UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

Controle de Qualidade
Volume 1
Estatística Básica

ARMANDO MOACYR GIORDANO PACHECO

SÃO CARLOS
1992

P117e2
V 1-2 1

CONTROLE DE QUALIDADE

VOLUME 1

ESTATÍSTICA BÁSICA

ARMANDO MOACYR GIORDANO PACHECO

ESTATÍSTICA BÁSICA

1. Probabilidade
   Introdução
   Frequência relativa
   Axiomas do cálculo de probabilidade
   Soma de probabilidades
   Produto de Probabilidades

2. Teorema de Bayes
   Probabilidades condicionais

3. Variável aleatória discreta
   Distribuição
   Função de probabilidade
   Representação gráfica

4. Parâmetros da distribuição
   Medidas de posição: média, mediana, moda
   Medidas de dispersão: variância, desvio padrão, amplitude, coeficiente de variação
   Momentos de uma distribuição
   Medidas de assimetria: coeficiente de assimetria
   Medidas de achatamento: coeficiente de curtose
   Quartis, Decis, Centis.

5. Distribuição Binomial
   Aplicação
   Probabilidade de concorrência
   Média e desvio padrão da distribuição

6. Distribuição de Poisson
   Aplicação
   Probabilidade de ocorrência
   Parâmetros da distribuição

7. Variável aleatória contínua
   Função de distribuição
   Função densidade de probabilidade
   Parâmetros da distribuição
   Distribuições de variável contínua: Uniforme, Exponencial,
   Weibull e outras.

8. Distribuição Normal
   Teorema do limite central
   Propriedades
   Tabela da distribuição nornal

9. Propagação de erros
   Variáveis envolvidas
   Função algébrica
   Função objetivo: conceituação da variável dependente e
   variáveis independentes
   Cálculo da média resultante
   Cálculo da variância resultante

1. ESTATÍSTICA BÁSICA

1.1. Introdução

A estatística pode ser considerada como um conjunto de métodos que possibilitam tomar decisões quando surgem incertezas devido à insuficiência ou instabilidade das informações disponíveis.

Na realidade pode ser mais do que isto. Deve fazer parte da formação de cada indivíduo, seja no cotidiano, seja na atividade profissional.

Vemos alguns exemplos:

- Suponhamos que uma amostra de tipo de aço, após ser submetida à testes de resistência, forneceu as seguintes tensões de ruptura para seus 8 elementos (em kg/mm^2): 52, 55, 57, 58, 60, 61, 64, 65.
  Pode-se concluir que o aço resiste a mais do que 50 kg/mm^2.
  Não, mas haverá uma certa probabilidade de que resista.
- Um aço tem resistência à fadiga, quando submetido a determinada situação, de 10^6 ciclos. Deseja-se testar se a adição de cromo aumenta a resistência à fadiga. Para isto, preparou-se uma amostra de peças com 2% de cromo. A resposta foi de 1,2 x 10^6 ciclos. Pode-se concluir que a adição de cromo aumentou a resistência à fadiga, ou este acréscimo é aleatório?
- O número de acidentes ocorridos na fábrica no mês passado foi 13. No mês seguinte foi implantado um estímulo à redução de acidentes. O número caiu para 10.
  O estímulo surgiu efeito?
- A resistência de uma liga pode depender de materiais A, B, C, D... N.
  É possível estabelecer-se uma função matemática do tipo Res = f(A, B, ... N) baseando-se apenas em resultados experimentais.

1.2. Probabilidade

Chamamos de frequência relativa ao quociente entre o número de valores particulares observados e o número total de valores observados.

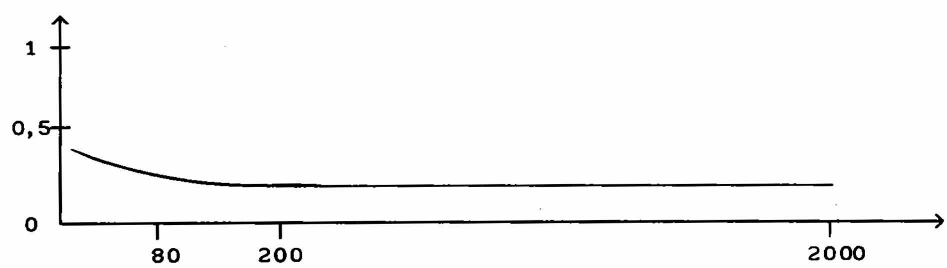
Admitamos a retirada de 20 peças de um lote de peças. Seja 5 o número de peças defeituosas encontradas. Então, a frequência relativa de defeituosos é: 5/20 = 0,25.

Fazendo nova retirada, de 200 elementos encontramos 20 defeituosos é: 20/200 = 0,1.

Em 2000, encontramos 220 defeituosos 220/2000 = 0,11.

Vemos, portanto, que a frequência relativa tende a um valor considerado verdadeiro.

Chamamos de probabilidade ao verdadeiro valor da frequência relativa.



É possível citarmos diversas definições de probabilidade:

- A probabilidade é um número entre 0 e 1, que exprime a expectativa do senso comum.
- Probabilidade é o quociente entre o número de eventos favoráveis e o número total de eventos.

Axiomas do cálculo de probabilidade. Todo o cálculo de probabilidade está baseado em 5 axiomas.

Para facilitar o entedimento dos axiomos, vamos indicar o valor das frequências relativas de um exemplo.

Seja um lote de n peças, que podem ter cada uma os defeitos A e/ou B.

Pode ocorrer:

$A\ \bar{B}$	: defeitos A em	n_1	provas
$\bar{A}\ B$	: defeitos B em	n_2	provas
$A\ B$	: defeitos A e B em	n_3	provas
$\bar{A}\ \bar{B}$	: defeitos em	n_4	provas
TOTAL		n	provas

Seja quando:

	B	$\bar{B}$	
A	n_3	n_1	$n_1 + n_3$
$\bar{A}$	n_2	n_4	$n_2 + n_4$
	$n_2 + n_3$	$n_1 + n_4$	

A frequência relativa dos defeitos tipo A, independente de B ter ocorrido, é:

$$f(A) = \frac{n_1 + n_3}{n}$$

A frequência relativa dos defeitos tipo B, independente de A ter ocorrido, é:

$$f(B) = \frac{n_2 + n_3}{n}$$

Seja (A + B) o evento: ocorrer o defeito A ou o defeito B, ou os 2 simultaneamento.

$$f(A + B) = \frac{n_1 + n_2 + n_3}{n}$$

seja (A . B) o evento: ocorrem os defeitos A e B simultaneamente.

$$f(A \,.\, B) = \frac{n_3}{n}$$

Frequência relativa de A nos casos em que B ocorreu:

$$f\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{n_3}{n_2 + n_3}$$

Frequência relativa de B nos casos em que A ocorreu:

$$f\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{n_3}{n_1 + n_3}$$

Vejamos as relações entre as frequências relativas:

$$f(A + B) = \frac{n_1 + n_2 + n_3}{n} = \frac{n_1 + n_3}{n} + \frac{n_2}{n} + \frac{n_3}{n} - \frac{n_3}{n} =$$

$$= f(A) + f(B) - f(A \,.\, B)$$

$$f(A \,.\, B) = \frac{n_3}{n} = \frac{n_1 + n_3}{n} \,.\, \frac{n_3}{n_1 + n_3} = f(A) \,.\, f\left(\frac{B}{A}\right)$$

Temos, então os Axiomas da probabilidade:

1. A probabilidade de um evento P é um número compreendido entre 0 e 1.

$$0 \leq P \leq 1$$

2. A probabilidade de um evento certo é igual a 1.

3. A probabilidade de um evento impossível é igual a 0.

4. A probabilidade de ocorrer ao menos um entre dois eventos é igual à soma das probabilidades de cada um dos dois enventos, menos a probabilidade de ambos ocorrerem simultaneamente:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A . B)$$

5. A probabilidade de dois eventos ocorrerem simultaneamente é igual ao produto da probabilidade de um evento pela probabilidade do outro, sob a condição do primeiro eventos já se ter realizado:

$$P(A . B) = P(A) . P\left(\frac{B}{A}\right) = P(B) . P\left(\frac{A}{B}\right)$$

Teoremas

Soma da probabilidades.

"Se dois eventos A e B são mutuamente exclusivos, a probabilidade de suceder um ou outro é a soma das probabilidade dos eventos ocorrerem separadamente".

Do 4o. axioma.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A . B)$$

Mas, pelo enunciado é impossível os dois eventos ocorrerem simultaneamente, logo:

$$P(A. B) = 0$$

ou

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Generalizando, para diversos eventos A, B, ... N, mutuamente exclusivos.

$$P(A + B, ... + N) = P(A) + P(B) + ... + P(N)$$

Exemplo: Seja A a ocorrência de peças boas e B a ocorrência de peça defeituosa.

É impossível ocorrer peça boa e defeituosa simultaneamente.

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Produto de probabilidades.

"Se dois eventos são independentes, a probabilidade de ocorrerem simultaneamente os dois eventos é o produto das probabilidades de ocorrerem isoladamente.

Se dois eventos são independentes, a probabilidade de ocorrer um dos eventos não depende do outro ter ou não ocorrido:

$$P\left(\frac{B}{A}\right) = P(B) \qquad \text{ou } P\left(\frac{A}{B}\right) = P(A)$$

logo, do 5o. axioma:

$$P(A \,.\, B) = P(A) \,.\, P\left(\frac{B}{A}\right) = P(A) \,.\, P(B)$$

Generalizando, pra N eventos independentes:

$$P(A \,.\, B \,...\, N) = P(A) \,.\, P(B) \,...\, P(N)$$

Exemplo: Seja A o evento altura do indivíduo ser superior a 1,70m.
Seja B o evento QI indivíduo ser superior a 110.
P(A . B) = Probabilidade de um indivíduo ter altura superior a 1,70 mm e QI superior a 110
P(A . B) = P(A) . P(B)
onde
P(A) = Probabilidade de um indivíduo ter altura superior a 1,70 m.
P(B) = Probabilidade de um indivíduo ter QI superior a 110.

1.3. Teorema de Bayes

Com a utilização deste teorema torna-se possível a resolução de problemas utilizando probabilidades condicionais.

Exemplos:

- Em uma caixa temos 100 moedas das quais 99 são perfeitas e 1 tem 2 caras. Tomando-se uma moeda ao acaso e jogando-se 10 vezes obtém-se 10 caras. Qual a probabilidade da moeda escolhida ter sido a falsa.
- Um carro pode parar por defeito elétrico ou mecânico. Se há defeito elétrico o carro para na proporção 1 para 6 e se é mecânico na proporção 1 para 21.

  Em 27% das viagens há defeitos elétrico e em 15% mecânico, não ocorrendo mais de um defeito na mesma viagem, igual ou de tipo diferente.

  Se o carro para, qual é a probabilidade de ser por defeito elétrico?

Tomemos o 5o. axioma:

$$P(A \, . \, B) = P(A) \, . \, P\left(\frac{B}{A}\right) = P(B) \, . \, P\left(\frac{A}{B}\right)$$

resultando para o teorema:

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A) \, . \, P\left(\frac{B}{A}\right)}{P(B)}$$

Se tivermos várias hipóteses A_1, A_2 ... A_n que concorram para explicar o evento B, hipóteses mutuamente exclusivas e tais que:

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$$

Podemos decompor P(B) em:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P\left(\frac{B}{A_1}\right) + P(A_2) \cdot P\left(\frac{B}{A_2}\right) + \ldots + P(A_n) \cdot P\left(\frac{B}{A_n}\right)$$

resultando para o teorema a forma:

$$P(A_r/B) = \frac{P(A_r) \cdot P(B/A_r)}{\sum_{i=1}^{i=n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)}$$

1.4. Variável aleatória discreta

Chamamos de variável aleatória x a uma variável que pode assumir valores reais x_i $(i = 1, 2, \ldots n)$, conforme ocorrer um dos eventos mutuamente exclusivos E_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ de probabilidade P_i $(i = 1, 2, \ldots n)$, de modo que:

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_n = 1$$

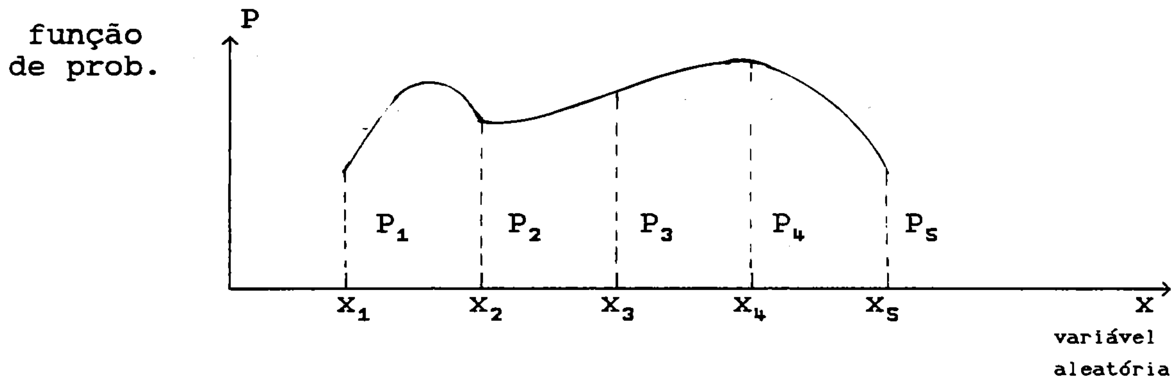
O conjunto de valores x_i associados às respectivas probabilidades contitui uma distribuição. A função que estabelece a correspondência entre P_i e x_i é a função de probabilidade.

Se a variável aleatória assumir um número finito de valores ou infinito numerável será chamada variável aleatória discreta.

Exemplo de infinito numerável: 1/2, 1/4, 1/8, ...

Representação gráfica.

Uma das maneiras de presentar as distribuições é por meio de gráficos cartesianos nos quais, em abcissas marca-se a variável aleatória e, em ordenadas a função de probabilidade.



$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 1$$

1.5. Parâmetros da distribuição

Uma distribuição só é conhecida exatamente quando é dada a função de probabilidade. Podemos, entretanto, representá-la sinteticamente utilizando alguns parâmetros característicos.

Temos parâmetros de posição, de dispersão, de assimetria e de achatamento. As medidas de posição e de dispersão servem para localizar as distribuições e caracterizar a forma das distribuições.

Medidas de posição

As medidas de posição servem para localizar a distribuição sobre o eixo da variável aleatória. Estudaremos 3 tipos de medida de posição: a média, a mediana e a moda.

A média e a mediana indicam, por critérios diferentes, o centro da distribuição. A moda indica a região de maior concentração de frequências.

Média

Trata-se da média aritmética de um conjunto de valores. É uma medida de tendência central, procurando representar o centro da distribuição.

Representamos a média verdadeira de um universo ou conjunto por μ, enquanto a sua estimativa é representada por $\bar{X}$.

Ssendo X_i a variável aleatória
P_i a probabilidade de ocorrer X_i,
f_i a frequência de X_i
n o número total de observações,

são expressões equivalentes.

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} = \sum X_i \; P_i = \sum \frac{X_i \; f_i}{\Sigma f_i} = \sum \frac{X_i \; f_i}{n}$$

As fórmulas para o cálculo de $\bar{X}$ são as mesmas.

Podemos introduzir simplificações no cálculo da média, quando os valores de X_i tiverem muitos alarismos ou casas decimais e forem agrupados em classes de igual amplitude. É a chamada condificação dos dados. Para isto usaremos as seguintes propriedades da média:

a) multiplicando-se todos os valores de uma variável por uma constante, a média do conjunto fica multiplicada por essa constante;
b) somando-se ou subtraindo-se uma constante a todos os valores de uma variável, a média do conjunto fica acrescida ou diminuída dessa constante.

O método de cálculo consiste em se aplicar aos valores X_i uma transformação do tipo:

$$d_i = \frac{X_i - X_o}{h}$$

onde X_o é um valor convenientemente escolhido entre os valores X_i (deve-se escolher para X_o o valor de X_i com maior frequência ou um valor central), e h é a amplitude das classe. Calcula-se a média $\bar{d}$ para os valores d_i e retorna-se ao valor de μ ou $\bar{X}$ pela expressão:

$$\bar{X} = \bar{d} \cdot h + X_o \quad \text{como} \quad \bar{d} = \frac{\Sigma fd}{\Sigma f} \quad \text{vem} \quad \bar{X} = \frac{\Sigma fd}{\Sigma f} \cdot h + X_o$$

A vantagem do processo é que se trabalha cem os valores d_i sempre inteiros e os menores possíveis, mesmo que os valores de X_i sejam difíceis de serem trabalhados.

Fazendo-se uma analogia com um sistema de forças ou massas a média correspondente ao centro de gravidade do sistema.

Mediana

A mediana é representada por D.

É uma medida de tendência central, procurando representar o centro da distribuição utilizando, porém, um critério diferente daquele utilizado pela média. O conceito da mediana é o de dividir o conjunto ordenado de valores em duas partes com igual número de elementos.

A mediana de um conjunto de n valores ordenados é:

- n impar; o valor de ordem $\frac{n + 1}{2}$
- n par; o valor médio entre os valores de ordem n/2 e (n/2) + 1.

Assim sendo, a mediana dos 7 valores é:

15 16 19 21 21 23 26

é 21

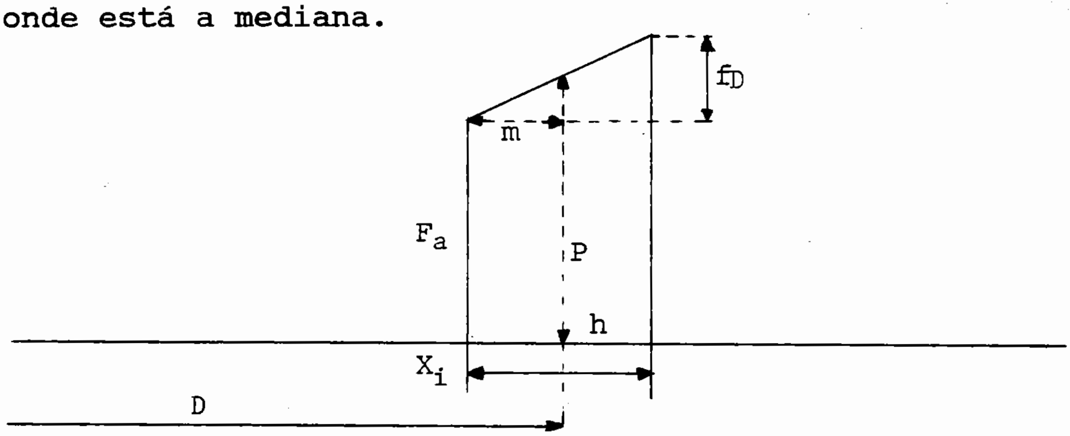
e a mediana dos valores

20 20 21 22 22 23

é 21,5.

Vejamos a expressão da mediana quando ocorre uma distribuição em classes de frequências.

Seja a parte gráfico de frequências acumuladas, onde está a mediana.



n = número total de elementos

$P = \frac{n}{2}$

X_i = valor inferior da classe que contém a mediana

h = intervalo da classe que contém a mediana

F_a = soma das frequências das classes anteriores à que contém a mediana

f_D = frequência da classe que contém a mediana.

Por semelhança de triângulos:

$$\frac{f_D}{h} = \frac{P - F_a}{m}$$

$$m = \frac{h\,(P - F_a)}{f_D}$$

Finalmente:

$$D = X_i + \frac{h\,(P - F_a)}{f_D}$$

A mediana deve ser usada para caracterizar o centro do conjunto de valores quando não se quer sofrer a influência de valores extremos.

Exemplos:

- Em um ensaio de tração quer-se saber a deformação permanente após a retirada da força. Neste caso, não há como considerar no cálculo da média, a deformação das peças que romperam.
  A mediana exprime de modo conveniente a posição central da distribuição de deformação permanente.
- A profundidade média de um rio pode ter menor importância do que a mediana para efeitos de cálculo de navegabilidade.

Conceitualmente a mediana é o valor de variável aleatória que divide a área sob a distribuição em duas partes iguais.

Quartis, decis e centis

Os quartis são valores da variável aleatória que separam a distribuição de frequências em 4 grupos de 25% cada. Os decis separam em 10 grupos de 10% cada e os centis em 100 grupos de 1% cada.

As fórmulas são as mesmas que foram usadas no cálculo da mediana, alterando-se apenas o valor de P.

Assim, para o

1o. quartil	P = N/4
3o. quartil	P = 3N/4
1o. decil	P = N/10
2o. decil	P = 2N/10
87o. centil	P = 87N/100

Moda

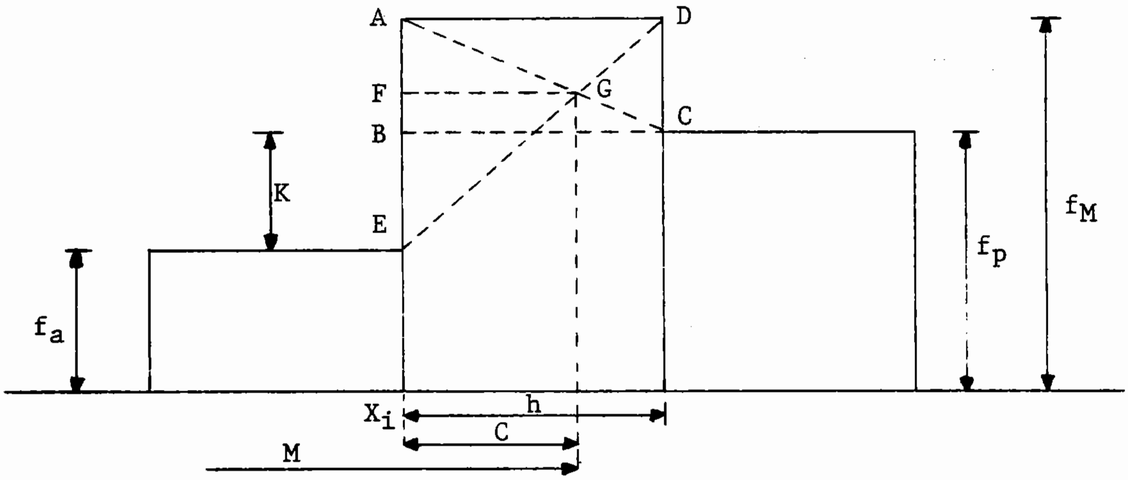
Representa-se por M.

É uma medida de posição, indicando a região das máximas frequências.

É, pois, o valor da viriável aleatória cuja frequência seja máxima. É possível, portanto, termos mais de uma moda.

No caso de distribuições de frequências em classes de mesma amplitude, é possível definirmos a classe modal e, dentro dela, um valor da variável como sendo a moda.

A expressão que desenvolveremos está baseada no conceito de que a abcissa da moda é a abcissa da interseção das retas confomes indicadas.



A moda é:

$$M = X_i + c$$

Calculemos o valor de c.

O triângulo ABC é semelhante ao Δ AFG.

$$\frac{h}{c} = \frac{f_M - f_p}{f_M - f_a - k}$$

$$c = \frac{h\,(f_M - f_a - k)}{f_M - f_p} \qquad (1)$$

O triângulo ADE é semelhante ao Δ FGE:

$$\frac{f_M - f_a}{k} = \frac{h}{c}$$

$$k = \frac{c\,(f_M - f_a)}{h} \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1):

$$c = h \left[f_M - f_a - \frac{c\,(f_M - f_a)}{h} \right]$$

$$f_m - f_p$$

$$c = \frac{h\,(f_M - f_a) - c\,(f_M - f_a)}{f_M - f_p}$$

$$c \left(1 + \frac{f_M - f_a}{f_M - f_p} \right) = \frac{h\,(f_M - f_a)}{f_M - f_p}$$

$$c\,(2f_m - f_a - f_p) = h\,(f_M - f_a)$$

$$c = \frac{h\,(f_M - f_a)}{2f_M - f_a - f_p}$$

Finalmente:

$$M = X_i + \frac{h\,(f_M - f_a)}{2f_M - f_a - f_p}$$

onde:

X_i = valor inferior da classe que contém a moda;

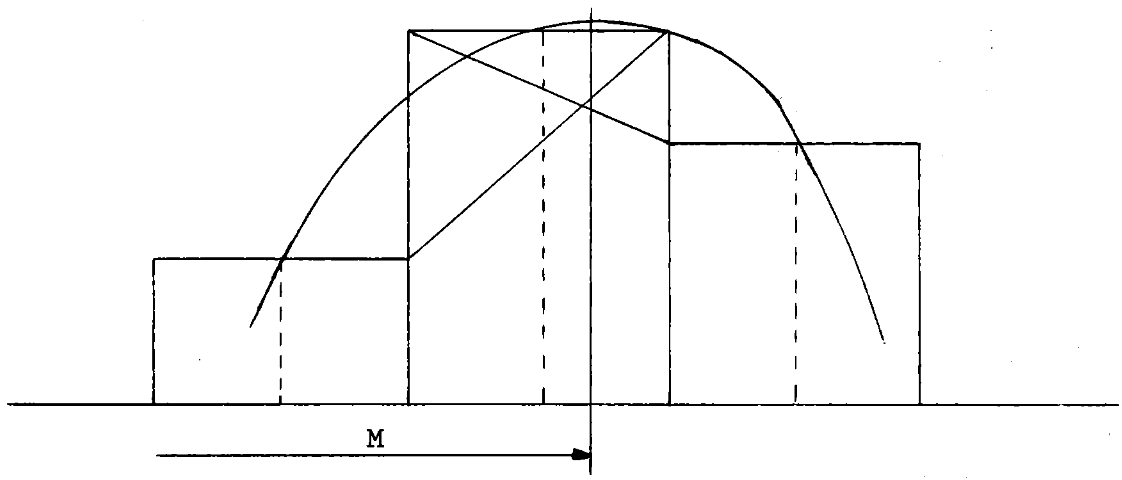
h = Intervalo da classe que contém a moda;

f_M = frequência da classe que contém a moda;

f_a = frequência da classe anterior à moda;

f_p = frequência da classe posterior à moda.

A expressão da moda, baseada no conceito de que a moda é o ponto cuja abcissa é o máximo da parábola que passa pelo ponto médio das 3 classes, modal, anterior e posterior leva ao mesmo resultado.

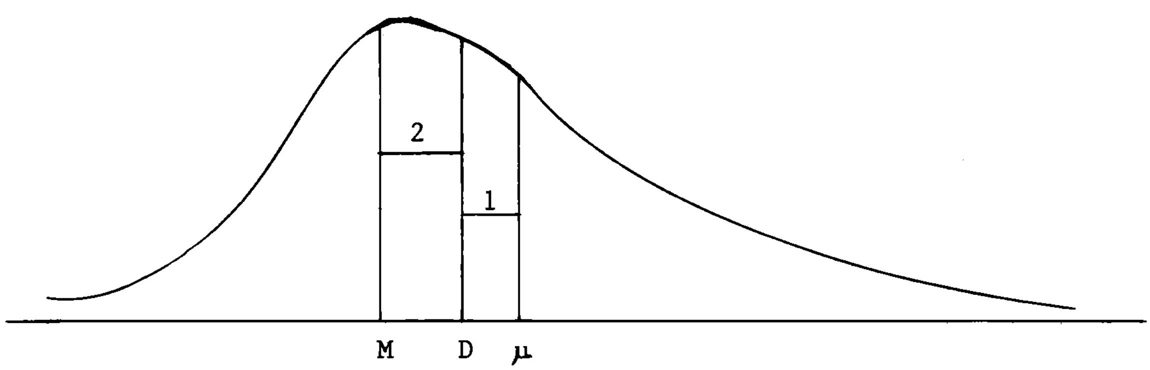


Relação entre média, mediana e moda.

Entre os 3 valores existe a relação empírica:

$$\mu - M = 3\ (\mu - D)$$

Esta relação indica que a mediana situa-se entre a média e a moda sendo que sua distância à moda é o dobro de sua distância à média.



ou seja:

$$\mu - M = 3\mu - 3D$$
$$D - M = 2\mu - 2D$$
$$D - M = 2(\mu - D)$$

Medidas de dispersão

As medidas de dispersão tem por finalidade indicar a variabilidade da distribuição, pois pode existir duas distribuições com mesma medida de posição e seus valores podem se apresentar com diferentes afastamentos em relação à região central. Caracterizam, portanto, o grau de variação existente no conjunto de valores.

Apresentaremos as medidas de dispersão: amplitude, variância, desvio padrão e o coeficiente de variação.

Variância

A variância de um universo é representado por σ^2, enquanto sua estimativa é s_x^2.

É a média dos quadrados das diferenças dos valores em relação à sua média.

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}{n}$$

ou, se os dados estiverem agrupados em uma tabela de frequências:

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 f_i}{n}$$

ou, como $P_i = \frac{f_i}{n}$

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 P_i$$

Podemos modificar a expressão, evitando o cálculo de $(x_i - \mu)$, já que este valor é normalmente fracionário, dificultando o cálculo manual.

De fato,

$$\sum (x - \mu)^2 = \sum (x^2 - 2\mu x + \mu^2) = \sum x^2 - 2\mu \sum x + \sum \mu^2 =$$

$$\sum x^2 - 2 \cdot \frac{\sum x}{n} \cdot \sum x + n \cdot \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2 = \sum x^2 - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2$$

portanto,

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}}{n}$$

que é, também:

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \mu^2$$

ou, se os dados estiverem agrupados:

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum x^2 f_i - \frac{(\sum x f_i)^2}{n}}{n}$$

ou

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum x^2 f_i}{n} - \mu^2$$

Como foi feito no caso da média, podemos usar a codificação dos dados.

Usaremos as seguintes propriedades da variância:

a) multiplicando-se todos os valores de uma variável por uma constante, a variância do conjunto fica multplicada pelo quadrado dessa constante;
b) Somando-se ou subtraindo-se uma constante a todos os valores de uma variável, a variância não se altera.

A mudança de variável é feita concomitantemente ao cálculo da média. Assim sendo, a mudança é a mesma:

$$d_i = \frac{x_i - x_o}{h}$$

Após calcular-se a variância σ_d^2 para os valores d_i, retorna-se ao valor de σ_x^2 pela expressão:

$$\sigma_x^2 = \sigma_d^2 \cdot h^2$$

como

$$\sigma_d^2 = \frac{\sum d_f^2 - \frac{(\sum d_f)^2}{n}}{n}$$

vem

$$\sigma_x^2 = \left[\frac{\sum d_f^2 - \frac{(\sum d_f)^2}{n}}{n} \right] h^2$$

Estimativa da virância

No cálculo da estimativa da variância, s_x^2, para a formação dos desvios em relação à média do conjunto, pode ser utilizado $(x - \mu)$ onde μ é a média verdadeira ou $(x - \bar{x})$ onde $\bar{x}$ é a média estimada.

No caso de se usar a média verdadeira ou quando todos os valores do conjunto são utilizados, a expressão da variância s_x^2 é a mesma de σ_x^2.

Entretanto, quando se observar uma amostra e for utilizado $\bar{x}$ e não μ, as expressões devem ser modificadas.

No denominador das expressões, deve-se substituir n por n - 1, isto é:

$$s_x^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}$$

$$s_x^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 f_i}{n - 1}$$

$$s_x^2 = \frac{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}}{n - 1}$$

$$s_x^2 = \frac{\sum x^2 f_i - \frac{(\sum x f_i)^2}{n}}{n - 1}$$

$$s_x^2 = \left[\frac{\sum d_f^2 - \frac{(\sum d_f)^2}{n}}{n - 1} \right] h^2$$

Demonstração de:

$$s_x^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Seja a expressão da variância:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \mu)^2}{n}$$

Vamos somar e subtrair $\bar{x}$ no numerador:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x} + \bar{x} - \mu)^2}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 + \sum (\bar{x} - \mu)^2 \; 2(\bar{x} - \mu) \sum (x - \bar{x})}{n}$$

mas,

$$\sum (x - \bar{x}) = 0$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n} + \frac{\sum (\bar{x} - \mu)^2}{n}$$

mas,

$\frac{\sum (\bar{x} - \mu)^2}{n}$ é a variância de $\bar{x}$: $\sigma^2_{\bar{x}}$

Sendo $\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2_x}{n}$

vem:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n} + \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\sigma^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}$$

As expressões $\sigma^2 = \frac{\sum (x - \mu)^2}{n}$ e $s^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}$ poderiam ser generalizadas se considerarmos que a variância é a soma dos desvios quadráticos de todos os valores em relação à média, dividido pelo número de graus de liberdade ϕ.

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{\phi}$$

De fato, no caso de $(x - \bar{x})$ perde-se um grau de liberdade ao se calcular os desvios em relação a um valor extraído dos próprios elementos.

Isto é, dado x_1, x_2 ... x_{n-1} e $\bar{x}$, o último valor x_n é obtido pela expressão:

$$x_n = n\,\bar{x} - x_1 - x_2 - \ldots - x_{n-1}$$

pois

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Ainda como conceito, fazendo-se analogia com um sistema de forças, a variância é o momento de inércia das forças em relação a um eixo vertical que passa pelo centro de gravidae.

Desvio padrão

O desvio padrão é a raiz quadrada positiva da variância. Portanto, representa-se por σ ou s, conforme seja o valor verdadeiro ou sua estimativa. As fórmulas para seu cálculo são evidentemente as que foram usadas no cálculo da variância.

Como o desvio padrão se expressa pela mesma unidade da variável aleatória, tem maior interesse nas aplicações.

Amplitude

É representada por R.

É definida como a diferença entre o maior e o menor valor da amostra ou conjunto de dados.

$$R = X_{máx} - X_{min}$$

A amplitude é uma medida de dispersão.

A amplitude de uma amostra, por depender de apenas 2 valores do conjunto de dados, contém pouca informação quanto à dispersão. Entretanto, se o número de amostras aumenta, a amplitude média $\bar{R}$ passa a refletir a variabilidade com suficiente precisão.

Em virtude disto, é bastante usada no controle estatístico do processo de fabricação, em Controle de Qualidade.

Há uma relação matemática entre a aplitude média $\bar{R}$ e o desvio padrão σ de um universo.

Seja a observação de N amostras com n elementos cada.

As amplitudes das N amostras são: $R_1, R_2, \ldots, R_n$

A amplitude média é:

$$\bar{R} = \frac{\sum R_i}{n}$$

e a relação entre σ e $\bar{R}$, é:

$$\sigma = \frac{\bar{R}}{d_n}$$

onde d_n, é variável e depende exclusivamente do número n de elementos que compõe a amostra.

A tabela a seguir representa os valores de d_n, em função de n.

Tabela de d_n
Valores dos coeficientes da amplitude

n	d_n	n	d_n
2	1,128	20	3,735
3	1,693	22	3,819
4	2,059	24	3,895
5	2,326	26	3,964
6	2,534	28	4,027
7	2,704	30	4,086
8	2,847	32	4,139
9	2,970	34	4,189
10	2,078	36	4,236
11	3,173	38	4,280
12	3,258	40	4,322
13	3,336	50	4,498
14	3,407		
15	3,472		
16	3,532		
17	3,588		
18	3,640		
19	3,689		

Coeficiente de variação

É representado por cv.

É definido como o quociente entre o desvio padrão e a média. Pode ser expresso em porcentagem:

$$cv_x = \frac{\delta_x}{\bar{x}}$$

Seu uso torna-se interessante pois exprime a variabilidade em relação ao seu valor médio.

É um número adimensional e, portanto, seu valor independe da unidade de medida da variável analisada.

Momentos de uma distribuição

Definimos o momento de ordem t de um conjunto de dados com:

$$M_t = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^t}{}$$

Definimos como momento de ordem t centrado a uma constante a, como:

$$M_t^a = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^t}{n}$$

Tem especial interesse o momento centrado em relação à média.

$$m_t = \frac{\sum (x_i - \mu)^t}{n}$$

Se quisermos considerar as frequências dos diversos valores existentes, temos:

$$M_t = \frac{\sum x_i^t \cdot f_i}{n}$$

$$M_t^a = \frac{\sum (x_i - a)^t f_i}{n}$$

$$m_t = \frac{\sum (x_i - \mu)^t f_i}{n}$$

Pode-se notar que

$M_1 = \mu$
$m_1 = 0$
$m_2 = \sigma^2$

A expressão de m_3, é:

$$m_3 = \frac{\sum (x - \mu)^3}{n} = \frac{\sum x^3 - 3\mu \sum x^2 + 3\mu^2 \sum x + \sum \mu^3}{n} =$$

$$= \frac{\sum x^3}{n} - 3\,\mu\,\frac{\sum x^2}{n} + 3\,\mu^2 \,.\, \mu + \frac{n\,\mu^3}{n} =$$

$$= \frac{\sum x^3}{n} - 3\mu\,\frac{\sum x^2}{n} + 2\mu^3$$

A de m_4 é:

$$m_4 = \frac{\sum (x - \mu)^4}{n} = \frac{\sum x^4 - 4\mu \sum x^3 + 6\mu^2 \sum x^2 - 4\mu^3 \sum x + \sum \mu^4}{n} =$$

$$= \frac{\sum x^4}{n} - 4\mu\,\frac{\sum x^3}{n} + 6\mu^2\,\frac{\sum x^2}{n} - 4\mu^3 \,.\, \mu + \frac{n\,\mu^4}{n} =$$

$$= \frac{\sum x^4}{n} - 4\mu\,\frac{\sum x^3}{n} + 6\mu^2\,\frac{\sum x^2}{n} - 3\mu^4$$

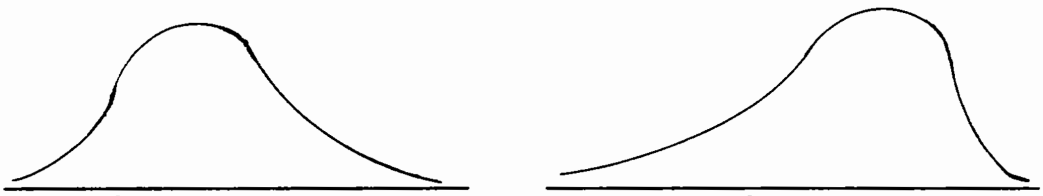
Se houver frequências a considerar, as expressões se tornam:

$$m_3 = \frac{\sum x^3 f_i}{n} - 3\mu\,\frac{\sum x^2 f_i}{n} + 2\,\mu^3$$

$$m_4 = \frac{\sum x^4 f_i}{n} - 4\mu\,\frac{\sum x^3 f_i}{n} + 6\mu^2\,\frac{\sum x^2 f_i}{n} - 3\mu^4$$

Medidas de assimetria

Estes parâmetros tem por finalidade caracterizar se a distribuição deixa de ser simétrica e de que lado ela se alonga. As distribuições alongadas à direita são assimétricas positivas e as alongadas à esquerda são assimétricas negativas, como indicado.



Assimétrica positiva   Assimétrica negativa

A assimetria é medida pelo coeficiente de assimetria α_3, obtido pelo quociente de m_3, pelo cubo do desvio padrão. Este coeficiente é adimensional e indica o sentido da assimetria. Para efetuar o seu cálculo pode ser utilizado os dados codificados, simplificando bastante o trabalho.

A mudança de variável não altera o resultado de a_3, pois o numerador e o denominador são afetados igualmente.

$$\alpha_3 = \frac{m_3}{\sigma^2}$$

Para uma distribuição simétrica $\alpha_3 = 0$.

Existem outras medidas de assimetria, tal como o índice de assimetria de Pearson como sendo:

$$a_1 = \frac{\mu - M}{\sigma}$$

ou

$$a_2 = \frac{3(\mu - D)}{\sigma}$$

já que $\mu - M = 3(\mu - D)$

Para distribuições simétricas $a_1 = 0$. Entretanto, quando $|a_1| < 0,15$ a distribuição é considerada praticamente simétrica. Se $0,15 < |a_1| < 1$ a assimetria é moderada e se $|a_1| > 1$ é forte.

Medidas de achatamento

Representa-se por α_4.

Essas medidas procuram caracterizar a forma da distribuição quanto a seu achatamento. A distribuição que serve de comparação é a distribuição normal.

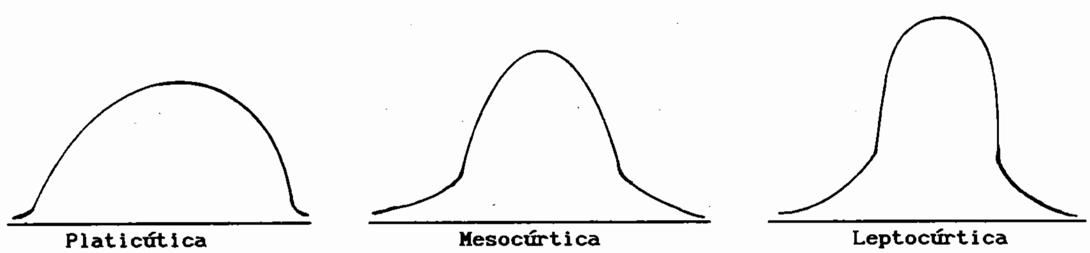
Para que tenha sentido a caracterização do achatamento, é preciso que a distribuição seja praticamente simétrica.

O achatamento é medido pelo coeficiente de curtose α_4, definido pelo quociente do momento centrado de quarta ordem pelo quadrado da variância.

$$\alpha_4 = \frac{m_4}{\sigma^4}$$

Esse coeficiente é adimensional, sendo menor que 3 para as distribuições platicúrticas, mais achatadas que a normal, igual a 3 para uma distribuição mesocúrtica, com achatamento normal, é maior do que 3 para distribuições leptocúrticas, menos achatadas que a normal.

O cálculo de α_4 pode ser feito utilizando os dados codificados, sem que seu valor seja afetado.



Distribuições de variável discreta

As distribuições de frequências apresentadas foram obtidas a partir de observações extensivas a todos os dados.

Entretanto, é possível, partindo de certas hipóteses gerais, deduzir matematicamente qual deve ser a distribuição de frequências de certos universos. Estas distribuições são chamadas teóricas.

Duas distribuições de variável aleatória discreta são importantes, e portanto, serão estudadas detalhadamente: a distribuição Binomial e a distribuição de Poisson.

1.5. Distribuição Binominal

Seja um experimento tal que:

a) São realizadas n ensaios independentes;
b) Em cada ensaio pode ocorrer o sucesso com probabilidade p, ou insucesso com probabilidade q = 1-p;
c) A probabilidade p de sucesso em cada ensaio é constante, logo q também é constante.

Seja x o número de resultados farováveis em n ensaios. Logo, x é uma variável aleatória discreta que pode assumir valores inteiros de 0 a n.

Assim sendo, x tem distribuição binomial com parâmetros n e p.

Exemplos de distribuição Binominal.

- A distribuição do número de peças defeituosas em uma amostra.

A amostra poderá ter 0, 1, 2 ... n peças defeituosas, associando-se a cada número de peças defeituosas uma probabilidade de ocorrência:

- A distribuição do número de filhos homens de casais com n filhos
- A distribuição do número de equipamentos parados em uma fábrica

- O número de ônibus em manutenção em uma frota de ônibus
- A distribuição do número de empresas com lucro acima de determinado valor.
- A distribuição de número de válvulas fluxíveis funcionando simultaneamente.

Probabilidade P_x de ocorrer x.

Vamos estabelecer a expressão da probabilidade P_x de ocorrer o valor da variável aleatória x.

Vamos desenvolver a expressão utilizando um exemplo.

Sejá o cálculo da probabilidade de ocorrer exatamente 2 peças defeituosas em uma amostra de 5 peças. Admitamos que a máquina produza com probabilidade p = 0,1 de uma peça ser defeituosa.

A ocorrência de 2 peças defeituosas em 5, pode ser satisfeita do seguinte modo:

B B D D D

com probabilidade:

$$0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}9 \times 0{,}9 \times 0{,}9$$

Entretanto, podemos obter outras ordens, com mesma probabilidade. Esse número é:

$P_5^{2,3}$ ou C_5^2 ou C_5^3

Logo, a probabilidade é:

$$P_2 = C_5^2 \cdot (0{,}1)^2 \cdot (0{,}9)^3$$

ou, generalizando:

$$P_x = C_n^x \; p^x \; q^{(n-x)}$$

que é a expressão da probabilidade de ocorrer, x vezes em n ensaios, na distribuição Binominal.

Média e desvio padrão

As expressões gerais da média e da variância são:

$$\mu = \sum x \, P_x$$

$$\sigma^2 = \sum (x - \mu)^2 \, P_x$$

Introduzindo o valor:

$$P_x = C_n^x \; p^x \, q^{(n-x)}$$

resulta, após transformações:

$$\mu = np$$
$$\sigma^2 = npq$$

Demonstração da expressão da média $\mu = \sum x \, P_x$

mas

$$P_x = C_n^x \; p^x \, q^{(n-x)}$$

substituindo

$$\mu = \sum x \frac{n!}{x! \, (n-x)!} \; p^x \, q^{(n-x)}$$

$$\mu = \sum x \frac{n(n-1)!}{x(x-1)! \, (n-1-x+1)!} \, p.p^{(x-1)} \; . \; q^{(n-1-x+1)}$$

$$\mu = np \left[\sum \frac{(n-1)!}{(x-1)!\,[(n-1)-(x-1)]!}\, p^{(x-1)} \right]$$

$$\mu = np \left[C_{n-1}^{x-1} \;.\; p^{(x-1)} \;.\; q^{[(n-1)-(x-1)]} \right]$$

A expressão entre colchetes é igual a 1, pois é o desenvolvimento do bionômio.

$$(p + q)^{n-1} = 1$$

logo

$$\mu = np$$

Demonstração da expressão do desvio padrão:

$$\sigma^2 = \sum (x-\mu)^2 \; P_x$$

$$\sigma^2 \sum (x^2 - 2\mu x + \mu^2)\; P_x = \sum x^2\; P_x - 2\mu \sum x\; P_x + \mu^2 \sum P_x$$

como

$$\mu = np \qquad \sum x\; P_x = \mu \qquad \sum P_x = 1$$

vem:

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \sum x^2\; P_x - 2np\;.\;np + (np)^2 = \\
&= \sum x^2\; P_x - n^2\; p^2 = \\
&= \sum (x^2 - x + x)\; P_x - n^2\; p^2 = \\
&= \sum [x\;(x-1) + x]\; P_x - n^2\; p^2 = \\
&= \sum x\;(x-1)\; P_x + \sum x\; P_x - n^2\; p^2 = \\
&= \sum x\;(x-1)\; \frac{n!}{x!\;(n-x)!}\; p^x\; q^{(n-x)} + np - n^2\; p^2 = \\
&= \sum \frac{x\;(x-1)\;\; n\;(n-1)\;\;(n-2)!}{x(x-1)(x-2)!\;\;[(n-2)-(x-2)]!}\; p^2\; p^{(x-2)} \quad q^{[(n-2)-(x-2)]} + \\
&\quad + np - n^2\; p^2 =
\end{aligned}$$

$$= n(n-1)\ p^2 \sum \frac{(n-2)!}{(x-2)!\ [(n-2)-(x-2)]!}\ p^{(x-2)}\ q^{[(n-2)-(x-2)]} +$$

$$+ np - n^2\ p^2$$

A expressão do $\sum$ é igual a 1, pois é o desenvolvimento do binômio.

$$(p + q)^{n-2} = 1$$

Logo:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= n(n-1)\ p^2 + np - n^2\ p^2 \\ &= n^2\ p^2 - np^2 + np - n^2\ p^2 \\ &= np - np^2 \\ &= np\ (1 - p) \\ \sigma^2 &= npq \end{aligned}$$

1.6. Distribuição de Poisson

É uma distribuição de variável aleatória discreta.

É um caso particular da distribuição binomial, quando o número n de observações tende a infinita e a probabilidade p de ocorrer o evento em uma única prova tende a 0, permanecendo finito e não nulo o produto $\mu = np$, média da distribuição.

Exemplos:

- número de funcionários ausentes diariamente em uma fábrica.

A probabilidade de um funcionário faltar é pequena, mas o número de funcionários é grande, de modo que poderão ocorrer faltas.

- número de carros alugados diariamente por uma loja locadora de veículos.

- número de pessoas em um elevador.
- número de falhas em uma chapa de metal.
- procura de um item de estoque.
- número de máquinas avariadas.
- número de operários com certa doença profissional.

É a chamada distribuição dos eventos raros. Apesar de ser difícil a ocorrência de um evento raro, sempre ocorrerão alguns, devido ao número elevado de provas ou tentativas.

Probabilidade de ocorrência

A expressão da probabilidade na Poisson é obtida a partir da expressão da probabilidade na binomial, já que é um caso particular.

Na binomial, a probabilidade é:

$$P_x = C_n^x \; p^x \; q^{(n-x)}$$

$$P_x = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} \; p^x \; q^{(n-x)} =$$

$$= \frac{n(n-1)\;\ldots\;(n-x+1)\;(n-x)!}{x!\;(n-x)!} \cdot \frac{n^x}{n^x} \cdot p^x\,(1-p)^{(n-x)} =$$

$$= \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \ldots \frac{(n-x+1)}{n} \; \frac{(np)^x}{x!} \left(1 - \frac{np}{n}\right)^n \left(1 - \frac{np}{n}\right)^{-x} =$$

$$= \frac{n}{n} \; \frac{n-1}{n} \ldots \frac{(n-x+1)}{n} \; \frac{\mu^x}{x!} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{-x}$$

passando ao limite quando $n \longrightarrow \infty$, temos a probabilidade na distribuição de Poisson:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P_x = 1 \cdot \frac{1 - \frac{1}{n}}{1} \ldots \frac{\left(1 - \frac{x}{n} + \frac{1}{n}\right)}{1} \; \frac{\mu^x}{x!} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{-x}$$

$$P_x = \frac{\mu^x \, e^{-\mu}}{x!} \quad \text{pois} \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n = e^{-\mu}$$

Fórmula de recorrência

Pode-se deduzir uma fórmula para P_x em função de P_{x-1}.

Para x = 0

$$P_0 = \frac{\mu^0 . e^{-\mu}}{0!} = e^{-\mu}$$

Para x = 1

$$P_1 = \frac{\mu^1 . e^{-\mu}}{1!} = \mu . e^{-\mu} = \mu . P_o$$

x = 2

$$P_2 = \frac{\mu^2 e^{-\mu}}{2!} = \frac{\mu}{2} . \mu e^{-\mu} = \frac{\mu}{2} P_1$$

x = 3

$$P_3 = \frac{\mu \quad e^{-\mu}}{3!} = \frac{\mu}{3} . \frac{\mu^2 e^{-\mu}}{2!} = \frac{\mu}{3} P_2$$

x = x-1

$$P_{x-1} = \frac{\mu^{(x-1)} e^{-\mu}}{(x-1)!}$$

x = x

$$P_x = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} = \frac{\mu}{x} \frac{. \mu^{(x-1)} e^{-\mu}}{(x-1)!} = \frac{\mu}{x} P_{x-1}$$

$$P_x = \frac{\mu}{x} P_{x-1}$$

Há inúmeras tabelas de P_x e $\sum_{o}^{x} P_x$ em função de μ.

1.7. Variável aleatória contínua

As variáveis aleatórias contínuas são definidas no campo dos números reais, isto é, a variável aleatória pode assumir qualquer valor intermediário entre 2 valores.

Exemplos:

- Dimensão de um produto industrial;
- Resistência do aço;
- Vazão de um rio;
- Altura de um conjunto de pessoas;
- Idade das pessoas;
- Duração de uma lâmpada;
- Lucro de uma empresa
- Densidade de um metal.

Um produto industrial pode ter dimensão 45,6, 45,7 ou 45,8. Neste caso, apenas para efeito de registro podemos anotar a medida aproximada para a primeira casa decimal, pois para efeitos práticos, pode não interessar a medida exata.

No caso da variável contínua, a função de probabilidade definida para variável discreta não pode ser utilizada para representar a distribuição, pois a probabilidade de termos um produto industrial com exatamente 50 mm de comprimento é nula, apesar do evento não ser impossível.

Nestas condições, definimos uma nova função, chamada Função de distribuição.

Função de distribuição

Função de distribuição de uma variável aleatória x no ponto x_i, é igual à probabilidade de x ser igual ou menor do que x_i. Representa-se por $F(x_i)$.

$$F(x_i) = P(x \leq x_i)$$

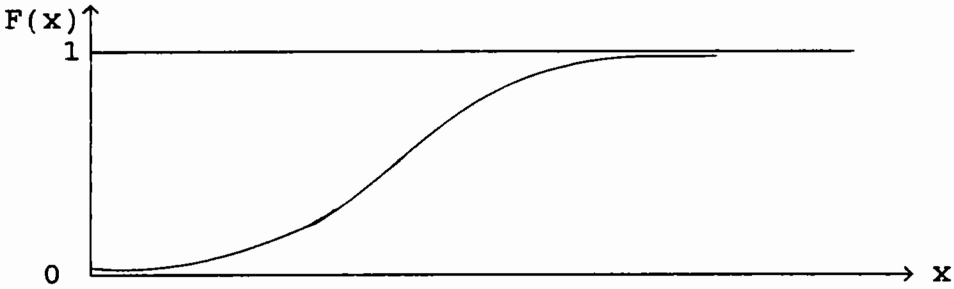
Propriedades:

1 - $0 \leq F(x) \leq 1$ pois $F(x)$ é uma probabilidade

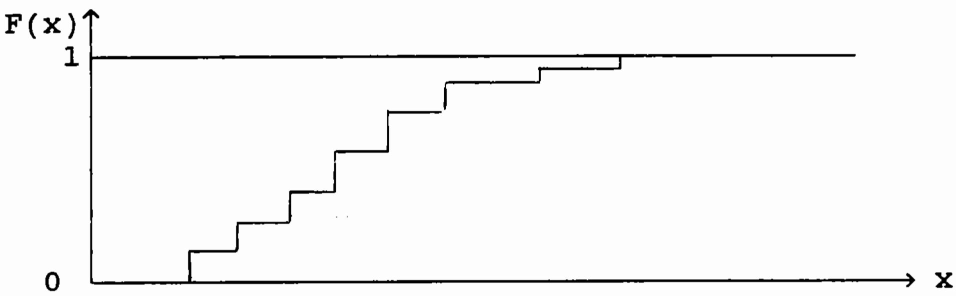
2 - Se $x_2 > x_1$, então $F(x_2) \geq F(x_1)$ pois $F(x)$ é uma função monótona não decrescente.

3 - $P(a < x \leq b) = F(b) - F(a)$

Representação gráfica



O conceito de função de distribuição também pode ser aplicado a variáveis discretas. Neste caso, a representação gráfica torna-se do seguinte tipo:



Densidade de Probabilidade

A probabilidade de uma variável contínua compreendida no intervalo (a, b), depende da:

- concentração de probabilidade no intervalo $P(a < x$ e $b)$ e da
- extensão do intervalo $(b - a)$

Sendo $P(a < x < b) = F(b) - F(a)$, a densidade de probabilidade no intervalo é expressa por:

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

Para termos a densidade de probabilidade em um ponto, passemos ao limite:

$$\lim \frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(a)$$

A derivada da função de distribuição é denominada densidade de probabilidade e é representada por $f(x)$.

$$F'(x) = f(x)$$

Propriedades

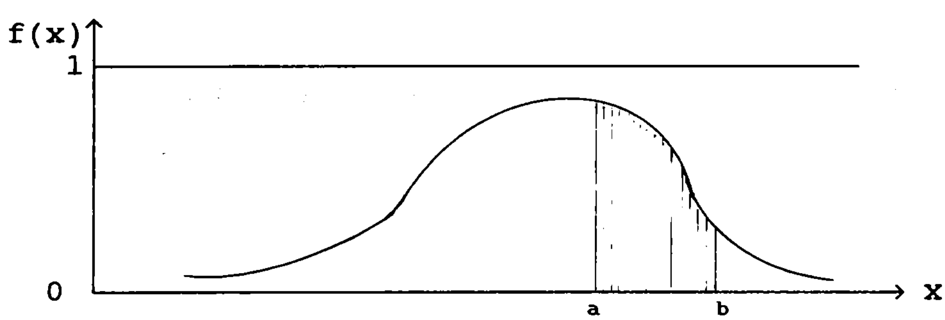
- $f(x) = F'(x) \geq 0$
  pois $F(x)$ é monótona não decrescente

- $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$

- $P(a < x < b) = \int_{a}^{b} f(x)\, dx$

Representação gráfica



A representação gráfica é chamada também de histograma.

$P(a < x < b)$ = Ärea hachurada na figura

Parâmetros da distribuição

As expressões dos parâmetros para variável contínua podem ser obtidos das expressões correspondentes para variável discreta, subtituindo:

- $P(x)$ por $f(x)\,dx$

- Σ por $\int$

Temos, então:

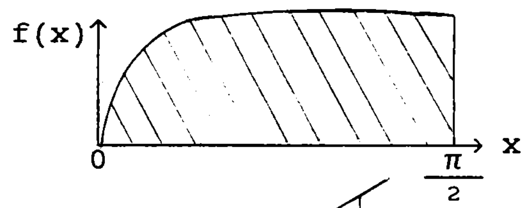
Variável	Discreta	Contínua
Função de distr.	$F(x) = \sum_{-\infty}^{x} P(x)$	$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$
Média	$\mu = \sum_{-\infty}^{+\infty} x\,P(x)$	$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx$
Variância	$\sigma^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2\,P_x$	$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2\,f(x)\,dx$

Distribuição de variável contínua

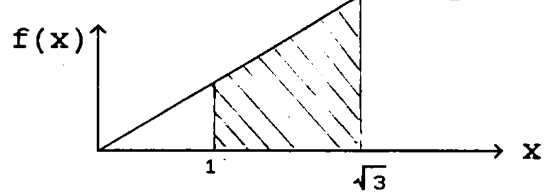
Qualquer função $f(x)$ pode ser uma distribuição desde que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1$

Exemplos:

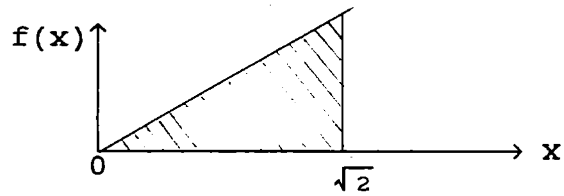
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen } x \, dx$$



$$\int_1^{\sqrt{3}} x \, dx$$



$$\int_1^{\sqrt{2}} x \, dx$$



Existem, entretanto, funções importantes e bem caracterizadas, pois ocorrem em situações de interesse. Vamos citar algumas:

- distribuição uniforme ou retangular;
- distribuição exponencial;
- distribuição de weibull;
- distribuição normal.

Distribuição uniforme

Nesta distribuição a probabilidade está igualmente distribuída em um intervalo $[a, b]$.

A função densidade de probabilidade é:

$$f(x) = \frac{1}{b - a} \qquad \text{para } a \leq x \leq b$$

$$f(x) = 0 \qquad \text{para qualquer outro valor}$$

Pode-se mostrar que:

$$\mu(x) = \frac{a + b}{2}$$

$$\sigma^2 (x) = \frac{(b - a)^2}{12}$$

Distribuição exponencial

É muita utilizada em Teoria das Filas e em Confiabilidade de Sistemas.

A função densidade de probabilidade é:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad \text{para } x \geq 0$$

$$f(x) = 0 \qquad \text{para } x < 0$$

Pode-se mostrar que:

$$\mu(x) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\sigma^2 (x) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Seu gráfico é:

Distribuição de Weibull

É usada em Confiabilidade de Sistemas quando a taxa de falhas λ da distribuição exponencial não é constante.

Sua expressão é:

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^{b}}$$

e exprime a confiabilidade de um sistema ou componente no instante t.

1.8. Distribuição normal

O teorema do limite central afirma que, em condições bastante gerais, uma variável aleatória resultante de uma soma de **n** variáveis aleatórias independentes, no limite, qunado **n** tende ao infinito, tem uma distribuição dada pela densidade de probabilidade.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Essa distribuição é frequentemente encontrada e denomina-se distribuição normal.

Exemplos:

- distribuição das dimensões de um produto industrial fabricado sob controle;
- distribuição das resistência de corpos de prova de um lote de aço;
- distribuição do teor de carbono de uma corrida de aço;
- distribuição dos pesos reais de pacotes de café de 500 g.

Cada uma dessa distribuições depende de um número considerável de variáveis independentes, cada uma delas contribuindo para a distribuição final.

Propriedades

vamos encontrar a derivada primeira e a derivada segunda da distribuição nornal.

$$f'(x) = f(x)\left(\frac{-2(x-\mu)}{2\,\sigma^2}\right) = f(x)\left(\frac{\mu-x}{\sigma^2}\right)$$

$$f''(x) = f(x)\left(-\frac{1}{\sigma^2}\right) + \left(\frac{\mu-x}{\sigma^2}\right) f(x)\left(\frac{\mu-x}{\sigma^2}\right) =$$

$$= f(x)\left[\left(\frac{\mu-x}{\sigma^2}\right)^2 - \frac{1}{\sigma^2}\right]$$

Conclusão

1. A distribuição é simétrica em relação a μ, pois $f(x-\mu) = f(\mu-x)$
2. A moda da distribuição é igual a μ, pois:
   $f'(x=\mu) = 0$
   e $f''(x=\mu) < 0$
3. Para $x = \pm\,\infty$, a curva admite assíntotas horizontais, pois:
   $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$
4. Para $x = \mu \pm \sigma$, a curva admite pontos de inflexão, pois:
   $f''(x = \mu \pm \sigma) = 0$

O gráfico da distribuição é o seguinte:

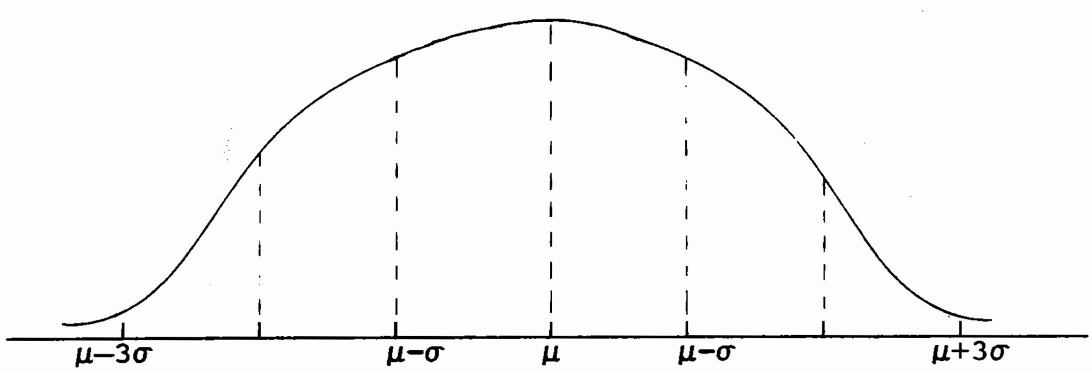


Tabela da distribuição normal

A função de distribuição normal é dada por:

$$F(x) = \frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

O valor dessa função depende de x, μ e σ, o que torna o tabelamento impossível de ser feito, dado o número de combinações possíveis.

Para contornar essa dificuldade, fazemos a mudança de variável.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

sendo $dz = \frac{dx}{\sigma}$

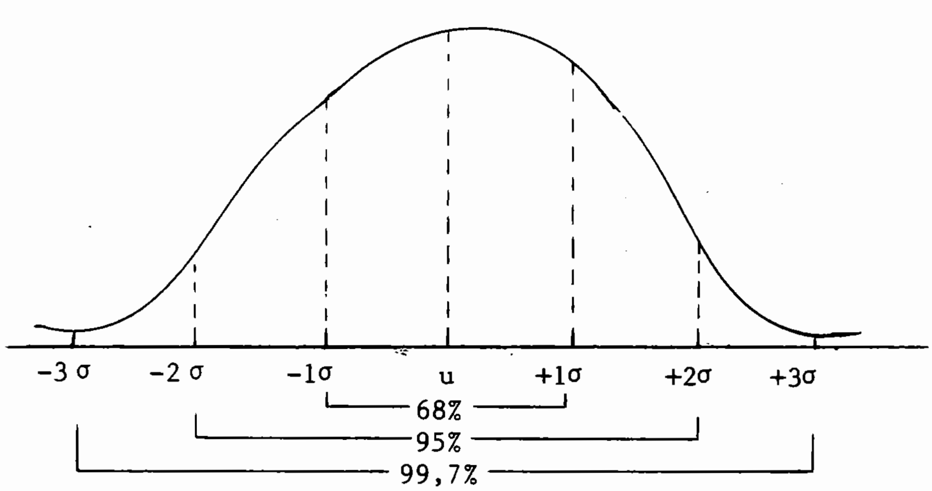
vem

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

que depende apenas de z, permitindo a costrução de uma tabela simples, que dá a probabilidade da variável assumir qualquer valor, de $-\infty$ até z.

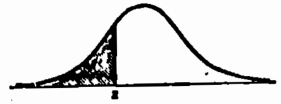
A tabela seguinte apresenta os valores F(z), desde $-\infty$ até z.

Convém notar as probabilidades em torno da média para $\pm\sigma$; $\pm 2\sigma$ e $\pm 3\sigma$.



Valores da distribuição normal padrão

$$N(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du = P(Z \leq z)$$



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
−3.	.0013	.0010	.0007	.0005	.0003	.0002	.0002	.0001	.0001	.0000
−2.9	.0019	.0018	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
−2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
−2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
−2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
−2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
−2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
−2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
−2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0126	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
−2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
−2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
−1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0238	.0233
−1.8	.0359	.0352	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0300	.0294
−1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
−1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
−1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0570	.0559
−1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0722	.0708	.0694	.0681
−1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
−1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
−1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
−1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
− .9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
− .8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
− .7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2297	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
− .6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	2578	.2546	.2514	.2483	.2451
− .5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
− .4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
− .3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	3557	3520	.3483
− .2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	3897	.3859
− .1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	4286	.4247
− .0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

Obs.: Se a variável aleatória X não é padrão seus valores deverão ser padronizados:

$$Z = \frac{(X - \mu)}{\sigma} \quad \text{isto é} \quad P(X \leq x) = N\left\{\frac{x-\mu}{\sigma}\right\}$$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.5517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9278	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9430	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9648	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9700	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9762	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9874	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.	.9987	.9990	.9993	.9995	.9997	.9998	.9998	9999	9999	1.0000

1.9. Propagação de erros

O cálculo da propagação de erros é feito tomando-se como base o seguinte teorema:

Se y é uma função de $x_1, x_2 \ldots x_n$

$$y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

a média de y é obtida substituindo-se na função todas as variáveis pelas médias respectivas, isto é:

$$\mu(y) = f\ [\mu(x_1),\ \mu(x_2) \ldots \mu(x_n)\ ]$$

Para a obtenção da variância de y é necessário que as variáveis do segundo membro sejam independentes entre si.

Nesta condições, a variância de y é o somatório dos produtos das derivadas parciais em relação a cada uma das variáveis do segundo membro, ao quadrado, pelas variâncias das variáveis em relação às quais se derivou. Após a derivação todas as variáveis são subtituídas pelas médias respectivas.

$$\sigma^2\, y = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\sigma f}{\sigma x_1} \right)^2_{x_i = \mu_i} .\ \sigma^2\,(x_i) \qquad \text{ou}$$

$$\sigma^2\, y = \left(\frac{\sigma f}{\sigma x_1}\right)^2_{x_i = \mu_i} \sigma^2_{x_1} + \left(\frac{\sigma f}{\sigma x_2}\right)^2_{x_i = \mu_i} \sigma^2_{x_2} + \ldots + \left(\frac{\sigma f}{\sigma x_1}\right)^n_{x_i = x_i} \sigma^2_{x_n}$$

A questão da independência entre as variáveis do 2o. membro, deve ser observada com muito cuidado e é exatamente neste aspecto que torna difícil a aplicação. Antes da derivação deve-se verificar se esta condição foi atendida. Convém observar, também, que a propagação de erros se dá sempre no sentido de aumentar o erro ou variância da variável dependente.

Exemplo:

Seja x o comprimento de uma peça produzida em série, com média μ_x e desvio padrão σ_x. Pretende-se montar a variável y, colocando-se 2 peças x em série. Deseja-se conhecer as características de y, isto é, μy e σy.

A função que representa a situação é $y = x + x$ ou $y = x_1 + x_2$.

Não é correto $y = 2x$ pois levaria a dobrar o erro cometido em x, não havendo possibilidade de compensação. Há necessidade de independência entre as variáveis x_1 e x_2.

Assim sendo:

$y = x + x$

$\mu y = \mu x + \mu x = 2\ \mu x$

$$\sigma^2 y = \left(\frac{\sigma y}{\sigma x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\sigma y}{\sigma x}\right)^2 \sigma_x^2 = 1^2 \cdot \sigma_x^2 + 1^2\ \sigma_x^2$$

$$\sigma_y^2 = 2\ \sigma_x^2$$

$$\sigma_y = \sqrt{2}\ \sigma_x$$