n} , pois ambos são coplanares e perpendiculares a $\vec{\sigma}$ no ponto. É fácil ver que ambos têm também o mesmo sentido.

b) Módulo de $d\vec{v}/dt$: pode ser obtido com a construção da figura 9, A e B.

Em A traçamos C (trajetória) e as tangentes unitárias \vec{t} e \vec{t}' em pontos distantes ds .

Em B traçamos dois vetores equipolentes a \vec{t} e \vec{t}' a partir de um mesmo ponto para fazermos graficamente a diferença vetorial. Das figuras 9 A e 9 B.

$$d\theta = \frac{ds}{R}$$

$$d\theta = d\vec{\theta}$$

$d\theta = ds/R = vdt/R$ e em B

$$d\vec{v} = \vec{t} d\theta = d\theta$$

Destas duas finalmente se vê que $d\vec{v}/dt = v/R$

Portanto a equação que nos dá a aceleração no sistema \vec{t}, \vec{n} poderá ser escrita como

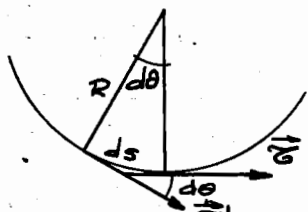


Fig. 9 A

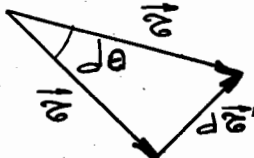


Fig. 9 B

$$\vec{\gamma} = d^2s/dt^2 \vec{t} + (v^2/R) \vec{n}, \text{ pois } \frac{ds}{dt} = v$$

A aceleração foi pois decomposta, em cada ponto da curva, em uma componente TANGENCIAL γ_t e outra componente NORMAL γ_n :

$$\begin{cases} \gamma_t = d^2s/dt^2 (=dv/dt) \\ \gamma_n = v^2/R \end{cases}$$

A γ_t mede pois a variação do módulo de \vec{v} e a γ_n a variação da direção de \vec{v} . Podemos ter pois:

$$\begin{cases} \gamma_t = 0 \\ \gamma_n = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_t \neq 0 \\ \gamma_n = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_t = 0 \\ \gamma_n \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_t \neq 0 \\ \gamma_n \neq 0 \end{cases}$$

QUESTIONÁRIO 3: dê exemplos concretos dos casos acima

PROBLEMA 7 - Um móvel numa pista circular tem rapidez $v = 3,5 + 1,2t$ m/s. Sabendo que o raio da pista vale 50 m, calcule γ_t e γ_n .

Uma das vantagens da representação no sistema \vec{t}, \vec{n} está em se poder calcular características geométricas da trajetória, tais como o comprimento s percorrido sobre a trajetória entre os instantes t_0 e t . Assim da relação $v = ds/dt$ podemos calcular s pela integral:

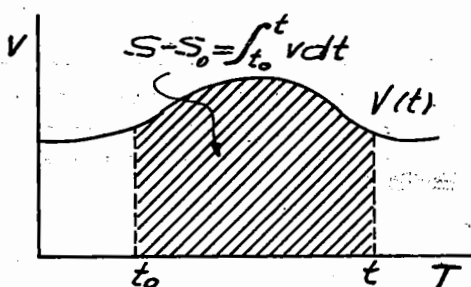


Fig. 10

$$s - s_0 = \int_{t_0}^t v dt$$

Esta integral é obtida ou analiticamente, (conhecendo-se que função v é do tempo) ou planimetrando-se a área contida sob a curva que dá a variação de v com t num gráfico $v \times t$ (fig. 10).

PROBLEMA 8 - Calcular a distância percorrida pelo móvel do problema anterior em 10 segundos.

SOLUÇÃO ANALÍTICA:

$$s = \int_0^{10} v dt = \int_0^{10} (3,5 + 1,2t) dt = 3,5 \cdot 10 + 1,2 \cdot \frac{10^2}{2}$$

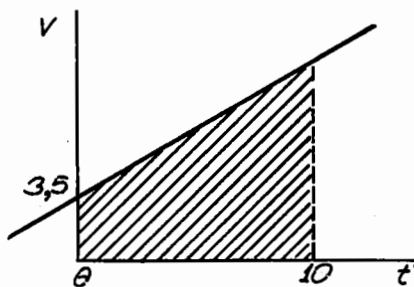


Fig. 11

SOLUÇÃO GEOMÉTRICA: Lançando-se em gráfico v contra t obtém-se s como a área sob a curva (reta no caso) entre $t = 0$ e $t = 10$ segundos.

PROBLEMA 9 - Um móvel descreve uma circunferência com rapidez $v = 4t^2$ m/s. Quantas voltas dá em 300 s se o raio da circunferência vale 0,8 m? Qual a aceleração total do cabo de 2 s?

Observação: Note que a resolução seria trabalhosa no sistema \vec{i}, \vec{j} . Outra característica geométrica da trajetória que se pode calcular é o raio de curvatura ρ . Este pode ser calculado pela expressão (veja um bom livro de cálculo tal como COURANT):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y / dx^2}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Em resumo fizemos a seguinte apresentação:

{	SISTEMAS	\vec{i}, \vec{j}	\vec{t}, \vec{n}
	VELOCIDADE	$dx/dt, dy/dt$	$ds/dt, \omega$
	ACELERAÇÃO	$d^2x/dt^2, d^2y/dt^2$	$d^2s/dt^2, v^2/R$

As componentes em \vec{i}, \vec{j} são as chamadas componentes CARTESIANAS e as em \vec{t}, \vec{n} são chamadas componentes INTRÍNSECAS.

Uma vez que terminamos a apresentação de Cinemática, vamos APLICÁ-LA a alguns problemas de interesse: Os alunos podem considerar essas aplicações como problemas propostos:

IV - MOVIMENTO RETILÍNEO - Tomemos OX sobre a trajetória. As equações do movimento são:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = 0 \end{cases}$$

Quais as relações entre \vec{x}, \vec{v} e $\vec{\gamma}$? Para resolver o problema, consideremos as definições de v e $\vec{\gamma}$.

$$(1) \quad \gamma = \frac{dv}{dt}$$

$$(2) \quad v = \frac{dx}{dt}$$

Integrando (1) e (2) entre os instantes t_0 e t

$$(1A) \quad \int_{v_0}^v dv = \int_{t_0}^t \gamma dt$$

$$(2A) \quad \int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t v dt$$

Para obtermos uma relação integral, tomemos o caso particular importante em que $\gamma = \text{constante}$. Então, a (1A) nos dá (tomando $t_0 = 0$ para simplificar)

$$\boxed{v = v_0 + \gamma t} \quad (3)$$

Introduzindo este valor em (2A) e integrando, obteremos

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \gamma t^2 \quad (4)$$

No caso de $\gamma < 0$ o movimento será RETARDADO. As equações (3) e (4) são a solução do problema, e descrevem completamente o movimento retilíneo uniformemente variado (acelerado ou retardado).

Um movimento uniformemente variado dos mais importantes é o da queda livre de um corpo na superfície da terra. Neste caso, a experiência mostra que a aceleração independe da massa dos corpos e é aproximadamente constante (em um mesmo local se a altura é pequena em relação ao raio da terra e se desprezamos a resistência do ar). Por outro lado, essa aceleração tem sempre a direção da vertical do lugar e o seu sentido é tal que é dirigida sempre para o centro da terra (*). Comumente representa-se a aceleração da gravidade pela letra g . A experiência mostra que g varia de ponto na superfície da terra.

QUESTIONÁRIO 4:

- 1 - Critique a afirmação: No movimento retilíneo $dr = ds = dx$, e a aceleração é sempre na direção da velocidade. ($\vec{\gamma} \wedge \vec{v} = 0$)
- 2 - Quais as componentes intrínsecas de $\vec{\gamma}$ no movimento retilíneo?

PROBLEMA 10 - Num movimento retilíneo variado $\gamma = 3t$. Qual o espaço percorrido ao fim de 10 segundos se o móvel possuía em $t = 0$ uma velocidade de 0,5 m/s ?

PROBLEMA 11 - Demonstre a validade da equação 4, a partir da equação 3, lançando em um gráfico $v \times t$ e valendo-se de ser

$$\int_0^t ds = \int_0^t dx \text{ neste movimento (método gráfico)}$$

PROBLEMA 12 - Deixa-se cair um objeto em repouso de uma altura h . Divida essa altura em três partes tais que sejam percorridas em tempos iguais.

PROBLEMA 13 - Um móvel tem $\gamma = 5 \text{ m/s}^2$. Qual a sua velocidade três segundos antes de ter uma velocidade de 6 m/s ? Interprete fisicamente o resultado.

V - MOVIMENTO DE PROJÉTEIS NO PLANO - Qual a trajetória de um projétil lançado com um certo ângulo com a horizontal ? O estudo rigoroso deste problema depende do conhecimento da resistência do ar (a ser feito em outro capítulo), condições atmosféricas, variação de g , movimento de rotação do projétil (a ser feito quando estudarmos o giroscópio) em tiros muito longos, inclusive tem-se que levar em conta a rotação da terra. Aqui simplificaremos o problema e, conquanto chegemos a resultados algo grosseiros, aprenderemos as características mais importantes do movimento. Isto acontece frequentemente em Física: "limpa-se" o fenômeno para simplificar o problema matematicamente. Depende entretanto do grau de intuição do físico a escolha dos fatores que realmente podem ser desprezados sem afetar as linhas gerais do fenômeno. Por isto, as ciências EXPERIMENTAIS são mais complexas que as ciências FORMAIS.

(*) Em outro capítulo mostraremos que em razão da rotação da terra a aceleração g não passa pelo centro da terra, em geral.

Seja \vec{v} a velocidade de lançamento feito com o ângulo α com a horizontal (ângulo de tiro, fig. 12). Decomponhamos o movimento em dois, para estudá-lo mais facilmente.

Como $\vec{v}_0 = v_{0x} \vec{i} + v_{0y} \vec{j}$, temos
$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

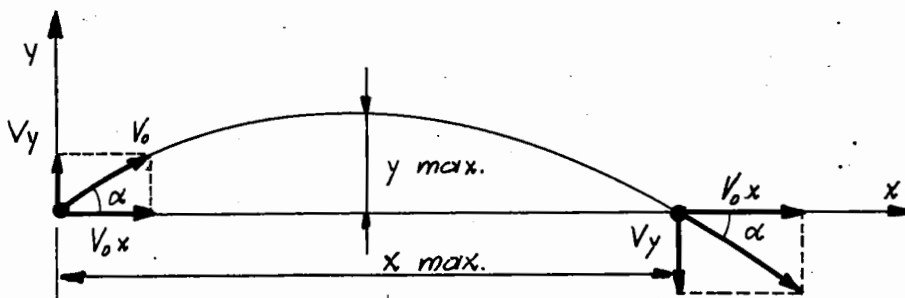


Fig. 12

O movimento em OX é uniforme, pois a única aceleração que é g está na direção OY. O estudo deste movimento é pois imediato (movimento retilíneo uniforme). Quanto ao outro (em OY) é idêntico a um lançamento vertical.

Enquanto o projétil sobe (movimento retardado) anda horizontalmente (movimento uniforme). Ao parar de subir, (ponto mais alto da trajetória, portanto), inicia a descida (em movimento acelerado) movimentando-se sempre no mesmo sentido na horizontal (em movimento uniforme) até tocar o solo. As equações do movimento são pois:

$$\begin{cases} x = (v_0 \cos \alpha) t & (5) \\ y = (v_0 \sin \alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 & (6) \end{cases}$$

A altura máxima será alcançada quando $v_y = 0$, e como $v_y = v_0 \sin \alpha - gt$ então

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

Este tempo é a metade do tempo total que o projétil leva para voltar ao plano horizontal de saída (tempo de subida é o mesmo da descida).

Substituindo este valor de t em (6) obteremos a altura máxima y_m :

$$y_m = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

A distância máxima horizontal x_m (ALCANCE) será percorrida no dobro do tempo da subida, (isto é, no tempo total do movimento) e pelas equações (7) e (5) vale

$$x_m = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Este alcance é pois máximo quando $\sin 2\alpha = 1$, ou seja, quando $\alpha = 45^\circ$. Na prática verificou-se que o alcance maior se dá para ângulos maiores, pois a resistência do ar é menor em grande al-

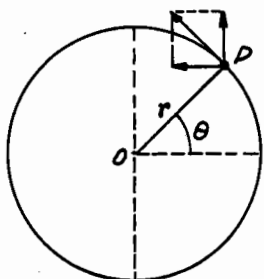
titude e compensa com vantagem a perda na componente horizontal(*)

PROBLEMA 14 - Demonstre que a equação da trajetória de um projétil é a equação de uma parábola.

PROBLEMA 15 - Qual o valor de γ_t e γ_n no vértice da parábola? Qual o seu raio de curvatura naquele ponto?

PROBLEMA 16 - Um canhão lança um projétil com $v_0 = 150$ m/s. Qual o ângulo de tiro para se dar um impacto em um alvo 1 km à frente e a 200 m de altura da horizontal que passa pelo canhão? Quanto tempo após o lançamento se dará o impacto?

VI - MOVIMENTO CIRCULAR - Suponha-se um móvel P descrevendo uma circunferência (fig. 13). Tomemos o caso particular de ser a rapidez de P sobre a trajetória $v = \text{constante}$.



Considerando-se o ângulo θ que r faz com Ox em um instante t qualquer, teremos

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

Quando P se desloca, θ varia. A rapidez pode ser escrita como

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Fig. 13

Onde ds é um arco de circunferência, e como $ds = r d\theta$, vem que

$$v = r \frac{d\theta}{dt} \quad (7)$$

$\frac{d\theta}{dt}$ que mede a variação de θ com o tempo, é denominada rapidez angular (frequência angular pelos alemães). Indicá-la-emos sempre por ω , isto é

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \therefore v = r\omega = r \frac{d\theta}{dt} \quad (8)$$

Vê-se pois (pela equação 7) que ω é constante, se $v = \text{constante}$. Se contarmos trigonometricamente os ângulos e fizermos $\theta = 0$ quando $t = 0$, obteremos da (8)

$$\omega = \frac{\theta}{t}$$

As equações do movimento se tornam pois

$$\begin{cases} x = r \cos \omega t \\ y = r \sin \omega t \end{cases}$$

Velocidade angular como vetor: "Quando um corpo rígido gira em torno de um eixo fixo, chamado eixo de rotação, cada ponto do corpo descreve uma circunferência de centro no eixo e cujo plano é perpendicular ao eixo. A velocidade de cada ponto do corpo é tangencial à circunferência descrita por ele". Além disso, pelo fato do corpo ser rígido TODOS seus pontos tem a mesma velocidade angular ω , pois em caso contrário variaria com o tempo o ângulo α com que um observador situado no eixo veria um par de pontos quaisquer A, B do corpo, isto é, os pontos mudariam sua

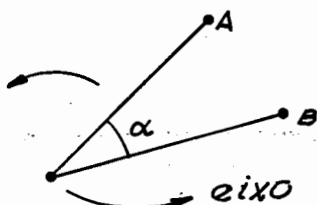
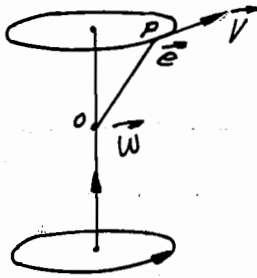


Fig. 14

(*) Veja-se Symon - Mechanics (pg. 96)

posição relativa, o que não se pode dar com os pontos de um corpo rígido. Tudo o que dissemos acima fica sintetizado em uma única equação vetorial, se dermos um significado vetorial à velocidade e angular. Assim, chamamos de vetor velocidade angular $\vec{\omega}$ ao vetor de módulo $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, dirigido segundo o eixo de rotação e com o sentido do avanço de um sacarroilhas girando no sentido da rotação.



Desta forma, a velocidade \vec{v} de um ponto P do corpo em rotação, será dada pela equação vetorial:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

onde \vec{r} é o vetor que determina o ponto P, num instante genérico, a partir de uma origem arbitrária O, tomada no eixo. Esta única equação vetorial diz tudo o que foi dito entre aspas.

Aceleração no movimento circular - Se $v =$ constante, temos que a única componente da aceleração será a centrípeta, cujo valor será:

$$\gamma_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad (9)$$

Suponhamos entretanto para generalizar um pouco mais o problema que \vec{v} não é constante mas sim $\frac{dv}{dt} =$ constante, isto é, o móvel varia a sua velocidade em direção e em módulo. Então, derivando a equação (8)

$$\frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt}$ mede a variação da rapidez angular e é por isto chamada aceleração angular escalar α . É fácil ver que no movimento circular ($r =$ constante), θ , ω e α descrevem o movimento tão bem quanto s , v e γ . Dado qualquer dos dois grupos de grandezas, sabe-se o outro. Pode-se inclusive, obter facilmente equações para o ângulo percorrido em função de ω e α :

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \end{cases} \quad (10)$$

Formalmente idênticas às equações do movimento retilíneo:

$$\begin{cases} v = v_0 + \gamma t \\ x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \gamma t^2 \end{cases}$$

É que aqui também apenas uma coordenada de posição é variável (θ). Os movimentos que necessitam de apenas uma coordenada de posição, são denominados movimentos com UM GRAU DE LIBERDADE.

A aceleração angular escalar pode ser considerada como o módulo de um vetor $\vec{\alpha}$ (aceleração angular), normal ao plano γ_t e de γ e com um sentido tal que

$$\vec{\gamma}_t = \vec{r} \wedge \vec{\alpha} \quad (11)$$

PROBLEMA 17 - Chama-se período T ao tempo que leva o móvel para executar uma rotação completa. Ao inverso de T denomina-se frequência f , (ou frequência circular segundo os autores alemães). Mostre que, no movimento circular escalarmente uniforme:

$$\begin{cases} x = r \cos \frac{2\pi}{T} t \\ y = r \sin \frac{2\pi}{T} t \end{cases} \quad \text{e que } \gamma_n = 4\pi^2 f^2 r$$

PROBLEMA 18 - Quais as componentes γ_x , γ_y no movimento circular variado? ($\gamma_t = \text{constante}$)

PROBLEMA 19 - Um relógio possui três ponteiros concêntricos: um das horas, outro dos minutos e ainda um terceiro dos segundos. Quanto tempo após as 12 horas exatas, o ponteiro dos segundos será bissetriz do ângulo entre ponteiros das horas e dos minutos?

PROBLEMA 20 - Qual o módulo da aceleração centrípeta de um ponto na superfície da terra (tomada como uma esfera de raio $R=6000\text{km}$), numa latitude de 45° ?

Solução: a aceleração centrípeta é dada por

$$\gamma_c = \omega^2 r$$

onde r é o raio de rotação. Este é dado por $r = R \cos 45^\circ$. Como a terra gira 2π rad em 24 horas,

$$\omega = \frac{2\pi}{86400} \text{ rad/s}$$

Portanto

$$\gamma_c = \left(\frac{2\pi}{86400}\right)^2 6 \times 10^6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ m/s}^2$$

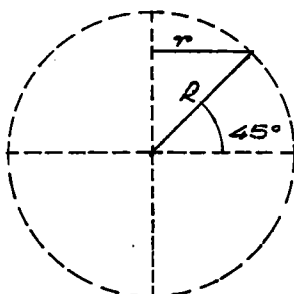


Fig. 16

VII - OS PROBLEMAS DA CINEMÁTICA

Queremos chamar a atenção neste ponto, para a seguinte observação, muito importante: um problema de cinemática pode se a

presentar sob dois aspectos básicos e distintos:

- 1º) Dado $\vec{r}(t)$ achar \vec{v} e $\vec{\gamma}$
- 2º) Dado $\vec{\gamma}$ achar \vec{v} e $\vec{r}(t)$

O primeiro problema é de simples derivação. Deriva-se a primeira vez e $\vec{r}(t) = \vec{v}$; deriva-se a segunda vez e obtém-se $\vec{r}(t) = \vec{\gamma}$

Na pior das hipóteses no problema, poder-se-á ao invés de dar $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ou $(x(t), y(t))$ etc) dar condições para que este se ja achado.

Exemplos: Dado que $\vec{r}(t) = a \cos \omega t \vec{i} + b \sin \omega t \vec{j}$, achar \vec{v} e $\vec{\gamma}$ do movimento. O resultado é simples.

$$\vec{v}(t) = -a\omega \sin \omega t \vec{i} + b\omega \cos \omega t \vec{j}$$

$$\vec{\gamma}(t) = -a\omega^2 \cos \omega t \vec{i} - b\omega^2 \sin \omega t \vec{j}$$

Tomemos outro exemplo: A tábua AB desliza ao longo da parede e do solo (fig. 17) sendo a ponta B puxada com velocidade horizontal v_0 constante. Qual a velocidade de A?

Ora precisamos ter $\vec{r}_A(t)$ para resolver o problema.

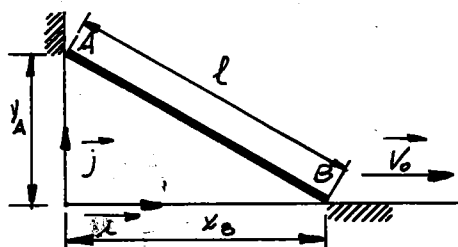


Fig. 17

Mas

$$\begin{cases} \vec{r}_A(t) = y_A \vec{j} & e \\ y_A^2 + x_B^2 = l^2 & \text{com } x_B = v_0 t \end{cases}$$

logo $\vec{r}_A(t) = \sqrt{l^2 - v_0^2 t^2} \vec{j}$ é conhecido. Basta que derivemos $\vec{r}_A(t)$ para achar \vec{v} (e γ se necessário). Para $\vec{v}(t)$ teremos:

$$\vec{v}(t) = - \frac{v_0^2 t}{\sqrt{l^2 - v_0^2 t^2}} \vec{j}$$

O sinal - indica que $\vec{v}(t)$ aponta para baixo (oposto a \vec{j})

O segundo problema geral é um problema de integração. É bem mais complexo que o primeiro. Como exemplo, resolvemos anteriormente o problema (em uma dimensão)

$$\ddot{x} = \gamma \quad (\gamma \text{ constante})$$

ou seja

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \gamma$$

para acharmos v , tivemos que integrar a equação diferencial

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{dt} = \gamma, \text{ obtivemos} \\ v = v_0 + \gamma t \end{array} \right.$$

v_0 é a condição inicial, necessária para a integração. Para obter $x(t)$, tivemos que integrar outra vez

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = v \text{ ou } \frac{dx}{dt} = v_0 + \gamma t, \text{ obtivemos} \\ x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \gamma t^2 \end{array} \right.$$

onde x_0 é a condição inicial para a segunda integração.

Vemos que: dada $\ddot{r}(t) = \ddot{r}$ teremos que integrar uma vez para obter \dot{r} e devemos conhecer uma condição inicial \dot{r}_0 . Para obter r de vemos integrar uma segunda vez a $\dot{r}(t)$, com outra condição inicial r_0 .

Este segundo problema (de integração) é o mais importante e matematicamente equivale ao estudo das soluções de equações diferenciais.

Voltaremos ao assunto quando estudarmos dinâmica.

Daremos agora um exemplo importante que é o do:

VIII - MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES (M.H.S) - Se um ponto se move segundo a lei:

$$x = x_0 \cos \omega t \quad \text{achar } \dot{x} \text{ e } \ddot{x} \quad (\omega = \text{constante}). \quad (12)$$

É um problema de derivações:

$$\dot{x} = -x_0 \omega \operatorname{sen} \omega t$$

$$\ddot{x} = -x_0 \omega^2 \cos \omega t \quad \text{ou} \quad \boxed{\ddot{x} = -\omega^2 x} \quad (13)$$

Se lançamos $x(t)$, $\dot{x}(t)$ e $\ddot{x}(t)$ em um mesmo gráfico contra o tempo, fig. 18, teremos

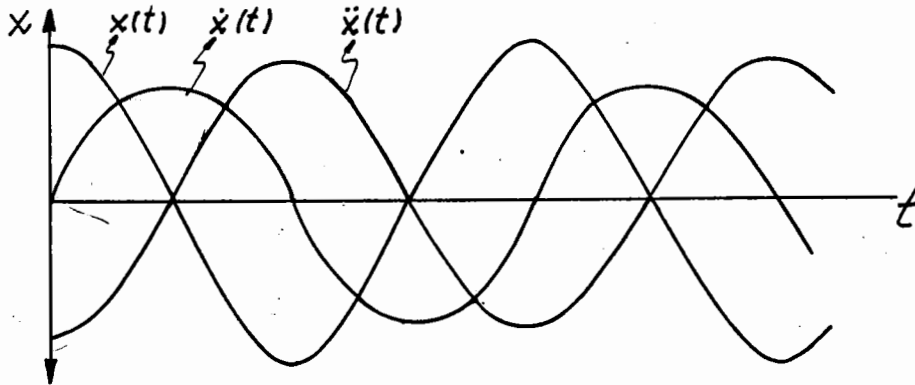


Fig. 18

Vemos que

- A aceleração \ddot{x} é proporcional ao deslocamento, porém sempre de sentido oposto ao mesmo.
- A velocidade é máxima quando o deslocamento é mínimo e vice-versa.
- O movimento do móvel $x(t)$ está limitado a uma porção $2x_0$ do espaço e todas as grandezas x , \dot{x} e \ddot{x} são funções periódicas do tempo, isto é, após um certo tempo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (período) assumem o mesmo valor.

Exemplo de um movimento que siga a equação (12) é o seguinte: Tomemos um corpo em cima de uma mola (fig. 19). Desloquemos o corpo da posição de equilíbrio de uma quantidade x_0 para baixo. Se soltarmos o corpo do repouso e neste instante começarmos a medir o tempo, isto é, tomarmos este instante como $t = 0$, teremos:

$$x = x_0 \quad \text{e} \quad v = 0 \quad \text{quando} \quad t = 0.$$

Obviamente estas condições satisfazem às equações

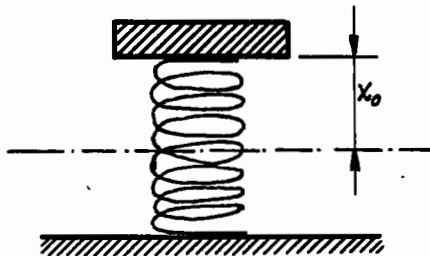


Fig. 19

$$\begin{cases} x = x_0 \cos \omega t \rightarrow \text{para } t = 0 & x = x_0 \\ \dot{x} = -x_0 \omega \operatorname{sen} \omega t \rightarrow \text{para } t = 0 & \dot{x} = 0 \end{cases}$$

O corpo sai da posição x_0 (com velocidade nula) e tem uma aceleração no sentido oposto ao do deslocamento.

Quando passa o corpo pela origem? A eq. (12) nos dá

$$0 = x_0 \cos \omega t \quad \omega t = \pi/2$$

Neste instante a velocidade será máxima (em módulo)

$$\dot{x} = -x_0 \omega \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = -x_0 \omega$$

e a aceleração mínima (deslocamento nulo). Ao ultrapassar a origem, x muda de sinal, também o faz \dot{x} e o corpo começa a diminuir a velocidade.

Ela se anulará novamente quando:

$$0 = -x_0 \omega \cos \omega t \rightarrow \omega t = \pi$$

Neste ponto o deslocamento e a aceleração serão

$$\begin{cases} x = x_0 \cos \pi = -x_0 \\ \ddot{x} = -\omega^2 x_0 \end{cases}$$

Mas, suponhamos que ao invés de se fazer a experiência deste modo, houvéssimos dado um pequeno impulso ao corpo quando na posição de repouso sobre a mola. Se contarmos o tempo a partir deste instante, então teremos $x = 0$, $\dot{x} = \dot{x}_0 (\neq 0)$ para $t = 0$; obviamente o corpo irá também efetuar um M.H.S. Observamos que as equações

$$x = x_0 \cos \omega t \quad \dot{x} = -x_0 \omega \sin \omega t$$

não satisfazem às condições iniciais de nossa experiência, pois para $t = 0$, \dot{x} deve ser $\neq 0$, porém

$$\dot{x} = -x_0 \omega \sin 0 = 0!$$

Do mesmo modo

$x = x_0 \cos 0 = 1 \neq 0$ porém $x = 0$ quando $t = 0$ em nossa experiência.

Portanto, mudando as condições iniciais a equação $x = x_0 \cos \omega t$ não funcionou; a conclusão é que ela não serve para todas as condições iniciais, ela não é a solução geral da equação diferencial do M.H.S.

$$\ddot{x} = -Kx \quad (K = \omega^2 > 0)$$

Já devíamos ter desconfiado disto, a partir dos exemplos anteriores, pois a equação em $x(t)$ (resultado de duas integrações) deveria conter duas constantes (duas condições iniciais) e a equação $x = x_0 \cos \omega t$ só contém uma (x_0). ω não é condição inicial.

A solução geral pode ser escrita do seguinte modo:

$$x = x_0 \cos(\omega t + \alpha) \quad x_0 \text{ e } \alpha \text{ condições iniciais, } \alpha \text{ é o chamado ângulo de fase inicial.}$$

No caso da segunda experiência proposta, x_0 é o deslocamento máximo (após o impulso) e α pode ser achado, pois se $t = 0$ $x = 0$:

$$0 = x_0 \cos \alpha \therefore \alpha = \pm \frac{\pi}{2}$$

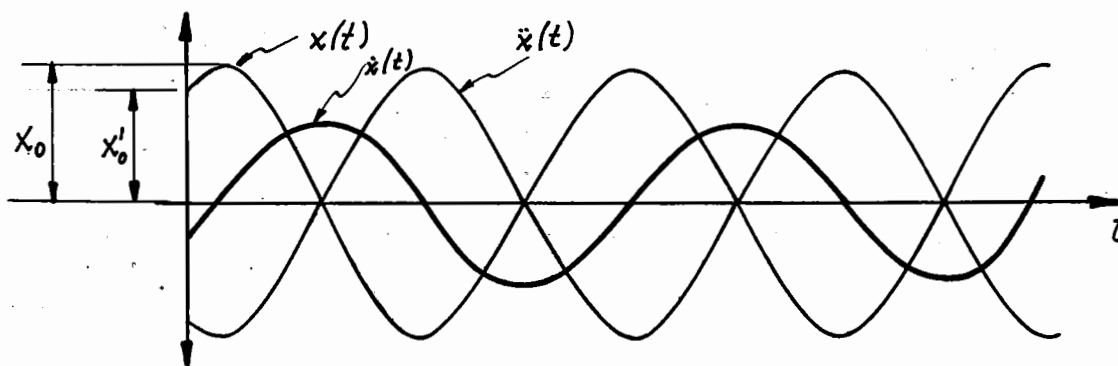
PROBLEMA 21 - Verifique que o sinal + valerá no caso de darmos um impulso no sentido do semi-eixo negativo dos x e - no caso contrário.

Que a $x = x_0 \cos(\omega t + \alpha)$ satisfaz a equação diferencial é fácil ver:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x_0 \omega \sin(\omega t + \alpha) \\ \ddot{x} = -x_0 \omega^2 \cos(\omega t + \alpha) \text{ ou} \end{cases}$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

Um quadro ilustrando o comportamento temporal das funções $x(t)$, $\dot{x}(t)$ e $\ddot{x}(t)$ para o caso geral é o da fig. 20.



PROBLEMA 22 - Mostre que a solução geral de $\ddot{x} = -\omega^2 x$ pode ser escrita em qualquer dos três modos:

$$\begin{cases} x = x_0 \cos(\omega t + \alpha) & (1) \\ x = x_0 \sin(\omega t + \beta) & (2) \\ x = x_1 \sin \omega t + x_2 \cos \omega t & (3) \end{cases}$$

É óbvio que para provar que a (2) equivale à (1) basta pôr

$$\alpha = \beta - \pi/2$$

e para provar a equivalência da (3) com a (1), basta desenvolver $\cos(\omega t + \alpha)$ e provar que

$$x_1 = -x_0 \sin \alpha \quad x_2 = x_0 \cos \alpha$$

PROBLEMA 23 - Derive duas vezes as equações (2) e (3) acima e prove que elas conduzem à equação diferencial $\ddot{x} = -\omega^2 x$.

Uma interpretação física da solução geral é a seguinte: Tomemos o nosso corpo sobre a mola. Desloquemo-lo de uma quantidade x' da origem ao invés de o soltarmos do repouso, desloquemos a massa a partir desta posição ainda mais com um pequeno impulso.

Ora, 1º) ela não sai da origem;

2º) não sai com um deslocamento x'_0 a partir do repouso, mas sim no caso mais geral possível, isto é, em $t = 0$ ela está fora da origem (fig. 20) e tem uma velocidade diferente de zero (fig. 20); com o impulso, o seu deslocamento máximo não será x' , mas x_0 (ponto D fig. 20). Voltaremos ao assunto do M.H.S. em dinâmica.

Apenas daremos, para terminar, duas definições úteis:

Período T é o menor intervalo de tempo para qualquer das grandezas x , \dot{x} ou \ddot{x} assumir dois valores iguais.

Frequência f (numero de vezes por segundo que qualquer das funções x , \dot{x} , \ddot{x} assume um mesmo valor) é o inverso de T .

PROBLEMA 24 - Qual a expressão de T e f em função de ω ?

Pela definição de T

$$\begin{cases} x_0 \cos(\omega t + \alpha) = x_0 \cos[\omega(t + T) + \alpha] \text{ ou} \\ \left\{ \omega(t + T) + \alpha \right\} - \left\{ \omega t + \alpha \right\} = 2\pi \end{cases}$$

$$\omega T = 2\pi \rightarrow \boxed{T = 2\pi/\omega}$$

Logo

$$\boxed{f = \frac{\omega}{2\pi}}$$

PROBLEMA 25 - Mostre que se um ponto P se move sobre uma circunferência de raio R com velocidade angular constante (ω), a sua projeção sobre qualquer dos diâmetros executa um M.H.S.

OBSERVAÇÃO:- A idéia sugerida no problema anterior de representar o M.H.S. por um vetor girante é de extrema importância e será retomada em outro capítulo e muito utilizada no curso de Eletricidade, quando estudarmos circuitos de corrente alternada.

IX - UM LEMA IMPORTANTE - Muitas vezes temos um vetor de módulo constante A, cuja direção varia com o tempo. Tal foi o caso do vetor \vec{r} , quando consideramos coordenadas intrínsecas, tal é o caso da velocidade de um móvel que percorre com rapidez constante uma trajetória qualquer não retilínea. É evidente que:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} \neq 0 \quad \text{e} \quad \frac{d\vec{A}}{dt} \perp \vec{A}$$

Suponhamos que a velocidade angular com que gira o vetor num instante qualquer seja $\vec{\omega}$, queremos provar que sua derivada vale:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{A}$$

Analiseemos com cuidado a equação acima: o módulo da derivada será

$$\frac{dA}{dt} = \omega A |\text{seno } \theta| \quad (\theta \text{ ângulo entre } \vec{\omega} \text{ e } \vec{A})$$

$\frac{d\vec{A}}{dt}$ será perpendicular a $\vec{\omega}$ e a \vec{A} e o sentido é dado pela regra da mão esquerda (que também dá a direção relativa entre os vetores).

Ora, consideremos o vetor $\vec{\omega}$ e o vetor \vec{A} , como na fig. 21.

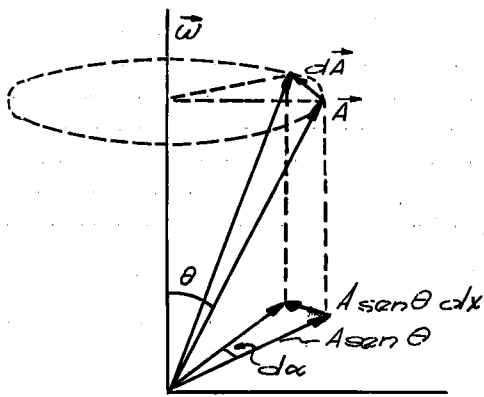


Fig. 21

Decomponhamos o vetor \vec{A} segundo as duas componentes da figura. A derivada $\frac{d\vec{A}}{dt}$ medirá a variação de \vec{A} em direção, pois, por hipótese $A = \text{constante}$. A componente $A \cos \theta$ ao longo de $\vec{\omega}$ não varia em direção, pois não gira. Somente a componente $A \text{sen } \theta$ gira. A sua variação vetorial tem para módulo $A \text{sen } \theta d\alpha$. Portanto,

$$\begin{cases} dA = A |\text{sen } \theta| d\alpha & \text{ou} \\ \frac{dA}{dt} = A |\text{sen } \theta| \frac{d\alpha}{dt} \end{cases}$$

mas $\frac{d\alpha}{dt} = \omega$ ou seja

$$\frac{dA}{dt} = \omega A |\text{sen } \theta|$$

Portanto sendo o módulo do produto vetorial, $\frac{d\vec{A}}{dt} \perp \vec{A}$ e a $\vec{\omega}$ (como se pode ver facilmente da figura), é claro que

$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{A}$ é uma representação válida como dissemos anteriormente.

PROBLEMA 26 - Demonstre que $\vec{\gamma}_n = \frac{v^2}{\rho} \vec{n}$ sabendo que $\vec{\gamma}_n = v \frac{d\vec{e}}{dt}$

X - MOVIMENTO RELATIVO - Trataremos do seguinte problema muito importante: Qual a relação entre as posições, velocidades e acelerações de um mesmo móvel medidas em relação a dois sistemas de coordenadas diferentes? Este problema é muito importante quer sob o ponto de vista teórico, quer sob o ponto de vista prático.

Sob o ponto de vista teórico porque é de grande importância garantir igual direito a dois observadores situados em dois sistemas diferentes (digamos um na Terra, outro no c.g. do sistema solar) de escrever as leis de Mecânica. Ainda mais, deve haver uma relação entre as velocidades e acelerações tais que as leis não mudem com o observador, isto é, sejam invariantes. Para estudarmos este problema, deveremos saber achar relações entre posições, velocidades e acelerações.

Sob o ponto de vista prático, a necessidade de um tal estudo é óbvia. Tome-se um avião com motor a explosão. O movimento do pistão dentro do cilindro, ou o movimento de um ponto da hélice - para um observador no avião são descritos muito simplesmente, quer o avião esteja no solo parado, quer esteja em parafuso. Para um observador na Terra, tais movimentos seriam complicados no último caso. Entretanto se fôsse necessário conhecer as equações daqueles movimentos em relação a um observador na Terra, isto seria fácil se se conhecesse:

- 1º) o movimento do avião ao qual está solidário o outro sistema de coordenadas (observador no avião);
- 2º) os movimentos do pistão e da hélice em relação ao avião.

Tomemos, entretanto, o problema inicialmente sob um aspecto mais simples (no plano), conquanto os resultados obtidos sejam válidos também em três dimensões.

Sejam \vec{I}, \vec{J} os versores de um dos referenciais (fig.22) e \vec{i}, \vec{j} o do outro. Para fixar melhor as idéias, suponhamos que seja \vec{i}, \vec{j} ligado a uma lâmina rígida no plano fundamental em que estamos apreciando os movimentos. É claro que o movimento mais geral \vec{i}, \vec{j} será o de translação (caracterizado por exemplo pelas coordenadas de um polo a , que podemos tomar na origem de \vec{i}, \vec{j}) somado com um de translação (caracterizado pela coordenada θ , que dá o ângulo de \vec{i} com \vec{I}).

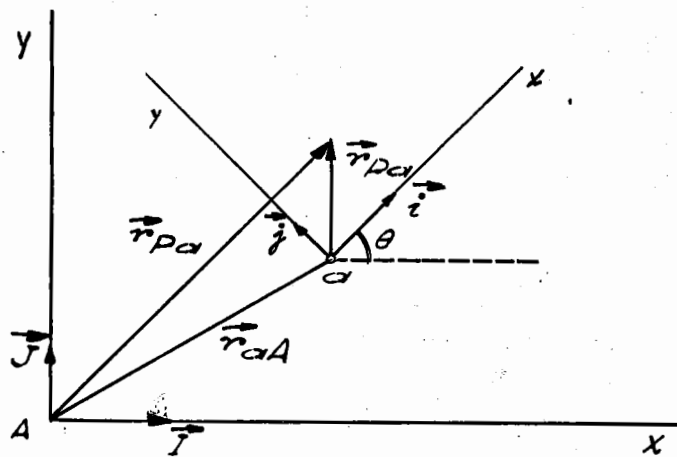


Fig.22

Para um observador em (\vec{I}, \vec{J}) se \vec{i}, \vec{j} tem o movimento mais geral possível, os vetores \vec{i}, \vec{j} variarão pois também em direção com o tempo. Se houver apenas translação pura de \vec{i}, \vec{j} em relação a \vec{I}, \vec{J} , as direções de \vec{i} e \vec{j} não mudarão com o tempo. Chamaremos de ora por diante \vec{I}, \vec{J} de sistema em repouso ou absoluto e ao movimento de um ponto P em relação a êle chamaremos de movimento absoluto. Ao movimento de P em relação a \vec{i}, \vec{j} chamaremos de movimento relativo. É óbvio que não há sentido físico no simples nome - sistema em repouso ou absoluto. Poderíamos chamar \vec{i}, \vec{j} de absoluto e \vec{I}, \vec{J} de relativo. Como se disse, se o movimento relativos dos dois sistemas é tal que $\theta = \text{constante}$, teremos translação pura e \vec{i} e \vec{j} são constantes. Em caso contrário \vec{i} e \vec{j} variarão com o tempo (em direção).

- Seja \vec{r}_{PA} - vetor posição de P em relação ao sistema (\vec{I}, \vec{J})
 \vec{r}_{Pa} - vetor posição de P em relação ao sistema (\vec{i}, \vec{j})
 \vec{r}_{aA} - vetor posição de a em relação ao sistema (\vec{I}, \vec{J})

É óbvio que:

$$\vec{r}_{PA} = -\vec{r}_{AP}; \quad \vec{r}_{Aa} = -\vec{r}_{aA}; \quad \vec{r}_{Pa} = -\vec{r}_{aP}$$

A primeira relação que buscamos é aquela entre os vetores posição; da figura se vê que esta é muito simplesmente a seguinte

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{aA} + \vec{r}_{Pa}$$

Equação 14

Para acharmos as relações entre as velocidades, basta que derivemos a equação acima em relação ao tempo, obtendo:

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{aA} + \vec{v}_{Pa}$$

Equação 15

Vamos analisar fisicamente a equação acima: para isso imaginemos que os pontos do referencial $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ são os de uma placa rígida (o solo de um veículo qualquer, por exemplo).

Sobre esta placa (referencial) se move P, (imaginemos, por exemplo uma pequena esfera se movimentando no solo do veículo). Tomemos o sistema (\vec{I}, \vec{J}) como absoluto (por exemplo na Terra, fora do veículo). Em um qualquer instante o ponto P estará sobre um ponto M do referencial. O que a equação 15 nos diz então, é que: a velocidade de P em relação ao sistema absoluto é a velocidade com que é arrastado por $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ isto é, a velocidade do ponto M com o qual P coincide no instante considerado, mais a velocidade relativa de P, isto é, velocidade de P em relação ao sistema $\{\vec{i}, \vec{j}\}$. Adotando uma nomenclatura menos precisa que a da Equação 15, poderíamos escrever

$$\vec{v}_{\text{absoluto}} = \vec{v}_{\text{arrastamento}} + \vec{v}_{\text{relativa}}$$

Portanto o movimento de P em relação ao sistema que convençamos chamar absoluto, é a soma de dois movimentos por assim dizer independentes. O movimento relativo de P independe do movimento do ponto M (arrastamento) com o qual P coincide no instante considerado. Ambos atuam simultânea e independentemente. A equação 15 é por isto, muitas vezes chamada princípio de Galileu da independência dos movimentos. É óbvio que ele resulta simplesmente da definição (vetorial) da velocidade como derivada do vetor posição.

PROBLEMA 27 - A velocidade de um barco em relação à Terra (\vec{v}_{BT}) tem

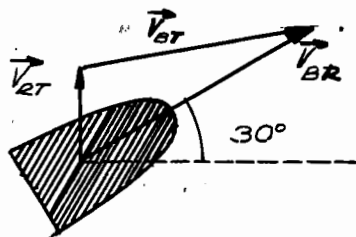


Fig. 23

por módulo 3 m/s e sua direção e sentido são os da fig. 23. A velocidade (em relação à Terra) das águas do rio sobre o qual navegava (\vec{v}_{RT}) tem módulo 8 m/s.

Qual a velocidade do barco em relação ao rio (\vec{v}_{BR}) ?

Ora, pela equação 15:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_{BR} = \vec{v}_{BT} + \vec{v}_{TR} \quad \text{ou seja} \\ \vec{v}_{BT} = \vec{v}_{BR} - \vec{v}_{RT} \end{array} \right.$$

Portanto \vec{v}_{BT} pode ser facilmente encontrado. (Vide construção na fig. 23.)

PROBLEMA 28 - Ache \vec{v}_{BT} do problema acima através de uma solução analítica.

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE - Façamos a mesma derivação da Eq. 15 (equação das velocidades relativas), porém escrevendo os vetores-posi-

ção em função de duas componentes. Sendo (x,y) e (X,Y) as coordenadas de P, em relação aos dois sistemas e (X_0, Y_0) as de A, teremos, para a equação 14

$$\vec{r}_{PA} = X_0 \vec{i} + Y_0 \vec{j} + x \vec{i} + y \vec{j}$$

Derivando em relação ao tempo:

$$\vec{v}_{PA} = \dot{X}_0 \vec{i} + \dot{Y}_0 \vec{j} + \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + x \dot{\vec{i}} + y \dot{\vec{j}} \quad \text{Eq. 16}$$

Interpretemos a equação acima. $\dot{X}_0 \vec{i} + \dot{Y}_0 \vec{j}$ é a velocidade da origem a e $x \dot{\vec{i}} + y \dot{\vec{j}}$ é um termo que aparece quando (\vec{i}, \vec{j}) gira e está relacionado com a velocidade tangencial do ponto M (que armazena P no instante considerado), devido à rotação de (\vec{i}, \vec{j}) . $\dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j}$ obviamente é a velocidade relativa de P. Portanto os dois primeiros termos são velocidades de arrastamento.

$$\vec{v}_{arr} = \dot{X}_0 \vec{i} + \dot{Y}_0 \vec{j} + x \dot{\vec{i}} + y \dot{\vec{j}}$$

e o último é a velocidade relativa:

$$\vec{v}_{rel} = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j}$$

Isto aliás se veria da equação 15 diretamente, comparando com ela a eq. 16.

PROBLEMA 29 - Demonstre que a equação 16 pode ser escrita mais elegantemente como

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{aA} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{PA} + \vec{v}_{rel} \quad \text{Eq. 17}$$

X - ROLAMENTO - Em muitos problemas práticos é útil considerar o movimento de um corpo sobre outro. Tomemos, por exemplo, um corpo A de forma qualquer como o da figura 24, movendo-se sobre o corpo B. Cada ponto de A ao se encontrar com um ponto de B poderá ou não ter uma velocidade relativa. Sendo \vec{v}_{AB} a velocidade de A em relação a B, esta poderá ou não ser nula. Para um exemplo prático, imaginemos a mola de um vagão movendo-se sobre um trilho. Se o maquinista freia repentinamente, os pontos da roda em contacto com o trilho poderão deslizar sobre ele e terão pois uma velocidade relativa diferente de zero. Pode, entretanto, acontecer que $\vec{v}_{AB} = 0$ e nesse caso dizemos que

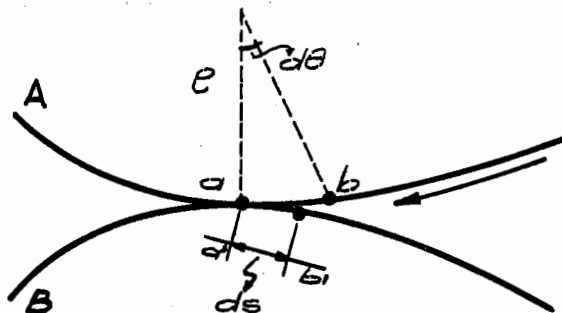


Fig. 24

há rolamento de A sobre B, sem deslizamento. Um outro modo de se traduzir a condição de rolamento sem deslizamento, é o seguinte: tomemos dois pontos a e b sobre A. Se cada ponto de A vai se sobrepor a um de B, sem deslizamento, então a cada ponto do intervalo a, b corresponde um do intervalo a' b' sobre B, e quando b tocar B (sobre b') teremos

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{ab} = \overline{a'b'} \\ \rho d\theta = ds \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \text{Eq. 18}$$

A eq.18 pode ser tomada como a nova condição de rolamento. Para exemplificar, tomemos o caso particular, muito importante, de uma roda de raio R , rolando, sem deslizar (fig. 25) sobre um plano.

Teremos que a distância percorrida pelo centro será também ds e que

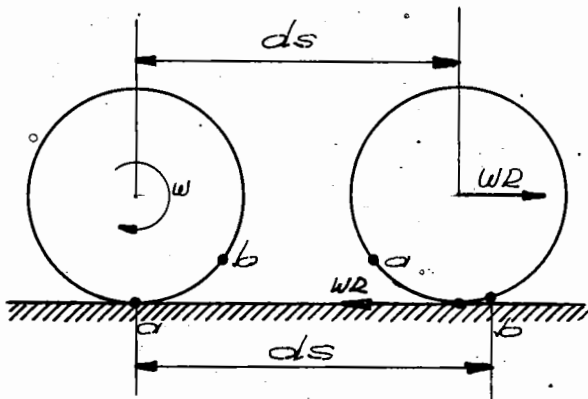


FIG. 25

$$\begin{cases} R d\theta = ds & e \\ R \frac{d\theta}{dt} = \frac{ds}{dt} & \boxed{R\omega = v} \end{cases} \text{ Eq.19}$$

onde v é a velocidade de translação do centro da roda ao longo da estrada (naquele instante) e ω a velocidade angular da roda em torno do centro (naquele instante). A eq.19 pode ser tomada como a condição de rolamento para a roda. Vê-se que a distância que o centro percorre é igual ao arco girado e igual ainda à distância percorrida sobre o solo.

Mostraremos em seguida que:

- 1º) O ponto em contacto com o plano (se há rolamento) tem realmente velocidade nula em relação ao plano.
- 2º) Que o eixo que passa pelo ponto de contacto num instante considerado pode ser considerado como um eixo instantâneo de rotação em torno do qual todos os pontos da roda giram com a mesma velocidade angular ω com a qual a roda gira em torno de seu centro.
- 1º) Tomemos um sistema de coordenadas no plano (absoluto), e outro no centro da roda (com translação, porém sem girar). A velocidade de arrastamento será (módulo) $v_{arr} = R\omega$ (rolamento). A velocidade relativa será (módulo) $v_{rel} = R\omega$. As direções e sentidos são os da

fig. 26. Aplicando a eq. 17

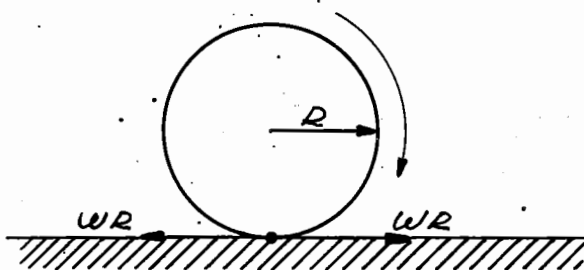


Fig. 26

$$\boxed{v_{abs} = R\omega - \omega R = 0}$$

- 2º) Calculemos a velocidade absoluta de um ponto qualquer P da roda, isto é, a velocidade de um ponto

qualquer em relação ao eixo instantâneo, já que este está parado sobre o plano.

Isto é feito de um modo muito simples.

Seja \vec{r} o vetor posição de P em relação ao sistema móvel com o centro da roda, \vec{r}_p o vetor posição em relação ao eixo instantâneo e portanto em relação ao sistema absoluto e \vec{R} o vetor posição do centro da roda (fig.27).

$$\text{Temos que: } \vec{r}_p = \vec{r} + \vec{R}$$

Derivando em relação ao tempo

$$\dot{\vec{r}}_p = \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{R}}$$

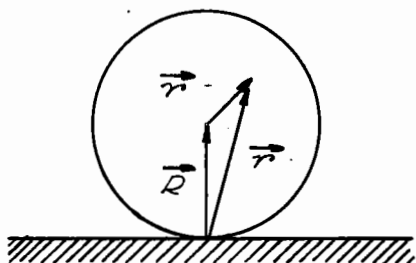


Fig. 27

Portanto qualquer ponto P gira em tórno do eixo instantâneo com velocidade angular $\vec{\omega}$ idêntica a velocidade de rotação da roda em tórno do centro. Incidentalmente nota-se que a eq. 19 nos dá a velocidade absoluta \vec{v}_P de qualquer ponto da roda, submetida à condição de rolamento.

$$\vec{r} \text{ e } \vec{R} \text{ têm módulos constantes e ambos giram com velocidade angular } \vec{\omega} \text{ (} \perp \text{ ao plano de rotação); logo pelo lema já visto:}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\vec{r}}_P &= \vec{\omega} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \vec{R} \quad \text{ou} \\ \dot{\vec{r}}_P &= \vec{\omega} \wedge (\vec{r} + \vec{R}) \quad \text{ou finalmente} \end{aligned} \right.$$

$$\boxed{\dot{\vec{r}}_P = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_P} \quad \text{Eq. 19}$$

PROBLEMA 30 - Utilize a eq. 19, para achar $\dot{\vec{r}}_P$ para os seguintes pontos, na roda que rola sem deslizar:

- 1) um ponto em contacto com o solo;
- 2) o ponto mais alto da roda;
- 3) o centro da roda;
- 4) um ponto na extremidade direita do diâmetro horizontal.

PROBLEMA 31 - Faça a demonstração da eq. 19 supondo que o sistema em movimento também gira com a roda com o mesmo ω .

XI - TEOREMA DE CORIOLIS - Já estudamos pois a transformação dos vetores $\vec{r}(t)$ e $\vec{v}(t)$ para dois sistemas em movimento relativo. Obtivemos

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{aA} + \vec{r}_{Pa} \quad \text{ou} \quad \vec{r}_{RA} = X_0 \vec{I} + Y_0 \vec{J} + x \vec{i} + y \vec{j} \quad \text{Eq. 14}$$

$$\boxed{\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{aA} + \vec{v}_{Ra}} \quad \text{ou} \quad \vec{v}_{PA} = \dot{X}_0 \vec{I} + \dot{Y}_0 \vec{J} + \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} \quad \text{Eq. 15}$$

$$\text{ou ainda } \vec{v}_{ab} = \vec{v}_{arr} + \vec{v}_{rel} \quad \text{ou ainda } \vec{v}_{abs} = \dot{\vec{r}}_{aA} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} + \dot{\vec{r}}_{Pa}$$

O nosso problema agora é calcular a relação entre as acelerações. Façamos o cálculo de um modo formal e procuramos depois interpretar os resultados.

Derivemos a 15. em relação ao tempo:

$$\boxed{\vec{\gamma}_{PA} = \vec{\gamma}_{aA} + \vec{\gamma}_{Pa}} \quad \text{Eq. 20}$$

O problema está, pois, resolvido. Há assim também um princípio de independência (como para as velocidades) para as acelerações. Para maior interpretação da eq. 20 é, entretanto, útil expressá-la com as componentes; isto é, derivemos a 16.

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma_{PO} &= \ddot{X}_0 \vec{I} + \ddot{Y}_0 \vec{J} + \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} + \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} + \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} \quad \text{ou} \\ \gamma_{PO} &= \underbrace{\ddot{X}_0 \vec{I} + \ddot{Y}_0 \vec{J} + \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j}}_a + \underbrace{2(\dot{x} \dot{y} \vec{j} + \dot{y} \dot{x} \vec{i})}_b + \underbrace{\ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j}}_c \end{aligned} \right.$$

O grupo de termos (a) é evidentemente a aceleração do ponto M com o qual P coincide no instante, devido ao fato do sistema de coordenadas se transladar (\ddot{X}_0, \ddot{Y}_0) com aceleração e rodar $(\ddot{x}_i + \ddot{y}_j)$ com aceleração. Estas são pois aceleração de arrastamento. Os termos em (c) obviamente representam a aceleração relativa de P (\ddot{x}, \ddot{y}) . Finalmente o termo (b) expressa uma aceleração suplementar ou complementar ou de Coriolis. Qual o seu significado? Para respondermos a esta questão, escrevemo-la do outro modo:

$$\begin{cases} \vec{\gamma}_{\text{Coriolis}} = 2 (\dot{x}_i + \dot{y}_j) \\ \vec{\gamma}_c = 2 \cdot (\dot{x} \vec{\omega} \wedge \vec{i} + \dot{y} \vec{\omega} \wedge \vec{j}) \quad \text{ou ainda} \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{\gamma}_c = 2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\text{rel}}}$$

Vê-se pois que $\vec{\gamma}_c$ resulta também de um arrastamento, desta vez do vetor \vec{v}_{rel} que, devido à rotação muda de direção, o que corresponde a uma aceleração.

Portanto temos que

$$\vec{\gamma}_{\text{ab}} = \vec{\gamma}_{\text{arr}} + \vec{\gamma}_{\text{rel}} + \vec{\gamma}_{\text{Coriolis}} \quad \begin{array}{l} \text{Eq. 21} \\ \text{Teor. Coriolis} \end{array}$$

A aceleração de Coriolis surge pois toda vez que o móvel P tenha uma velocidade relativa diferente de zero num sistema que se move com rotação. É claro que no caso de ser \vec{v}_r paralelo a $\vec{\omega}$, $\vec{\gamma}_c = 0$. A aceleração de Coriolis aparece por exemplo nos seguintes casos (observador num sistema fora da Terra ou no centro da Terra, sem girar com ela).

1. Um pêndulo em movimento sobre a superfície da Terra (ex. o pêndulo de Foucault).
2. Na queda livre de um corpo na Terra; no movimento de um projétil.
3. No movimento das correntes aéreas, marítimas e fluviais sobre a superfície da Terra.

Quando estudarmos dinâmica, voltaremos a apreciar a ação da aceleração de Coriolis com alguns dos movimentos exemplificados acima.

Por ora, trataremos de aplicar os conceitos acima, em alguns problemas, para que o leitor tome um melhor contacto com os mesmos.

PROBLEMA 32 - Qual a aceleração absoluta dos pontos da roda citados no problema anterior? Se $\omega = \text{constante}$?

$$1^{\text{a}} \text{ solução: } \vec{\gamma}_{\text{ab}} = \vec{\gamma}_{\text{arr}} + \vec{\gamma}_{\text{rel}} + \vec{\gamma}_{\text{Coriolis}}$$

Tomaremos o sistema móvel no centro da roda, transladando-se com ela sem girar. Então P sendo um ponto da roda, $\text{Coriolis} = 0$, $\text{arr} = 0$ ($v = R \omega$ é constante e o sistema não gira). Tomemos um ponto P qualquer de vetor posição r em relação ao sistema móvel

$$\vec{\gamma}_{rel} = -\omega^2 \vec{r}, \text{ logo}$$

$$\boxed{\vec{\gamma}_{ab} = -\omega^2 \vec{r}}$$

2ª solução: como a velocidade absoluta de um ponto P qualquer vale

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}}_P = \vec{\omega} \wedge \vec{r}, \text{ sua aceleração será} \\ \ddot{\vec{r}}_P = \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\dot{\vec{r}}) = \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \end{cases}$$

O módulo de $\ddot{\vec{r}}_P$ será $\omega^2 r$ com direção e de sentido oposto a \vec{r} (verifique com um desenho e com a regra da mão esquerda). Logo:

$$\ddot{\vec{r}}_P = \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = -\omega^2 \vec{r}$$

PROBLEMA 33 - Uma roda de raio R gira em tórno de um eixo fixo, com velocidade angular constante ω (fig. 28). Sôbre a periferia da mesma e com sentido oposto a sua rotação, um móvel P tem rapidez relativa v_r constante. Calcular: a velocidade e a aceleração de P em relação ao eixo. Chamemos o sistema no eixo de absoluto, e tomemos, como móvel, um sistema solitário a roda e girando pois com ela. Logo, para as velocidades

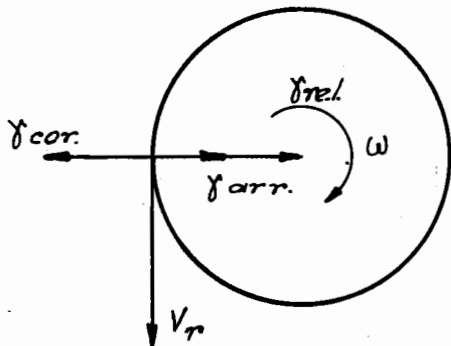


Fig. 28

$$v_{rel} = v_r \quad v_{arr} = \omega R$$

$$\boxed{v_{abs} = v_r - \omega R}$$

para as acelerações

$$\gamma_{arr} = \omega^2 R; \quad \gamma_{rel} = v_r^2 / R; \quad \gamma_{Corolis} = 2\omega v_r$$

Pela figura elas são codirecionais e γ_c é oposta às outras duas:

$$\gamma_{abs} = \omega^2 R + \frac{v_r^2}{R} - 2\omega v_r$$

PROBLEMA 34 - Suponha no problema anterior que ω varia e que $\ddot{\theta} =$ constante.

Apenas mudará a γ_{arr} já que o ponto M com o qual P coincide terá agora além da $\omega^2 R$ uma aceleração tangencial $R \ddot{\theta}$ normal às já calculadas. Pela figura, o módulo de γ_{abs} será agora:

$$\gamma_{abs} = \sqrt{R^2 \ddot{\theta}^2 + \left[\omega^2 R + \frac{v_r^2}{R} - 2\omega v_r \right]^2}$$

EXERCÍCIOS

- 1 - Demonstre que em coordenadas polares as componentes da velocidade e da aceleração valem:

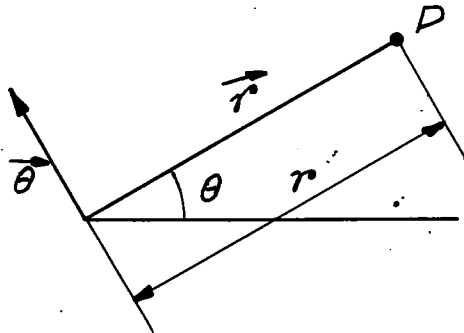


Fig. 29

$$\begin{cases} v_r = \frac{dr}{dt} \\ v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} \\ \gamma_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \\ \gamma_\theta = 2 \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \end{cases}$$

- 2 - Qual o valor de γ_n no ponto mais alto da trajetória de um movimento cujas equações são $y = 30 - 4,9 t^2$

$$x = 15 t \quad (t \text{ em seg; } y \text{ e } x \text{ em m})$$

Resposta: $\gamma_n = 9,8 \text{ m/s}^2$ dirigida para o centro de curvatura (para baixo)

- 3 - Traçando-se, a partir de uma mesma origem, vetores equipolentes às velocidades de um ponto em movimento, as extremidades destes vetores descrevem uma curva denominada hodografo do movimento. Mostre que a velocidade no hodografo é a aceleração do movimento.

- 4 - Qual o hodografo do movimento $\begin{cases} x = r \cos(\omega t) \\ y = r \sin(\omega t) \end{cases}$ (ω e r são constantes)

Resposta: Uma circunferência de raio $r \omega$.

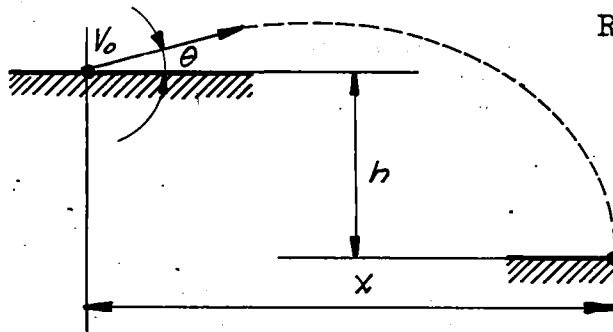
- 5 - Sabendo que a velocidade angular é um vetor (paralelo ao eixo de rotação), calcular o tempo para que a Terra efetue uma rotação completa em torno da vertical de um lugar a 45° de latitude.

Resposta: $T = \sqrt{2} \cdot 24$ horas

- 6 - Um canhão atira de altura h , sobre um plano horizontal (figura 30). Sabendo-se que v_0 é constante, qual deve ser o valor de θ para que o alcance x_0 seja máximo?

Qual o valor de x_{\max} ?

Respostas:



$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}$$

$$x_{\max} = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

- 7 - Quando um canhão atira em um plano vertical, com velocidade inicial v_0 constante, todos os pontos do plano que podem ser batidos estão situados sob uma curva, denominada parábola de segu

rança, cujo eixo é vertical e cujo vértice está na vertical do canhão. Demonstre estas propriedades, achando a equação da parábola de segurança.

Resposta: $y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$ (origem no canhão)

- 8 - Um projétil é lançado de A com velocidade v_0 e ângulo θ de tiro; simultaneamente solta-se um corpo de B. Qual a inclinação da trajetória do projétil no instante em que se choca com o corpo?

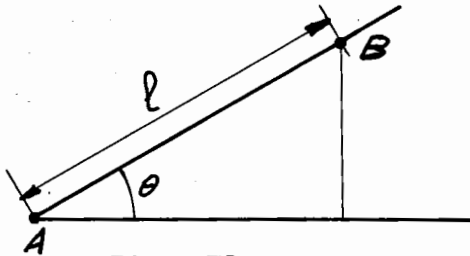


Fig. 31

Resposta: $\text{tg} = \text{tg}\theta - \frac{gl}{v_0^2 \cos^2 \theta}$

- 9 - Uma barra delgada AB de comprimento ℓ , mantendo-se sempre no mesmo plano vertical, tem as extremidades A e B, constantemente em contacto com um piso horizontal e com uma parede vertical, respectivamente, como se vê na fig. 32. A barra parte da posição vertical e sua extremidade A desliza sobre o piso com a velocidade constante v_0 , de modo que seu deslocamento seja $OA = v_0 t$. Determinar as equações do deslocamento, da velocidade e da aceleração, relativas ao movimento vertical da extremidade B da barra.

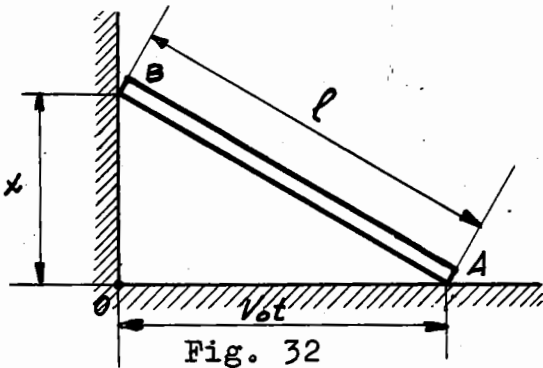


Fig. 32

Respostas: $x = \sqrt{\ell^2 - v_0^2 t^2}$ $v = - \frac{v_0^2 t}{\sqrt{\ell^2 - v_0^2 t^2}}$

$$a = - \frac{v_0^2 \cdot \ell^2}{(\ell^2 - v_0^2 t^2)^{3/2}}$$

- 10 - Um cabo AB prende-se em B a um pequeno bloco de dimensões desprezíveis e passa sobre uma roldana C, de modo que sua extremidade livre A fique 1,5 m acima do chão, fig. 33. A extremidade de A do cabo move-se horizontalmente em linha reta, puxada por um homem cuja velocidade uniforme é $v_0 = 3$ m/seg.

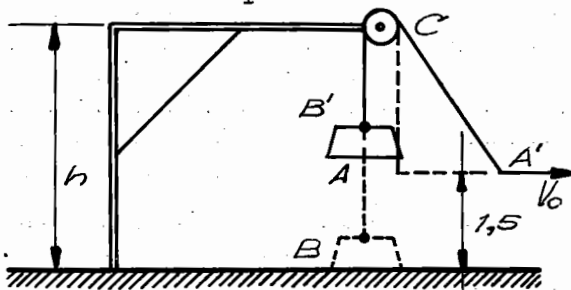


Fig. 33

Determinar a velocidade do bloco em função do tempo, e o tempo necessário para o bloco alcançar a roldana, sabendo que $h = 6$ m e que as dimensões da roldana são desprezíveis.

Resposta: $v = \frac{6t}{\sqrt{4t^2 + 9}}$ $t = \sqrt{10} = 3,16$ s

11 - Um automóvel, partindo do repouso, passa da velocidade 0 à velocidade v com uma aceleração constante j_1 ; corre com essa velocidade v durante certo tempo, voltando novamente ao repouso com uma aceleração negativa (retardamento) j_2 constante. Sendo s o seu percurso total, determinar o tempo gasto t .

Resposta:
$$t = \frac{s}{v} + \frac{v}{2} \left(\frac{1}{j_1} + \frac{1}{j_2} \right)$$

12 - A maior aceleração ou retardamento possível que um trem pode ter é j e sua velocidade máxima é v . Achar o tempo mínimo para o trem ir de uma estação à seguinte, sendo s a distância entre elas.

Resposta:
$$t_{\min} = \frac{s}{v} + \frac{v}{j}$$

13 - Um farol em um aeródromo está situado a uma distância L de um muro retilíneo. O farol gira com uma velocidade angular ω . Calcular qual a velocidade com que o feixe luminoso está percorrendo o muro no instante em que o jato de luz faz um ângulo θ com a normal ao muro.

Resposta:
$$i = \omega L \sec^2 \theta$$

14 - Um avião desce na vertical com aceleração em relação à terra (absoluta) γ_0 . Suponha-se que o avião executa ao mesmo tempo um "parafuso" com velocidade angular constante em relação a terra ω_0 , em torno de seu próprio eixo. A hélice do avião gira em sentido oposto ao do parafuso com velocidade angular ω , em relação ao avião. Calcular a aceleração absoluta de um ponto P qualquer da hélice, situado a uma distância ℓ do eixo. Especificar claramente as direções e sentido de todos os vetores com uma figura adequada.

15 - Dois pontos P_1 e P_2 movem-se sobre uma mesma reta com acelerações dirigidas para um determinado ponto O da reta, sendo cada uma delas igual a $k x^{-n}$ onde k e n são constantes e x é a distância de O ao ponto P_1 ou P_2 que se esteja considerando. Ambos os pontos partiram do repouso simultaneamente, sendo que P_1 estava situado a uma distância infinita de O e P_2 estava a uma distância b . Calcular o valor de n sabendo-se que no instante em que o ponto $x = b$, P_2 chega no ponto $b/4$ e que suas velocidades são então iguais.

Resposta:
$$n = \frac{3}{2}$$

16 - Uma partícula P desloca-se com velocidade relativa uniforme v_r segundo o meridiano de uma esfera de raio r , que tem movimento de rotação em torno de um diâmetro vertical fixo, com velocidade angular uniforme ω . Determinar sua aceleração absoluta para a posição definida pela latitude φ .