UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

APOSTILA DE:

PROBLEMAS EMPRESARIAIS LIGADOS À ENGENHARIA CIVIL

PARTE II – PROBLEMAS GERAIS SOBRE JUROS

Ayrton Salvador Leopoldino

Publicação 065/83

CONCEITOS BÁSICOS DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

VALOR TEMPORAL DO DINEIRO

O conceito fundamental sobre o qual se alicerça toda a Matemática Financeira é o VALOR TEMPORAL DO DINHEIRO.

Existem, entretanto, indivíduos que preferem trocar o gozo imediato dos benefícios que lhe proporcionariam o dinheiro possuído por benefícios maiores em uma data futura.

Outros indivíduos preferem antecipar o usufrutode benefícios que lhe seriam proporcionados pela posse de uma quantia futura, e estão dispostos para isto de abrir mão de uma parcela deste benefícios.

A intereção dos desejos destes dois tipos de pessoas gera um mercado, tornando o dinheiro uma mercadoria negociável.

Como os benefícios proporcionados pela economia sempre podem ser expressos em quantias monetárias, podemos dizer que um indivíduo abre mão de uma quantia em dinheiro em troca de uma quantia maior no futuro.

Portanto, uma quantia em dinheiro varia em função do tempo..
É este o conceito de valor temporal do dinheiro.

Este conceito independe da inflação, pois o indivíduo só trocará uma quantia por outra maior, se esta outra lhe permitir adquirir uma maior quantidade de bens e serviços que a quantia original.

Ou seja, o conceito de valor temporal do dinheiro é expresso em termos de ganhos reais, independente da inflação.

JUROS E TAXAS DE JUROS

O valor acrescido a uma quantidade de dinheiro para cedermos seu usufruto se denomina JUROS.

Se abrirmos mão de receber C$ 1.000,00 para recebermos C$ 1.100,00 daqui a um ano, o diferencial de C$ 100,00 é o que denominamos juros.

A relação entre o juro recebido e a quantia inicial é denominado taxa de juros. No nosso caso a taxa de juros seria:

$\frac{100,00}{1.000,00}$ = 0,1 ou 10% conforme expressado em termos decimais ou - percentuais.

A taxa de juros é sempre definida em função a um período de tempo.

Portanto, no nosso exemplo a taxa de juros é de 10% para o período de um ano.

PROBLEMA BÁSICO DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

O Problema Básico de Matemática Financeira é o de se determinar o Valor Futuro que devemos receber para abrir mão do uso de uma - quantia P, sendo conhecidos os juros $\underline{i}$ e o nº de periodos $\underline{n}$.

Chamando ΔP o acréscimo que desejamos receber para ceder a quantia P durante um período:

$$\Delta P = P.i$$

A quantia futura S, que queremos receber,será:

$$S_1 = P + \Delta P \quad \text{ou}$$

$$S_1 = P + Pi = P\ (1 + i)$$

Considerando que a quantia fique cedida por mais de um período, - qual seria a quantia final a receber?

No final do 2º período, queremos receber os juros sobre a quantia devida ao final do 1º período, ou seja:

$$S_2 = S_1\ (1 + i) = P\ (1 + i)^2$$

generalizando o raciocínio para um nº n de períodos, teríamos:

$$S = P\ (1 + i)^n \qquad (1)$$

Esta é a fórmula básica de Matemática Financeira. Qualquer problema pode ser resolvido exclusivamente por ela. Todas as outras fórmulas são corolarios desta e apenas facilitam os cálculos.

Nesta fórmula $\underline{i}$ é sempre usado na forma decimal.

Por exemplo o problema inverso de conhecermos uma quantia atual P que corresponda a um valor futuro S, teria a seguinte fórmula , diretamente deduzida da fórmula (1):

$$P = \frac{S}{(1 + n)^n} \qquad (2)$$

Assim, o problema de conhecermos o período n; no qual a quantia P gera a quantia S, a uma determinada taxa i, pode ser solucionado pela fórmula a seguir deduzida.

$$S = P\ (1 + i)^n$$

$$(1 + i)^n = \frac{S}{P} \quad \therefore \quad n.\log\ (1 + i) = \log \frac{S}{P}$$

$$n = \frac{\log\ (\frac{S}{P})}{\log\ (1 + i)} \qquad (3)$$

Finalmente, para sabermos que taxa i, que interrelaciona os parâmetros conhecidos P, S, e n, teríamos:

$$S = P\ (1 + i)^n \quad \therefore \quad (1 + i)^n = \frac{S}{P}$$

$$(1 + i) = \left[\frac{S}{P}\right]^{1/n} \qquad i = \left[\frac{S}{P}\right]^{1/n} - 1 \qquad (4)$$

PROBLEMAS DE APLICAÇÃO

Os exemplos a seguir esclarecerão a aplicação das fórmulas.

1 - Qual a quantia que receberemos no final de quatro anos, se emprestarmos C$ 10.000,00 a uma taxa de juros de 15% ao ano.

$S = ?\ P = 10.000,00 \quad n = 4 = 0,15$

$S = P\ (1 + i) = 10.000,00 \times (1,15)^4 = 10.000,00 \times 1,749 =$

$= 17.490,00$

2 - Se queremos receber C$ 20.000,00 daqui a dois anos, emprestando a uma taxa de juros de 10%, qual a quantia a ser emprestada?

$S = 20.000,00 \quad P = ? \quad n = 2 \quad i = 0,1$

$$P = \frac{S}{(1 + i)^n} = \frac{20.000}{(1,1)^2} = \frac{20.000}{1,21} = 16.528,92$$

3 - Por quanto tempo devemos emprestar a quantia de C$ 5.000,00 para obtermos um valor de C$ 8.052,55 , se a taxa de juros for de 10% ao semestre?

$S = 8.052,55 \quad P = 5.000,00 \quad i = 0,1 \quad n = ?$

$$n = \frac{\log\left(\frac{S}{P}\right)}{\log\ (1 + i)} = \frac{\log\left(\frac{8.052,55}{5.000,00}\right)}{\log\ (1,1)} = \frac{\log\ 1,611}{\log\ 1,1} = \frac{0,207}{0,041} = 5$$

semestres = 2,5 anos.

4 - Qual a taxa de juros que gera uma quantia futura de C$ 30.000,0 em 8 anos da quantia inicial de C$ 15.000,00.

$P = 15.000,00 \quad S = 30.000,00 \quad n = 8 \quad i = ?$

$$i = \left(\frac{S}{P}\right)^{1/n} - 1 = \left(\frac{30.000,00}{15.000,00}\right)^{1/8} - 1 = 1,0905 - 1 = 0,0905 \text{ ou}$$

9,5% a.a.

JUROS SIMPLES x JUROS COMPOSTOS

É usual os livros de Matemática Financeira iniciarem com a introdução do conceito de JUROS SIMPLES.

Segundo esse conceito, o sistema de juros simples incide apenas - sobre o Capital Inicial, não se computando juros sobre juros.

Assim se emprestarmos uma quantia de C$ 5.000,00 durante um período de 3 anos a juros simples de 10% ao ano receberíamos no final do período C$ 6.500,00, ou seja, C$ 500,00 de juros por período - mais o capital inicial.

A razão de ter existido o juros simples e ainda ser uma prática - razoavelmente difundida é que seu cálculo exige apenas as 4 operações e antes da introdução das máquinas eletrônicas de cálcular, a exponenciação era uma operação extremamente trabalhosa, exigindo o uso de tábuas de logarítimos.

Entretanto, voltamos a frizar - Economicamente não existe juros - simples. Uma pessoa pode calcular os juros desejados por um em-/préstimo como quizer, mas sempre existirá um juro composto correspondente, que deve ser considerado nos cálculos econômicos.

Ao cálculo efetuado chamamos juros nominais (juros simples). Ao valor real dos juros chamamos efetivos ou reais.

JUROS BANCÁRIOS

Uma prática bastante difundida principalmente nos meios bancários é o chamado cálculo de juros por fora.

Ou seja, o Banco calcula juros simples e os cobra antecipadamente.

Se formos pedir um empréstimo de C$ 1.000.000,00 em um Banco, por um período de 90 dias, a um juros de 4% ao mês o Banco fará cálculo:

Quantia emprestada	- C$ 1.000.000,00
Juros cobrados	- 4% ao mês durante 3 meses:
	1.000.000,00 x 0,04 x 3 = 120.000
Quantia entregue	- C$ 880.000,00
Quantia a pagar	- C$ 1.000.000,00

O gerente nos entregará C$ 880.000,00 e deveremos dentro de 3 meses pagar C$ 1.000.000,00.

Qual será o juro real correspondente a esta operação?

Teremos o seguinte problema:

P = C$ 880.000,00 S = C$ 1.000.000,00 n = 3 i = ?

$$i = \left(\frac{S}{P}\right)^{1/n} - 1 = \left[\frac{1.000.000}{880.000}\right]^{1/3} - 1 = 0{,}0435 \text{ ou } 4{,}35\% \text{ a.m.}$$

Portanto, vemos que ao juros nominal de 4. a.m, cobrados antecipadamente, corresponderá um juro real de 4,35% a.m.

A incoerência matemática do Sistema Bancário pode ser visto por -

um simples exemplo - Suponhamos um empréstimo de C$ 1.000.000,00 a juros de 2,5% a.m. durante 40 meses.

O cálculo bancário nos levaria ao seguinte:

Quantia emprestada - C$ 1.000.000,00
Juros antecipados - C$ 1.000.000,00 x 0,025 x 40 = 1.000.000,0
Quantia entregue - zero
Quantia a pagar - C$ 1.000.000,00

Ou seja, o Banco não nos daria dinheiro algum e dentro de 40 meses deveríamos lhe pagar C$ 1.000.000,00.

A tabela a seguir, apresenta a comparação de JUROS BANCÁRIO USUAIS, com os correspondentes JUROS REAIS. Ela foi calculada pelo uso da fórmula (4). É uma tabela de dupla entrada - no cruzamento da taxa nominal com o prazo teremos a taxa real ao mês.

SISTEMA BANCÁRIO - JUROS NOMINAIS X JUROS REAIS

Taxa nominal (% a.m) / Prazo (dias).	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%
30	1,010	2,041	3.093	4,167	5,263	6,383	7,527	8,696	9,890
60	1,015	2,062	3,142	4,257	5,409	6,600	7,833	9,109	10,342
90	1,020	2,084	3,194	4,353	5,567	6,839	8,174	9,579	11,060
120	1,026	2,106	3,247	4,455	5,737	7,102	8,559	10,122	11,803
150	1,031	2,130	3,304	4,564	5,922	7,394	8,998	10,757	12,701
180	1,037	2,153	3,363	4,680	6,125	7,722	9,504	11,515	13,817

OBS: O Juro Nominal corresponde a Juros Simples cobrados antecipadamente.

EQUIVALÊNCIA DE TAXAS DE JUROS

Vimos que na aplicação das fórmulas apresentadas a taxa de juros deve ser coerente com a unidade usada para período. Assim, se os períodos expressam em meses, a taxa de juros deve ser por mês, se os períodos são anos, a taxa de juros deve ser expressa por anos, etc.

Entretanto, as vezes temos necessidade de converter uma taxa de juros expressa em outra unidade de tempo para uso nas fórmulas. Neste caso, as duas taxas dever ser EQUIVALENTES.

Suponhamos que desejamos saber o juro equivalente mensal (im) cor respondente a um juro anual (i a).

Se tivermos o juro anual ia, uma quantia P atingirá no final do período o valor S_1 que será igual:

$S_1 = P)1 + ia)^1$

Se o juro fosse mensal, im, a mesma quantia P atingirá no mesmo - ponto o valor:

$S_2 = P (1 + im)^{12}$

Os juros serão equivalentes quando a partir da mesma quantia inicial, no mesmo período de tempo obtivermos o mesmo montante final.

Portanto, para que <u>ia</u> e <u>im</u> sejam equivalentes temos de ter:

$S_1 = S_2$ o que equivale a

$P (1 + ia) = P (1 + im)^{12}$ ou

$(1 + ia) = (1 + im)^{12}$

Assim, se conhecemos <u>ia</u> e queremos <u>im</u> :

$(1 + ia)^{1/12} = (1 + im)$

$im = (1 + ia)^{1/12} - 1$

Da mesma forma, conhecido im, o valor de ia seria:

$ia = (1 + im)^{12} - 1$

<u>Exemplos</u>

1 - Achar o equivalente anual da taxa mensal de 3%.

$(1 + ia) = (1,03)^{12}$

$(1 + ia) = 1,4258$

$ia = 0,4258$ ou 42,58% a.a.

2 - Achar o equivalente mensal da taxa anual de 12%

$(1 + im)^{12} = (1 + 0,12)$

$1 + im = (1,12)^{1/12}$

$1 + im = 1,0095$

$im = 0,0095$ ou 0,95% a.m.

3 - Achar o equivalente trimestral (it) da taxa anual de 6% (ia)

$(1 + it)^4 = (1 + ia)$

$(1 + it)^4 = (1,06)$

$1 + it = (1,06)^{1/4} = 1,0147$

$it = 0,0147$ ou 1,47% a.t.

4 - Achar o equivalente diário de uma taxa de 5% a.m.

$$(1 + id)^{30} = 1 + im$$

$$(1 + id)^{30} = 1{,}05$$

$$(1 + id) = (1{,}05)^{1/30}$$

$$(1 + id) = 1{,}0016$$

$$id = 0{,}0016 \text{ ou } 0{,}16\% \text{ a.d.}$$

I N F L A Ç Ã O

Juros Nominais e Rendimento Real do CApital

Seja i_n a taxa de juros correntes, que vigora no mercado finan-/ceiro. Num regime de inflação, esta taxa de juros nominal deixa de representar a verdadeira remuneração do capital, pois ao aumento do valor nominal de um montante de moeda, se opõe o decréscimo do seu poder de compra.

Surge então, o problema de determinação do rendimento real do capital, depois de deduzida dos juros nominais correntes, a parcela necessária para compensar os efeitos da inflação

Suponhamos que se empreste C$ 500.000,00 durante o período de um ano no qual a taxa inflacionária foi de 50% a.a., e se deseje ganhar um juro real de 10% a.a.

No final do ano. se quizermos receber apenas o nosso dinheiro de volta, sem qualquer juros, teríamos que receber 500.000 x 1,5 = 750.000,00.

Ou seja, este valor nos permitirá adquirir exatamente o que os C$ 500.000,00 nos permitia adquirir no início do ano.

Entretanto, queremos um ganho real de 10%, ou seja,queremos adquirir 10% a mais de coisas que adquirimos no início do ano.

Assim, vamos cobrar de juros 10% sobre o valor corrigido, ou seja C$ 75.000,00. Portanto, o nosso devedor deverá nos pagar C$ 825.000,00 no final do ano.

Se considerarmos P = C$ 500.000,00; S = C$ 825.000,00; n = 1, a taxa de juros correspondente será, pelas fórmulas já conhecidas:

$$S = P\,(1 + i)^1$$

$$(1 + i) = \frac{P}{S}$$

$$(1 + i) = \frac{825.000{,}00}{500.000{,}00} = 1{,}65 \qquad i = 0{,}65 \text{ ou } 65\% \text{ a.a.}$$

Esta taxa, entretanto, incorpora duas coisas: a reposição do valor do dinheiro em função da inflação (correção mentária) e um ga nho real (juros).

Chamando I a taxa inflacionária, obteríamos o valor apenas corrigido monetariamente pela expressão:

$$S_1 = P\ (1 + I)$$

O juro real i_r seria calculado em função de S_1

Portanto, o valor final de S seria igual

$S = S_1 + i\ S_1 = S_1\ (1 + ir)$

como $S_1 = P\ (1 + I)$ temos

$S = P\ (1 + i_r)\ (1 + I) \quad (1)$

Por outro lado, vimos que o valor de S poderia ser calculado através de um juro nominal in, pela fórmula:

$S = P\ (1 + in) \quad (2)$

Comparando (1) e (2) temos:

$P\ (1 + I)\ (1 + ir) = P\ (1 + in)$ ou $(1+I)\ (1 + ir) = (1 + in)$ (3)

A fórmula (3) estabelece a relação entre os juros reais e a taxa de inflação. No nosso exemplo a taxa nominal seria:

$(1 + in) = (1{,}5)\ (1{,}1) = 1{,}65$

$in = 0{,}65$ ou 65%, como já tinhamos achado

Exemplo

Qual seria a taxa real de um empréstimo cuja taxa nominal foi 95% a.a. se a inflação no período foi de 85%?

$(1 + in) = (1 + I)\ (1 + ir)$

$$(1 + ir) = \frac{(1 + in)}{(1 + I)} = \frac{1{,}95}{1{,}85} = 1{,}0541$$

$ir = 0{,}0541$ ou 5,41 a.a.

INFLAÇÃO NOS ESTUDOS ECONÔMICOS

Concluimos que podemos determinar a viabilidade da aplicação de recursos em uma atividade como se não houvesse inflação, tendo porém o cuidado de esclarecer que as quantias nele envolvidas são - expressas numa moeda com o mesmo poder aquisitivo da moeda nacional, na época do estudo.

Contudo ressaltamos que, no texto acima implicitamente, assumimos as seguintes hipóteses, nem sempre válidas:

a) A mesma taxa de inflação aplica-se aos preços, custos, salá-/rios, investimentos, etc.

b) A empresa tem bastante liberdade para corrigir o preço de venda dos seus produtos, durante a vida do projeto, para fazer à face à inflação.

Uma alternativa também usada é a de se fazerem os estudos econômicos em moeda relativamente estável, como o dólar, por exemplo. Parece-nos, todavia, que tal alternativa não é melhor que a anterior, por dois motivos principais:

1) O dolar também sofre inflação e, nesta caso, é necessário explicar que o estudo é feito em "dólares com valor constante do ano tal", de maneira semelhante ao sugerido para o caso do cruzeiro;

2) Aumento do valor do dólar pode não refletir de maneira correta o efeito da inflação, e portanto, a "correção monetária" que - se julga estar fazendo é ilusória e, às vezes, viciosa.

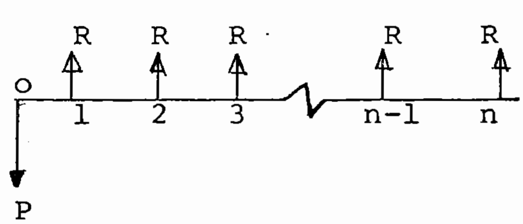
SÉRIES UNIFORMES DE PAGAMENTOS OU PRESTAÇÕES

Muitas vezes nos é proposto a troca de uma quantia por uma série uniforme de pagamentos, ou seja, quantias iguais, pagas periodicamente.

Os componentes das séries são genericamente chamadas de prestações ou em casos específicos anuidades se feitas com a periodicidade anual ou mensalidades se a periodicidade for mensal.

O problema proposto agora é, se conhecendo a quantia inicial P - (montante) o nº de prestações (n), calcularmos o valor das prestações (R), que satisfação a uma taxa de juros i%.

Podemos esquematizar o sistema graficamente por um diagrama de setas, como mostrado a seguir:



Cada valor de R corresponderá a um valor equivalente no período - inicial que nos é dado pela fórmula:

$P_k = \dfrac{R}{(1 + i)^k}$ onde k é o período de cada prestação R.

É claro que para a série seja equivalente ao valor inicial P, devemos ter:

$P = \sum_{k=1}^{N} P_k = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n$ como $P_k = \dfrac{R}{(1 + i)^k}$

$$P = \sum_{k=1}^{N} \frac{R}{(1+i)^k} = \frac{R}{(1+i)^1} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + \dots + \frac{R}{(1+i)^n}$$

ou

$$P = R \quad \frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \dots + \frac{1}{(1+i)^n} \qquad (1)$$

Ā expressão entre parênteses representam uma Progressão Geométrica (PG) cujo primeiro termo a_1 é igual a $\frac{1}{(1+i)}$ e a razão que é igual a:

$$q = \frac{1}{(1+i)}$$

Lembrando que a fórmula que nos dá a soma dos termos de uma PG é a seguinte:

$$S = a_1 \times \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

como no nosso caso $a_1 = \frac{1}{(1+i)}$ e $q = \frac{1}{(1+i)}$ temos

$$S = \frac{1}{(1+i)} \times \frac{\left[\frac{1}{(1+i)}\right]^n - 1}{\frac{1}{(1+i)} - 1}$$

desenvolvendo esta fórmula:

$$S = \frac{1}{(1+i)} \quad \frac{\frac{1}{(1+i)}^n - 1}{\frac{1}{(1+i)} - 1} = \frac{\frac{1}{(1+i)}^{n+1} - \frac{1}{(1+i)}}{\frac{1-(1+i)}{(1+i)}} =$$

$$= \frac{\frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^{n+i}}}{\frac{-i}{(1+i)}} = \frac{1-(1+i)^n}{-i\,(1+i)} = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}$$

Substituindo este valor na fórmula (1):

$$P = R \quad \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \qquad (2)$$

Esta fórmula nos permite calcular o valor do montante inicial, conhecido o valor das prestações. Da fórmula (2) podemos tirar:

$$R = P \quad \frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1} \qquad (3)$$

que nos permite calcular o valor da prestação R em função do montante inicial P.

As fórmulas (2) e (3) podem ser expressas de outra forma, dividindo o numerador e denominador por $(1 + i)^n$, tornando mais fácil seu uso em máquinas de calcular.

$$P = R\,\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \qquad (4) \text{ (equivalente a 2)}$$

$$R = P\,\frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}} \qquad (5) \text{ (equivalente a 3)}$$

Os fatores $FRP = \dfrac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$ e $FPR = \dfrac{i}{1 - (1 + i)^{-n}}$ podem ser encontradas em tabelas.

Entretanto, eles podem ser facilmente calculados com máquinas eletrônicas com as 4 operações que tenha constante.

EXEMPLOS:

1 - Qual seria a prestação equivalente ao montante inicial de C$ 50.000,00 se o prazo de pagamento fosse 10 meses a taxa de juros 3% a.m.

$P = 50.000,00 \quad n = 10 \quad i = 0,03 \quad R = ?$

$$R = P\,\frac{i}{1 - (1 + i)^{n}} = 50.000,00 \times \frac{0,03}{1 - (1,03)^{-10}} =$$

$$= 50.000,00 \times 0,1172 = 5.860,00$$

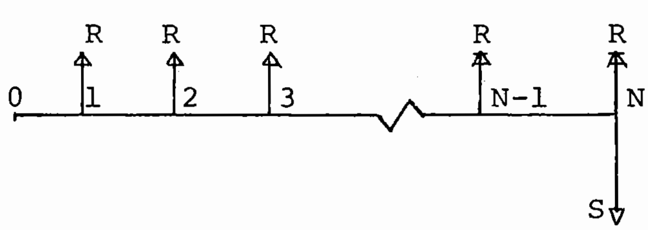
2 - Qual o montante equivalente a uma série de 5 prestações mensais de C$ 10.000,00 se a taxa de juros foi de 2% a.m.

$$P = R\,\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{} = 10.000 \times \frac{1 - (1,02)^{-5}}{0,02} = 10.000 \times$$

$$4,7135 = 47.135,00$$

VALOR FUTURO DE UMA SÉRIE UNIFORME

Outro tipo de problema que encontramos em Matemática Financeira é o de se conhecer o valor futuro de uma série uniforme, conforme mostramos no diagrama seguinte:



Este problema é resolvido combinando-se dois tipos de problemas anteriores: achar-se o montante equivalente a uma série uniforme e a seguir achar-se o valor futuro deste montante.

Assim teriamos:

$$P = R \quad x \; \frac{(1 + i)^n - 1}{(1 + i)^n \,.\, 1}$$

$$S = P\,(1 + i)^n \qquad \text{logo,}$$

$$S = R \; \frac{(1 + i)^n - 1}{(1 + i)^n \,.\, 1} \; x \; (1 + i)^n \quad \text{ou simplificando}$$

$$S = R \; \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

Desta fórmula tiramos o valor de R em função de P:

$$R = S \quad \frac{i}{(1 + i)^n - 1}$$

EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Quanto teríamos que economizar mensalmente para em 5 anos obtermos a poupança de C$ 2.000.000,00, se conseguirmos um juro mensal de 3,5%?

S = 2.000.000,00 n = 60 meses i = 0,035 a.m. R = ?

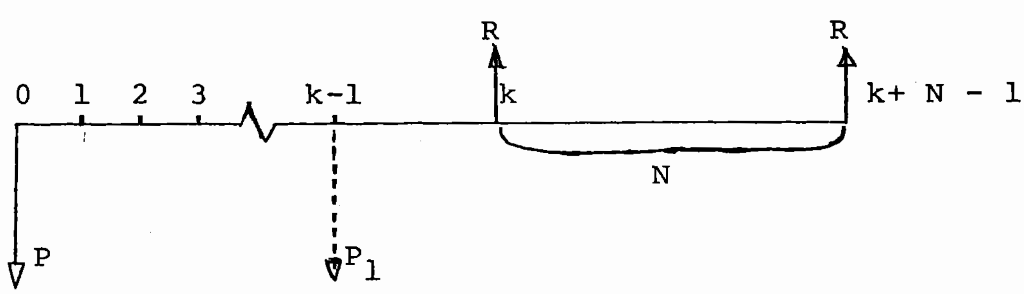
$$R = S \; x \; \frac{i}{(1 + i)^n - 1} = 2.000.000{,}00 \; x \; \frac{0{,}35}{(1{,}035)^{60} - 1} = 10.177{,}24$$

SÉRIES UNIFORMES DIFERIDAS

As fórmulas deduzidas para as séries uniformes pressupõem que a série se inicie em período após o Montante inicial, ou, no caso - do valor futuro, que este valor esteja no último período da série.

Entretanto, muitas vezes temos que resolver problemas em que as - séries estão defasadas (diferidas) em relação a este período.

Vejamos por exemplo o caso explicitado pelo diagrama a seguir:



Neste caso temos uma série diferida $\underline{k}$ períodos do montante inicial.

$$P_1 = R \; \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

O valor desejado P seria então

$$P = P_1 \times \frac{1}{(1 + i)^{k-1}} \quad , \text{ logo}$$

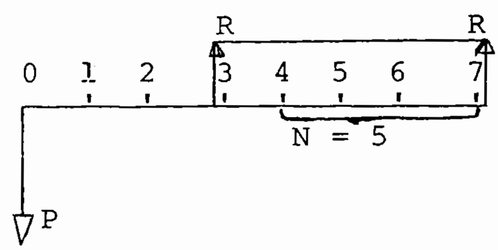
$$P = R \times \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \quad \times \quad \frac{1}{(1 + i)^{k-1}}$$

Esta fórmula nos dá o montante inicial de uma série de n elemen-/tos, diferida de k periodos do ponto inicial.

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Uma lojo que fazer um plano de pagamento em que o freguês comece a pagar suas prestações 3 meses após a compra.

Calcular a prestação de uma venda em 5 vezes, com os juros de 4% a.m., de uma mercadoria cujo preço à Vista é de C$ 10.000,00.



$P = 10.000,00 \qquad n = 5 \qquad i = 0,04 \qquad k = 3 \qquad r = ?$

$$R = P \; \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}} \; \times (1 + i)^{k-1} = 10.000 \times \frac{0,04}{1 - (1,04)^{-5}} \; (1,04)^{2}$$

$= 10.000 \times 0,242957 \qquad R = 2.429,57$

CÁLCULO DO NÚMERO DE PERÍODOS DE SÉRIES UNIFORMES

Nos problemas de séries uniformes apresentados até agora, suponhamos conhecidos os valores de n e i, e calculáveis P, S ou R, conhecido um deles.

Entretanto, algumas vezes queremos calcular os valores de n, co-/nhecidos ou outros parâmetros. É o que mostraremos a seguir:

a) Conhecidos P, R, e i calcular n.

$$P = R \; \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \qquad\qquad \frac{P \times i}{R} = 1 - (1 + i)^{-n}$$

$$\frac{P \times i}{R} - 1 = -(1 + i)^{-n} \qquad\qquad 1 - \frac{P \times i}{R} = \frac{1}{(1 + i)^{n}}$$

$$\frac{R - Pi}{R} = \frac{1}{(1 + i)^{n}} \qquad\qquad (1 + i)^{n} = \frac{R}{R - Pi}$$

$$n \log (1 + i) = \log \frac{R}{R - Pi} \qquad n = \frac{\log (\frac{R}{R - Pi})}{\log (1 + i)} \quad (1)$$

b) conhecidos S, R e i calcular n

$$S = R \times \frac{(1 + i)^n - 1}{i} \qquad \frac{S \times i}{R} = (1 + i)^n - 1$$

$$(1 + i)^n = \frac{S \times i}{R} + 1 \qquad n \log (1 + i) = \log (\frac{S \times i}{R} + 1)$$

$$n = \frac{\log (S/R \quad + 1)}{\log (1 + i)} \quad (2)$$

EXEMPLOS

1 . Dados S = 1.000,00 R = 79,504575 e i = 0,05 calcular n.

Aplicando diretamente a formula (2):

$$n = \frac{\log (\frac{1.000 \times 0,05}{79,504575} + 1)}{\log (1,05)} = \frac{\log (1,66889)}{\log (1,05)} = \frac{0,211893}{0,21189} = 10,0$$

2 - Dados P = 500,00 R = 109,177286 i = 0,03 calcular n.

Aplicando a fórmula (1)

$$n = \frac{\log (\frac{109,177286}{109,177286 - 500 \times 0,03})}{\log (1,03)} = \frac{\log (1,159274)}{\log (1,03)} = \frac{0,064186}{0,12837} =$$

$$= 5.0$$

CÁLCULO DA TAXA DE JUROS DE UMA SÉRIE UNIFORME

O problema é conhecido montante inicial, o valor e número das - prestações. Calcular a taxa de juros implícita.
Este problema é o mais difícil de Matemática Financeira, não tendo uma solução algébrica direta. É necessário resolvê-lo por tentativas ou por fórmulas algébricas iterarivas, ou seja, que par-/tindo de um valor inicial vão aproximando a solução.

1 - Método de Tentativas

Consiste simplesmente em ir se verificando, por tentativas o valor de várias taxas, até se conseguir uma aproximação razoável.

EXEMPLO:

Uma loja quer nos vender uma televisão, cujo preço a vista é C$ 45.000,00 por 12 prestações mensais de C$ 4.500,00, sem entrada. Qual o juro que ela nos está cobrando?

usando a fórmula $R = P\frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}}$, vamos fazer diversas tentativas:

Para i = 1% R = 3.998,20 logo o juro i é maior que 1%

i = 2% R = 4.255,18 logo o juro i é maior que 2%

i = 3% R = 4.520,79 logo o juro i é menor que 3%

Quando os juros aumentam de 2% para 3%, ou seja 1%, a prestação - aumentou de 265,61. Se a prestação aumentasse 244,42, (para C$ - 4.500,00), poderíamos fazer uma regra de 3 para vermos o quanto -- aumentaria os juros.

Aumento da prestação	Aumento do Juros
255,61	1%
244,82	x

$$\therefore \quad x = 1 \times \frac{244,82}{265,51} = 0,92$$

Logo o juros desejado é 2 + 0,92 = 2,92 a.m.

2 - <u>Fórmula aproximada</u>

Embora tenhamos dito que não eciste uma fórmula algébrica para o cálculo dos juros implícitos de uma série uniforme, para cálculos aproximados existe uma fórmula que dá um valor com erro de $\pm$ 0,5% mas limitada para valores de n entre 5 e 20 e taxas até cerca de 15%.

$$i = \frac{\frac{R}{P} - \frac{1}{n}}{0,652}$$

Está fórmula pode ser usada para calcular o valor inicial quando do método das tentativas.

<u>EXEMPLOS</u>:

a) R = 4.500 P = 45.000 n = 12

$$i = \frac{\frac{4.500}{45.000} - \frac{1}{12}}{0,652} = 0,0256 \text{ ou } 2,56\% \quad \text{(TAXA REAL - 2,9229\%)}$$

b) R = 1.000 P = 7.000 n = 10

$$i = \frac{\frac{1.000}{7.000} - \frac{1}{10}}{0,652} = 0,0657 \text{ ou } 6,57\% \quad \text{(TAXA REAL - 7,0728\%)}$$

A P E N D I C E 1

FORMULÁRIO DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

PARÂMETRO A DETERMINAR	PARÂMETRO CONHECIDOS	FÓRMULA A EMPREGAR
P	S, n, i	$P = \dfrac{S}{(1+i)^n}$
P	R. n, i	$P = R\left[\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{1}\right]$
S	P, n, i	$S = P\ (1+i)^n$
S	R. n, i	$S = R\left[\dfrac{1+i)^n - 1}{i}\right]$
R	P, n, i	$R = P\left[\dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right]$
R	S, n, i	$R = S\left[\dfrac{i}{(1+i)^n - 1}\right]$
n	P, S, i	$n = \dfrac{\log(\frac{S}{P})}{\log\ (1+i)}$
n	P, R, i	$n = \dfrac{\log(\frac{R}{R-Pi})}{\log\ (1+i)}$
n	S, R, i	$n = \dfrac{\log(\frac{Si}{R}+1)}{\log\ (1+i)}$
i	P, S, n	$i = (\frac{S}{P})^{1/n} - 1$
i	P, r, n	$i = \dfrac{\frac{R}{P} - \frac{1}{n}}{0{,}652}$

fórmula aproximada

INDICES DE AVALIACÃO ECONOMICA DE FLUXOS DE CAIXA

Projeto economico é qualquer atividade representada por seu fluso de caixa onde estejam orçados os dispêndios e os resultados líquidos da mesma.

O objetivo fundamental de uma avaliação econômica de fluxo de caixa é a comparação dos Dispêndios necessários à execução de um projeto com os Resultados Líquidos proporcionados pelo mesmo. Os Cálculos objetivam, dentro da escala temporal da vida econômica, determinar se o Projeto deverá ou não ser executado. Cada fluxo de caixa orçado reflete uma alternativa de emprego de recursos da Empresa ou de terceiros, e deverá ser confrontado com os fluxos de outras alternativas existentes.

Os índices de avaliação econômica a seguir apresentados permitirão fazer esta comparação entre fluxos de caixa alternativos.

Todos os índices são calculados em moeda constante supondo a inflação igual para receitas e despesas.

Taxa Mínima de Atratividade

O Índice fundamental de Avaliação Econômica, em relação ao qual a maioria dos Índices é comparado, é a TAXA MÍNIMA DE ATRATIVIDADE (TMA).

Toda empresa tem um índice mínimo de rentabilidade desejado, determinado em função de suas alternativas de emprego de dinheiro , quer em Projetos, quer no Mercado Financeiro.

A A rentabilidade de um projeto deve ser superior a esta TMA para que a empresa o leve em consideração, pois se inferior, a empresa terá outras oportunidade melhores de aplicar seu capital.

CUSTO DE CAPITAL DA EMPRESA

O valor da TMA é conjuntural e determinado em função das oportunidades na época para a plicação do capital. Entretanto, existe um limite inferior para a TMA que é o CUSTO DE CAPITAL DA EMPRESA.

A Empresa tem basicamente duas fontes para seu dinheiro: o dinheiro dos acionistas (capital inicial + lucros reempregados) e dinheiro de empréstimos; o dinheiro dos acionistas ela remunera com os dividendos e pelos empréstimos ela tem de pagar juros.

Portanto, o custo de capital da empresa é uma média dos valores - dos dividendos e juros, ponderado pelos percentuais existentes de capital próprio e empréstimos.

Por exemplo:

Estrutura do Capital Existente	Valor (C$ 10^6)	%	Custo	Custo Ponderado
Capital Próprio	10	25	8%	2%
Capital de Terceiros	30	75	4%	3%

CUSTO MÉDIO DO CAPITAL: 5%

É óbvio que, se uma empresa considera uma taxa mínima de atratividade menor que seu CUSTO DE CAPITAL, não gerará lucros suficientes para pagar a seus acionistas e credores.

VALOR ATUAL DE UM FLUXO DE CAIXA (OU VALOR PRESENTE LÍQUIDO)

Este método trata de descontar (ao período zero) as receitas líquidas do projeto e, então, subtrair o investimento efetuado. Tal desconto é efetuado mediante a utilização da taxa mínima de atratividade.

A fórmula do valor atual é:

$$VA = \sum_{n=0}^{n} \frac{FG_n}{(1 + i)^n}$$

onde FG_n é o fluxo gerado no ano n, e i a taxa de desconto.

Portanto o Valor Atual de um Fluxo de Caixa (VA) é a soma de todo o fluxo de caixa (por exemplo: mensal ou anual), com cada parcela, por exemplo mensal ou anual, convertida ao seu valor real, para uma mesma época (inicial) e em função de uma determinada taxa.

Considerando-se a convenção usual de se atribuir o sinal negativo às saídas de caixa e positivo às entradas, o valor atual de um fluxo líquido de caixa terá um sinal positivo se o valor das entradas superar o valor atual das saídas e negativo em caso contrário.

Caso o valor atual dos benefícios (entradas de caixa) supere o valor atual dos custos (saídas de caixa), isto significa que o projeto acarretará um benefício adicional à caixa da Empresa em relação àquele mesmo capital empregado à Taxa Mínima de Atratividade.

Pelo contrário, se o valor atual dos benefícios foi menor que o valor atual dos custos, isto significa que a realização do projeto acarretará menos benefícios à caixa da Empresa do que o emprego do Capital à Taxa Mínima de Atratividade.

(a) se VA > 0 aceitamos o projeto

(b) se VA > 0 rejeitamos o projeto

(c) se VA = 0 ficamos numa situação de indiferença.

<u>O Valor atual do fluxo de caixa, positivo ou negativo, não significa lucro ou prejuizo para empresa em termos absolutos, mas sim o diferencial de ganhos em relação à aplicação do capital à taxa mínima de atratividade de empresa.</u>

Um dos inconvenientes do uso deste método é de que para seu cálculo é necessário o conhecimento da taxa mínima de atratividade - da empresa.

Podemos usar, se necessário, diversas taxas de desconto para um mesmo projeto a fim de testar sua sensibilidade a variações dessas taxas.

Se houver divergência de investimentos devemos usar, também, o índice Valor Presente Líquido sobre investimentos inicial. Por exemplo:

	PROJETO X	PROJETO Y
Valor Presente das Receitas Líquidas	3.000.000	200.000
(-) Investimento Inicial	2.900.000	100.000
VALOR PRESENTE LÍQUIDO (VA)	100.000	100.000

Esses dois projetos à luz do critério do Valor Presente Líquido - poderiam ser considerados igualmente atrativos. Contudo, se o tomador de decisão estiver preocupado com limitações orçamentarias, ele provavelmente escolherá o projeto Y, pois com um pequeno investimento inicial ele obterá a mesma rentabilidade.

	PROJETO X	PROJETO Y
$\frac{\text{VALOR PRESENTE LÍQUIDO}}{\text{INVESTIMENTO}}$	$\frac{100.000}{3.000.000} = 0{,}03$	$\frac{100.000}{200.000} = 0{,}5$

Taxa Interna de Retorno de um Fluxo de Caixa (TRI)

É a rentabilidade que o Projeto apresenta para o capital que nele permanece.

Uma forma simples de se entender a TRI é a de considerar os investimentos realizados como "empréstimos" da Empresa ao Projeto e os resultados líquidos como "pagamentos" destes empréstimos pelo Projeto. De acordo com esta concepção, a TRI corresponderia à taxa -

de juros que o Projeto pagaria à empresa pelo empréstimo. Como o empréstimo é o capital aplicado, a TRI é, portanto, a taxa de juro recebida pelo capital empregado, ou seja, a sua rentabilidade.

A taxa de retôrno é um índice de economicidade da maior simpatia para os investidores, pela semelhança que apresenta com a maneira de avaliar os resultados de investimentos em letras de câmbio, - fundos de investimentos, empréstimos pessoais, etc., isto é, através de uma taxa de rendimento anual, semestral ou mensal. A taxa de retôrno é como que uma taxa de juros que o projeto "paga" pelo investimento nele "depositado".

A TRI deve ser comparada igualmente à taxa mínima de atratividade da Empresa. Se ela é maior ou igual a esta taxa, o Projeto pode - ser aceito, pois será uma opção melhor que as existentes. Se ela é menor, o Projeto deve ser recusado, pois a Empresa teria outras opções melhores de emprego de capital.

É um número admensional, permitindo ao administrador comparar projetos diferentes, sem maiores considerações sôbre os investimentos necessários ou sobre sua duração.

Cálculo da TRI

A taxa interna de retorno é a taxa de juros que iguala o valor de todas as entradas de caixa e de todas as saídas de caixa, quando esses valores são descontados e compostos em um determinado período de tempo.

Em outras palavras, deverá ser calculada uma taxa de desconto ou taxa de juros que equivalha trazer à época atual todos os pagamentos ou recebimentos futuros tornando nulo o valor atual residual.

O método de cálculo da TRI mais usual é o método das tentativas.
O procedimento é o seguinte:

Calcula-se o V.A. do fluxo para uma taxa. Se este valor for negativo, significa que para esta taxa os V.A. dos dispêndios ainda - são superiores ao V.A. dos ganhos. Portanto, tentamos taxas menores até haver uma troca de sinal no V.A. do fluxo, ou seja, ele se tornar positivo.

O valor da TRI, que é a taxa para o qual o valor atual é zero, é então interpolado entre os dois valores das taxas que ocacionaram a mudança de sinal.

Se o valor atual do fluxo da la. taxa for positivo, pocedemos do mesmo modo, mas aumentamos as taxas.

Exemplo:

Dado o fluxo de caixa de um determinado projeto cuja viabilidade econômica está sendo analisada, calcular a sua rentabilidade ou a taxa de retorno do empreendimento.

Ano	Fluxo de Caixa. C$	Desconto a 8% Fator S P $^1/_{1,08^n}$	Desconto a 8% Fluxo Caixa Descontado C$	Desconto a 10% Fator S P $^1/_{1,10^n}$	Desconto a 10% Fluxo Caixa Descontado C$
0	- 10.000	1,0000	- 10.000	1,0000	- 10.000
1	+ 800	0,92593	741	0,90909	727
2	+ 1.700	0,85734	1.457	0,82645	1.405
3	+ 1.300	0,79383	1.032	0,75131	977
4	+ 3.600	0,73503	2.646	0,68801	2.459
5	+ 3.000	0,68058	2.042	0,62092	1.863
6	+ 2.000	0,63017	1.260	0,56447	1.129
7	+ 1.800	0,58349	1.050	0,51316	924
8	+ 500	0,54027	270	0,46651	234
			$\sum$ = + 498		$\sum$ = - 282

Assim, por interpolação linear:

$$i = 8\% + \left[\frac{0 - 498}{-282 - 498}\right] (10\% - 8\%) =$$

$$\boxed{i = 9{,}27\%}$$

EXEMPLO DE CÁLCULO DA TRI

Fluxo de Caixa

C$ 1.000

ANO ITENS	1	2	3	4/12	13
1. RECEITA OPERACIONAL (VENDAS)				98.550	98.550
2. CUSTOS FIXOS				6.414	6.414
3. DEPRECIAÇÃO				20.000	20.000
4. CUSTOS VARIÁVEIS				24.968	24.968
5. LUCRO TRIBUTÁVEL				47.168	47.168
6. IMPOSTO DE RENDA (30%)				14.150	14.150
7. LUCRO LÍQUIDO				33.018	33.018
8. DEPRECIAÇÃO				20.000	20.000
9. CAIXA GERADO				53.018	53.018
10. APLICAÇÃO EM INVESTIMENTO FIXO	30.000	100.000	70.000		
11. APLICAÇÃO EM CAPITAL DE GIRO			11.280		(11.280)
12. TOTAL DAS APLICAÇÕES	30.000	100.000	81.280		
13. CAIXA LIQUIDO	(30.000)	(100.000)	(81.280)	53.018	64.298

TRI - 17,94%

Tempo de Retorno de Investimento (Pay-Back)

É um índice muito popular. Mede o tempo em que os fluxos líqui-/dos de caixa pagam os investimentos. Entretanto, despreza total--mente o que ocorre daí por diante.

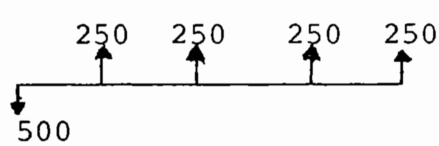
Seu uso, portanto, deve ser muito criterioso, podendo ser útil - quando analisado em conjunto com outros índices.

O tempo de retorno pode ser calculado levando-se ou não em conta o valor temporal do dinheiro.

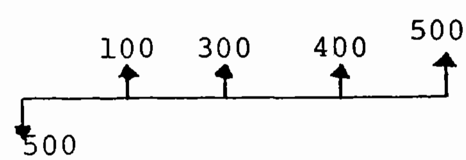
Entretanto, o fato de se levar em conta o valor temporal do dinheiro não acrescenta nenhuma melhoria no índice, que é intrinsecamente falho ao não levar em conta o que ocorre depois da recuperação do capital.

Exemplo:

(A)



(B)



TMA - 15%

TEMPO DE RETORNO (0%) =	TEMPO DE RETORNO (0%) =
2 anos	2,25 anos
TRI = 34,9%	TRI = 40,04%
VA (15%) = 214	VA = 363

Vemos, portanto, que o uso do tempo de retorno nos levaria a uma decisão errada, conforme todos os outros índices confirmam.

O uso do valor temporal do dinheiro não acrescentaria nada ao índice, como vemos a seguir.

Usaremos como taxa a TMA de 15%

(A)

	INVESTIMENTO	RECEITA	ACUMULADO
0	(500)	-	(500)
1	-	250	(325)
2	-	250	(123,75)
3	-	250	107,69

$$\text{Tempo de Retorno} = 2 + \frac{250 - 170,69}{250} = 2,57 \text{ anos}$$

(B)

	INVESTIMENTO	RECEITA	ACUMULADO
0	(500)	-	(500)
1	-	100	(475)
2	-	300	(246,25)
3	-	400	116,81

$$\text{Tempo de Retorno} = 2 + \frac{400 - 116{,}81}{400} = 2{,}71 \text{ anos}$$

ou seja, o uso do índice nos levará a conclusão errada, mesmo com o uso do valor temporal do dinheiro.

"Break Even Point" ou Ponto de Equilíbrio

Indica, simplesmente, para que nível de operação (ou quantidade - produzida) a receita se iguala às despesas. Em alguns casos, incluindo-se a depreciação (como recuperação de capital) nas despesas, indica o nível mínimo de operação para o qual o projeto apenas paga o capital envolvido. Pode ser útil tão somente para questões relacionadas com o dimensionamento de Projetos nos quais existem grandes dúvidas quanto o mercado esperado.

Não deve ser, portanto, indicativo da escolha de alternativas.

O ponto de equilíbrio pode ser determinado gráfica e algebricamente.

A determinação algébrica é feita pela comparação das equações de custo e receita.

CT = R (custo total = receita)

$$\begin{cases} CT = CF + X.CV \\ R = X.P \end{cases}$$

$$\begin{cases} CF & \text{- custo fixo} \\ CV & \text{- custo variável unitário} \\ P & \text{- preço unitário do produto (venda)} \\ X & \text{- quantidade produzida no ponto de equilíbrio.} \end{cases}$$

$$CF + X.CV = X.P$$

$$X = \frac{CF}{P - CV}$$

Conforme incluamos ou não no custo fixo a recuperação do capital, teremos o ponto de equilíbrio que permita a recuperação do capital ou apenas o ponto de equilíbrio operacional.

O principal objetivo deste método é determinar a mais baixa produção e mais baixo nível de preço para os quais a empresa pode - operar sem pôr em risco sua viabilidade financeira.

Consideremos uma planta com a capacidade de 150.000 unidades de bem x e cujo investimento foi de C$ 1,6 milhões.

Um estudo de mercado mostrou que a produção total pode ser vendida a C$ 25/unidade.

Nesta base as despesas de operação são:

custo fixo - $ 325.000
custo variável - $ 18/unidade
depreciação - $ 160.000

Determinemos o nível de produção de x para o qual as receitas são iguais aos custos totais.

Assim:

$$25\ X = 325.000 + 160.000 + 18\ X$$
$$X = 69.286 \text{ unidades}$$

Se o preço de venda cai, para uma produção de 150.000 unidades a empresa continuará a obter lucro até que o preço tenha um valor - determinado pela seguinte equação:

$$150.000\ P_m = 325.000 + 160.000 + 18 \times 150.000$$

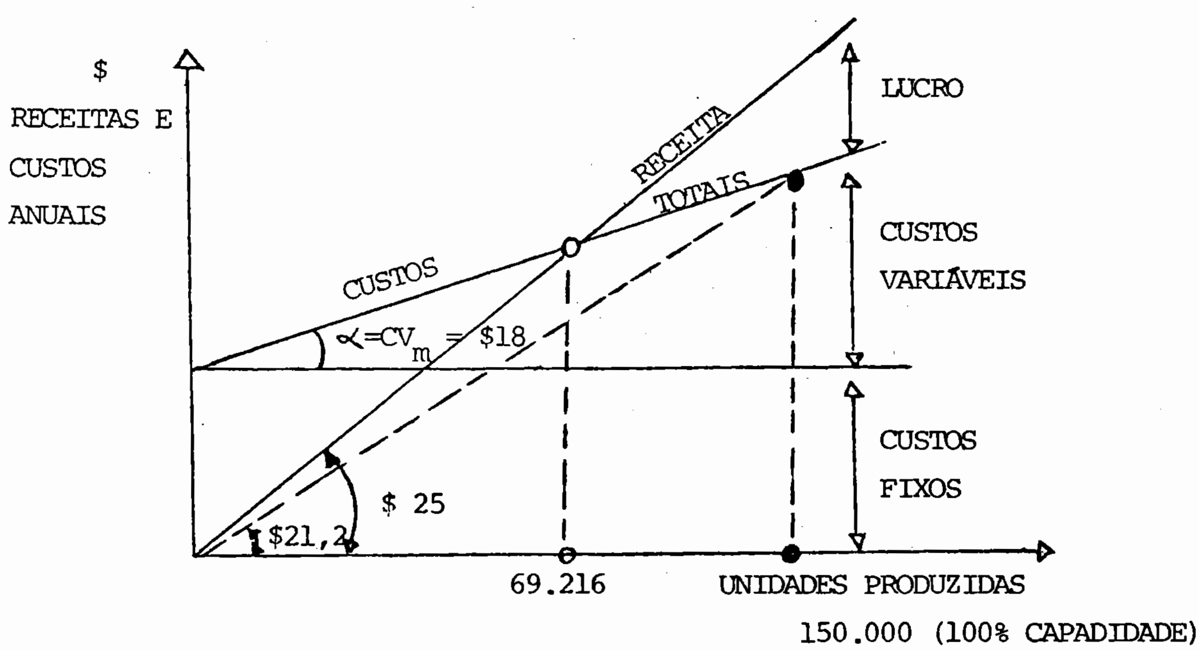
Assim:

$$P_m = \$\ 21.2$$

Desse modo, os seguintes resultados são obtidos:

1. O ponto de nivelamento corresponde a uma produção de 69.296 - unidade (46,2% capacidade).
2. O preço mínimo de venda para o qual a empresa não obtem nem lucro ou perda, é indicado pela inclinação da linha OA, isto é, \$ 21.2.

Determinação gráfica



RENTABILIDADE INTRÍNSECA DO PROJETO E RENTABILIDADE DO CAPITAL PRÓPRIO

Até o presente momento consideramos que os projetos serão realizados com a totalidade de seus gastos feitos pelo empreendedor.

As condições estudadas até agora independem de quem realiza o projeto. Verificamos a rentabilidade das quantias gastas em relação às quantias recebidas.

Estas condições são intrínsecas do projeto, que dependerão dos investimentos necessários, do mercado, do preço do produto e não de quem faz o projeto. A rentabilidade calculada neste caso é denominada "RENTABILIDADE INTRÍNSECA DO PROJETO", pois independentemente de qual empresa o realizará, com seu próprio capital, a rentabilidade do projeto não será alterada.

Estudaremos agora o efeito de possíveis empréstimos na viabilidade do Projeto.

Cada empreendedor tem um poder de empréstimo diferente. O uso deste poder de empréstimos para obtenção de financiamentos, poderá afetar a viabilidade do projeto em termos do empreendedor.

Esta viabilidade vai depender das proporções do empréstimo em relação ao investimento necessário e dos juros deste empréstimo.

A introdução de financiamento no Fluxo de Caixa provoca uma defasagem no desembolso (sob o ponto de vista do empresário), que tem influência decisiva na rentabilidade do projeto: se o custo do financiamento é menor que a TRI intrínseca do projeto, a rentabilidade aumenta.

O efeito do aumento de rentabilidade em consequência de financiamento é chamado ALAVANCAGEM ("LEVERAGE").

Tal conceito pode ser entendido com um exemplo: para uma determinada empresa, um dado projeto tem uma rentabilidade intrínseca de 15%. Entretanto, pode-se conseguir um empréstimo de 50% do investimento necessário a juros de 8%. Se calcularmos a rentabilidade do fluxo de caixa dos embolsos e desembolsos da empresa, descontado o que foi recebido de empréstimo e o que vai ser pago de juros e amortização, a rentabilidade do capital próprio poderia passar a ser, por exemplo, de 25%. De um modo geral, empréstimos tendem a melhorar bons empreendimentos e a piorar os maus.

Consideremos um empreendimento cujo investimento fixo seja C$ 100 milhões, os custos operacionais (fixos + variáveis) - C$ 25 milhões e a receita operacional C$ 50 milhões.

Analisando a viabilidade intrínseca do projeto numa vida econômica de 10 anos teríamos o seguinte fluxo e índices de avaliação:

FLUXO DE CAIXA		C$ 1.000
ano	0	1/10
1 - RECEITA OPERACIONAL		50.000
2 - CUSTOS OPERACIONAIS		(25.000)
3 - DEPRECIAÇÃO		(10.000)
4 - LUCRO TRIBUTÁVEL		(15.000)
5 - IMPOSTO DE RENDA		(4.500)
6 - LUCRO LÍQUIDO		10.500
7 - DEPRECIAÇÃO		10.000
8 - INVESTIMENTO FIXO	100.000	
9 - CAIXA LÍQUIDO	(100.000)	20.500

TRI = 21,23% (Rentabilidade intrínseca)

Consideremos agora o efeito de um empréstimo de C$ 80 milhões a juros de 10% ao ano. Amortização pelo SAC, sem carência. Pagamentos no início de cada ano.

Teríamos a seguir o fluxo de caixa mostrado a seguir:

FLUXO DE CAIXA COM EMPRÉSTIMO

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1 - RECEITA OPERACIONAL		50.000	50.000	50.000	50.000	50.000	50.000	50.000	50.000	50.000	50.000
2- CUSTOS OPERACIONAIS		(25.000)	(25.000)	(25.000)	(25.000)	(25.000)	(25.000)	(25.000)	(25.000)	(25.000)	(25.000)
3- DEPRECIAÇÃO		(10.000)	(10.000)	(10.000)	(10.000)	(10.000)	(10.000)	(10.000)	(10.000)	(10.000)	(10.000)
4- JUROS EMPRÉSTIMO		(8.000)	(7.200)	(6.400)	(5.600)	(4.800)	(4.100)	(3.200)	(2.400)	(1.600)	(800)
5- LUCRO TRIBUTÁVEL		7.000	7.800	8.600	9.400	10.200	11.000	11.800	12.600	13.400	14.200
6-IMPOSTO DE RENDA (3%)		(2.100)	(2.340)	(2.580)	(2.820)	(3.060)	(3.300)	(3.540)	(3.780)	(4.020)	(4.260)
7- LUCRO LÍQUIDO		4.900	5.460	6.020	6.580	7.140	7.700	8.260	8.820	9.380	9.940
8- DEPRECIAÇÃO		10.000	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000
9- AMORTIZAÇÃO EMPRÉSTIMO		(8.000)	(8.000)	(8.000)	(8.000)	(8.000)	(8.000)	(8.000)	(8.000)	(8.000)	(8.000)
10-INVESTIMENTO FIXO	(100.000)										
11- EMPRÉSTIMOS RECEBIDOS	80.000										
12- FLUXO CAPITAL PRÓPRIO	(20.000)	6.900	7.460	8.020	8.580	9.140	9.700	10.260	10.820	11.380	11.940

TRI = 39,09% (Rentabilidade do capital próprio)

Vemos,portanto, que o empréstimo produziu uma alavancagem na rentabilidade do projeto de 16% para 39%.

É claro que esta alavancagem dependeu da proporção do empréstimo e dos juros.

Se o empreendedor tivesse uma taxa mínima de atratividade (TMA) - de 20% ele não pensaria em fazer o projeto de usasse somente capital próprio (TRI - 16%) mas ficaria interessado caso conseguisse o empréstimo nas condições citadas, pois a rentabilidade de seu - capital próprio seria de 39%.

Entretanto, é muito perigoso raciocinar apenas com a rentabilidade do capital próprio, pois o poder de empréstimo poderia ser usado em um outro projeto de melhor rentabilidade intrínseca e haveria para o capital próprio uma alavancagem ainda mais vantajosa.

É errado comparar uma alternativa financiada com outra não financiada, sem procurar ver se é possível igualá-las quanto à obtenção de recursos.

ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DO PROJETO

Normalmente a avaliação econômica de um projeto é feita em um estágio preliminar, no qual os dados disponíveis são ainda bastantes precários e de baixa confiabilidade. Entretanto, será esta análise que dirá se o Projeto deverá ser feita ou não, muitas vezes de maneira irreversível.

Nesta fase, são normais imprecisões da ordem de 20/30% nos dados que servirão para o cálculo dos índices de avaliação.

A análise de sensibilidade estuda então a variação do índice escolhido para a avaliação do Projeto, em função dos parâmetros desse mesmo projeto.

Assim, considerando um projeto cuja estimativa de investimento tenha a precisão estimada em ± 20% do valor calculado que chamaremos investimento base.

A receita do Projeto por outro lado tem uma precisão, oriunda da imprecisão da estimativa do Mercado, de ± 30%.

O índice adotado no estudo foi a Taxa Interna de Retorno (TRI).

A TAXA MÍNIMA DE ATRATIVIDADE DA EMPRESA é de 15%.

Teríamos então o seguinte estudo de sensibilidade:

Variação da TRI com as variações do investimento, matendo as demais condições constantes:

Valor do Investimento		TRI
Investimento Básico	+ 20%	14%
Investimento Básico	+ 10%	16%
Investimento Básico		19%
Investimento Básico	- 10%	22%
Investimento Básico	- 20%	25%

Variação da TRI com as variações da Receita, mantendo as demais condições:

Valor da Receita		TRI
Receita Básica	+ 30%	28%
Receita Básica	+ 15%	24%
Receita Básica		19%
Receita Básica	- 15%	13%
Receita Básica	- 30%	7%

Variação da TRI para combinação das variações da Receita e Investimento.

ZONA DE REJEIÇÃO DO PROJETO

Invest.- / Receita	RB + 30%	RB + 15%	RB	RB - 15%	RB - 30%
IB + 20%	23%	19%	14%	9%	4%
IB + 10%	25%	21%	16%	11%	6%
IB	28%	24%	19%	13%	7%
IB - 10%	31%	27%	22%	16%	9%
IB - 20%	35%	30%	25%	19%	12%

Portanto, conforme os sentidos de variação dos parâmetros, nosso índice (TRI) variará de 4 a 35% por cento.

Examinando o quadro verificaremos que a sensibilidade da TRI é maior para as variações da Receita que do investimento. Portanto, será o caso de dedicarmos mais tempo (e dinheiro) ao estudo do mercado, para termos uma menor faixa de imprecisão na Receita.

Esta é a grande importância do estudo de sensibilidade do Projeto.

Portanto o estudo de sensibilidade dificilmente nos permitirá uma definição conclusiva sobre o Projeto, a não ser em casos especiais em que por exemplo a condição mais pessimista do Projeto supere a condição mínima exigida, o que nos permitirá dizer que em qualquer condição o projeto será rentável, ou, no extremo oposto, em que a condição mais otimista não atinja o limite mínimo, e assim o projeto será rejeitado tranquilamente.

Na maioria das vezes o estudo de sensibilidade é apresentado na forma de gráficos, como o mostrado pela figura.