



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

ESTÁTICA DE ESTAQUEAMENTOS

FREDERICO SCHIEL

SÃO CARLOS
2021

FREDERICO SCHIEL



ESTÁTICA

DE

ESTAQUEAMENTOS

ERRATA

página 47

$$T_{z, a, b}^{tr} = \begin{vmatrix} 1 & +y_0'' & -x_0'' \\ 0 & \cos\psi & -\text{sen}\psi \\ 0 & \text{sen}\psi & \cos\psi \end{vmatrix}$$

$$v_z = v_z'' + y_0'' v_a'' - x_0'' v_b''$$

página 98

$$\delta_{11} = \frac{1}{S_{cc}} + \frac{l}{3EJ} = \frac{1}{0,04E} + \frac{5,60}{3 \times 0,173E} = \frac{35,8}{E}$$

$$x_1 = \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{12300}{35,8} = 344 \text{ tm}$$

$$R_x = 400 + \frac{344}{5,6} = 461 \text{ t}$$

$$R_c = 400 \times 1,22 - 344 = 144 \text{ tm}$$

$$N_{\frac{1}{2}} = \frac{461}{5} + \frac{144}{2,03} \times 0,52 = 92,2 + 37,0 = 129,2 \text{ t}$$

$$N_{\frac{4}{5}} = \frac{461}{5} - \frac{144}{2,03} \times 0,78 = 92,2 - 55,3 = 36,9 \text{ t}$$

página 136

$$n \cong \frac{1}{A} \left(\frac{V}{\cos\alpha} + \frac{H_y^-}{\text{sen}\alpha_y} + \frac{H_z}{\text{sen}\alpha_z} \right) \dots\dots\dots (110)$$

PREFÁCIO

O projeto dum estaqueamento requer raciocínios de mecânica dos solos e de estática. Para o conhecimento da parte do problema referente aos solos, basta consultar qualquer livro clássico dessa especialidade técnica, que contém sempre um capítulo destinado ao estudo da capacidade das estacas. Quanto à parte estrutural, baseia-se ainda hoje sobre os trabalhos de OSTENFELD (1921) e principalmente sobre o famoso livro de NØKKENTVED (1924). Modernamente foi o assunto retomado por ASPLUND (1947,1955) e HRENNIKOFF (1949), mas parece que esses estudos ainda não tiveram muita repercussão na prática.

O presente trabalho trata apenas da parte estática do problema, considerando dadas as capacidades das estacas. Procurei atender aos interesses do projetista prático organizando um formulário dos casos mais freqüentes de estaqueamentos planos, uma série de exemplos numéricos que podem servir como modelo de cálculo, e uma tabela trigonométrica no fim do livro.

É costume mencionar-se no prefácio as partes originais da publicação, o que é difícil no caso presente. Para que scubesse, por exemplo, o que há de novo na minha exposição dos eixos centrais e elásticos, seria necessário um conhecimento perfeito da literatura sobre ligações elásticas, que, sinceramente, não possuo. (De fato, um estaqueamento liga elásticamente o bloco com a terra). Em compensação, posso apresentar como prováveis novidades o "vetor de influência", o "método das estacas equivalentes" para grupos de estacas, o "cálculo plástico" (capacidade em lugar de carga admissível), o estudo do "cavalete" mais econômico, e o projeto gráfico dum estaqueamento plano sem tração.

Quero agradecer ao meu assistente, eng^o Lauro Modesto dos Santos, pelo seu auxílio incansável no próprio manuscrito e no cálculo dos exemplos numéricos. Agradeço também ao diretor da nossa Escola, Prof. Theodoretto de A. Souto, pelo apoio moral e material desta publicação.

São Carlos, agosto de 1957

Frederico Schiel

ÍNDICE

1. <u>Introdução</u>	1
1.1. Generalidades	1
1.2. Influência da rigidez estrutural	2
2. <u>0 Estaqueamento Geral</u>	5
2.1. Geometria do estaqueamento	5
2.2. Rigidez da estaca	8
2.3. Componentes de carga externa	9
2.4. Componentes do vetor da estaca	10
2.5. Movimento elástico do bloco	11
2.6. Rigidez do estaqueamento	13
2.7. Determinação das forças nas estacas	16
3. <u>Mudança do Sistema de Coordenadas</u>	21
3.1. Introdução	21
3.2. Tensor de transformação	24
3.3. Direções principais, eixos centrais e elásticos	29
4. <u>0 Estaqueamento Não Geral</u>	38
4.1. Generalidades	38
4.2. Estaqueamento simétrico a um plano	39
4.3. Estaqueamentos planos	47
4.4. Dois planos de simetria	56
4.5. Estaqueamentos com um eixo de simetria	59
4.6. Estaqueamentos com tôdas as estacas paralelas	61
5. <u>Processos Especiais de Cálculo de Estaqueamento</u>	63
5.1. 0 método de estacas equivalentes	63
5.2. Processos de iteração	67
5.2.1. Iteração do "excesso de carga"	67
5.2.2. Adição de estacas fictícias segundo ASPLUND.	69
5.2.3. Iteração das equações de equilíbrio	72
5.3. Estacas engastadas, tubulões.	72
5.3.1. Teoria geral	72
5.3.2. Processos aproximados	79
5.3.3. Cavalete plano carregado no seu plano	79
5.3.4. Estaqueamentos com tôdas as estacas paralelas	83

5.3.5. Estaqueamentos com estacas paralelas a um plano	86
5.4. Cálculos segundo a capacidade	87
5.4.1. Teoria geral	87
5.4.2. Casos simples de solução direta	90
5.4.3. Estaqueamentos com plano de simetria carregados neste plano	91
5.4.4. O conjunto dos valores da capacidade	94
5.5. Estaqueamento com apoios adicionais	95
5.5.1. Sistemas isostáticos	95
5.5.2. Sistemas hiperestáticos	96
6. <u>Exemplos Numéricos</u>	100
1º Exemplo	100
2º Exemplo	107
3º Exemplo	112
4º Exemplo	113
5º Exemplo	116
6º Exemplo	120
7. <u>O Projeto do Estaqueamento</u>	126
7.1. Generalidades	126
7.2. Cavalete	128
7.3. Carregamento dado por forças e momentos	136
7.4. Estaqueamento sem tração	139
Tabelas Trigonômicas	141

BIBLIOGRAFIA

- GULLANDER, P., Bidrag till teorien för grundpålningar, Tekn. Tidskrift, 1902, p. V 51.
- WESTERGAARD, H.M., The resistance of a group of piles, I. Western Soc. Eng. Dec. 1917.
- OSIENFELD, A., Beregning av Paleverker, Dansk Tekn. T. 1921, N^o 1 (em alemão no Beton und Eisen, 1922).
- NØKKENTVED, CHR., Beregning av Paleverker, Copenhagen, 1924 (em alemão: Berechnung von Pfahlrosten, Berlin 1928; o capítulo sobre estaqueamentos espaciais falta na edição alemã).
- HRENNIKOFF, A., Analysis of pile foundations with batter piles Am. Soc. of Civ. Eng. Proceedings, Febr. 1949, p. 185-208.
- COSTA NUNES, A.J., Projeto das fundações em estacas. Revista Politécnica, n^o 149.
- AGATZ, A. em SCHLEICHER, Taschenbuch für Bauingenieure, II, 1955. p. 141-163.
- ASPLUND, S.O., A study of three - dimensional pile - groups. Ass. Int. Ponts Charp., Zurique, 1947, vol. 8, p. 1-16.
- ASPLUND, S.O., Generalized elastic theory for pile-groups, Ass. Int. Ponts Charp. 1955.
- ZIMIRSKI, F., Berechnung von Pfahlrostverstärkungen nach Nøkkentved, Beton und Stahlbetonbau, 1956, p. 62-63.

I. INTRODUÇÃO

I.1. Generalidades

A finalidade das fundações em estacas ou tubulões é transmitir as cargas da construção às camadas profundas do solo. Predomina, geralmente, nos tubulões e nas estacas de compressão, a resistência de ponta; estacas de tração resistem somente devido ao atrito lateral.

Além da força axial, também podem as estacas, e principalmente os tubulões, receber forças transversais e momentos. A força transversal é transmitida em grande parte ao solo das camadas superiores, que são, em geral, mais fracas. Para que o estaqueamento possa receber momentos, deve ser previsto, por meios construtivos, um engastamento dos topos superiores das estacas ou dos tubulões, além de um eventual engaste das pontas no solo.

No caso de estacas, o diâmetro é, geralmente, uma pequena fração do comprimento. Em consequência, a estaca é muito menos resistente a forças transversais e a momentos do que a forças axiais. Felizmente, existe a mesma relação quanto à rigidez longitudinal ou transversal. Resulta daí que força transversal e momento desempenham papel secundário sempre que houver uma disposição do estaqueamento que permita a transmissão do carregamento externo apenas por forças axiais nas estacas (analogia com o caso das treliças, nas quais predominam também as forças normais, apesar de não haver articulação nos nós).

Este paralelismo entre resistência e rigidez, pelo qual super-solicitações dos pontos fracos são automaticamente impedidos pode ser chamado de "inteligência do material". A sua eficiência pode ser naturalmente impedida pela falta da mesma no engenheiro projetista, como mostra a figura 1. O ponto de interseção dos eixos das estacas foi escolhido na altura da resultante do vento. Para forças quaisquer aplicadas neste ponto (supostas paralelas ao plano do desenho), as estacas podem ser consideradas articuladas como indica a fig. 1b), obtendo-se as reações por simples decomposição da carga. Mas "o vento assopra onde quer, e ouve a sua voz;

porém não sabes d'onde vem nem para onde vae". A menor variação da altura h destrõe o equilíbrio no sistema b), isto é, a) não pode

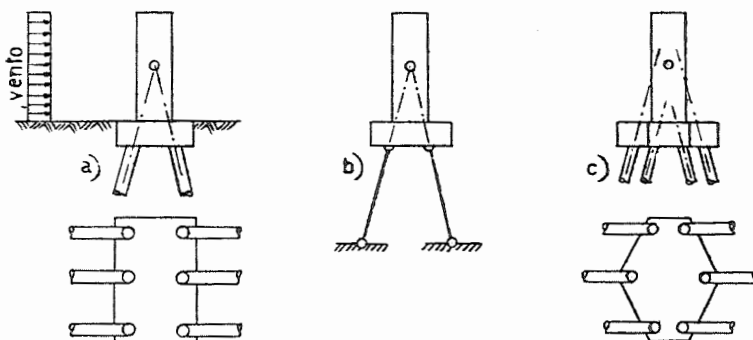


Fig. 1 - Exemplo de estaqueamento

mais ser substituido por b), e os momentos começam a desempenhar um papel principal. Tudo isto poderia ser evitado com uma disposição das estacas segundo a figura 1c).

1.2. Influência da rigidez estrutural

Geralmente encontra-se como peça intermediária o bloco, que transmite a carga da estrutura ao estaqueamento. O bloco não existe no caso excepcional em que as estacas ou os tubulões substituem os pilares da estrutura. Pelo número de estacas encontradas num bloco, resulta que os estaqueamentos são frequentemente hiperstáticos. Neste caso, a rigidez do bloco e a da super-estrutura têm influência importante sobre o comportamento estático do sistema.

Tomemos o exemplo da fig.2. Este estaqueamento plano é hiperestático, apesar de ter apenas 3 estacas, porque estamos no caso excepcional, frequentemente encontrado, de as estacas serem paralelas. Eventuais forças horizontais serão recebidas pelo empuxo lateral da terra. Se as estacas forem curtas e o solo nas suas pontas muito resistente, o bloco será viga sobre 3 apoios praticamente fixos, aplicando-se a teoria normal de viga contínua. Mas normalmente as estacas são compridas porque num solo resistente em pequena profundidade não se fazem estaqueamentos. Em virtude da grande rigidez do bloco em relação à rigidez das estacas, traba-

lham estas como se fossem molas, recebendo tôdas elas a mesma força no caso de carregamento axial. Chamam-se tais sistemas geomê -

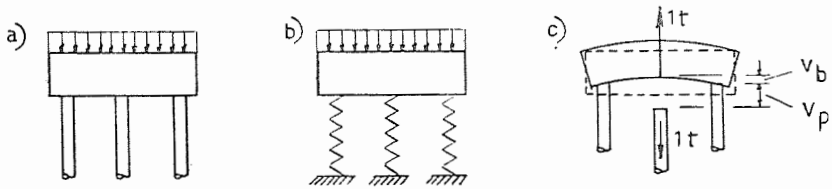
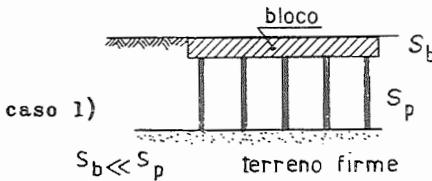


Fig. 2 - Sistemas planos hiperestáticos

tricamente determinados, em analogia com os sistemas isostáticos estáticamente determinados. A determinação geométrica não é afetada por aumento do número de estacas.

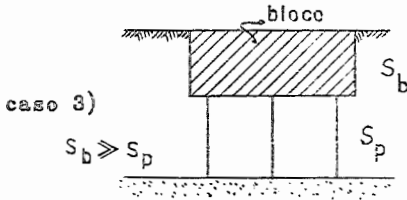
Para podermos classificar os casos possíveis, necessitamos da noção de ordem de grandeza da rigidez. Um critério numérico de rigidez poderia ser obtido, por exemplo, pela maneira indicada na fig. 2c): corta-se uma estaca e aplicam-se nas seções do corte duas cargas unitárias opostas. No deslocamento relativo $v_b + v_p$, a parcela v_b provém da flexão do bloco, v_p da variação dos comprimentos das estacas. Se for $v_p \gg v_b$, teremos uma rigidez S_b do bloco muito maior do que a rigidez S_p das estacas. Usaremos a notação $S_b \sim S_p$ para indicar que a rigidez do bloco tem a mesma ordem de grandeza que a rigidez das estacas. Também influe a rigidez da construção em cima do bloco (super-estrutura), que designaremos por S_c .



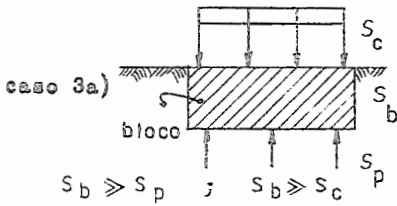
As forças nas estacas resultam como reações do cálculo do bloco como viga contínua com apoios fixos.



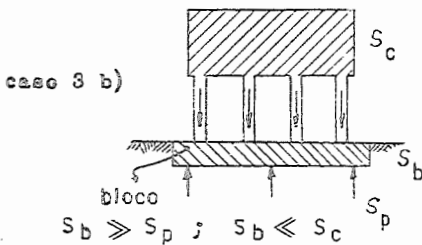
As forças nas estacas são reações do bloco como viga em apoios elásticos.



As forças nas estacas resultam do equilíbrio do bloco como sistema geomêtricamente determinado.
(Caso mais frequente)



O bloco é viga isostática carregada do lado superior pelas cargas dos pilares, do lado inferior pelas forças nas estacas determinadas segundo 3).



O bloco é viga hiperestática apoiada nos pilares da construção e carregada pelas forças nas estacas determinadas seg.3) A super-estrutura é sistema elásticamente apoiado no bloco.

A subdivisão do caso 3) em 3a) e 3b) só interessa ao cálculo do bloco e da super-estrutura; a estática do estaqueamento é igual em ambos os casos. A mesma subdivisão poderia ser feita no caso 1).

Temos suposto o solo na ponta das estacas praticamente incompressível. Pode-se levar em conta o recalque da ponta por um aumento fictício da compressibilidade da estaca. Este método não é aplicável no estudo da influência recíproca das estacas entre si. Normalmente, no caso de fundação em estacas, a camada do solo na ponta é suficientemente resistente para que se possa desprezar este efeito. Nos casos contrários, raramente encontrados, precisamos aplicar os processos desenvolvidos para fundações sobre solos compressíveis.

Na concepção da fundação tem o engenheiro projetista muito mais liberdade do que no resto da construção, porque não existem exigências de arquitetura. Ele deve evitar o quanto possível os casos intermediários (por exemplo, $S_b \sim S_p$) para excluir a influência de fatores incertos, para obter uma construção estáticamente clara (que é, geralmente, também mais econômica), e para reduzir o volume do seu serviço.

Trataremos aqui apenas do caso $S_b \gg S_p$ ("bloco rígido"), que forma a própria estática dos estaqueamentos com os seus processos típicos, considerando os outros casos como parte da estática geral. Também não trataremos da resistência do solo e das estacas, supondo dadas, para cada estaca, a sua capacidade de carga e a sua compressibilidade elástica.

2. O ESTAQUEAMENTO GERAL

2.1. Geometria do estaqueamento

Na prática um estaqueamento é dado por uma planta baixa que localiza as extremidades superiores das estacas e indica suas cotas ("plano de arrazamento"). Indica-se para cada estaca o "ângulo de cravação" α , que é o ângulo formado pelo eixo da estaca com a vertical. (vide fig. 4).

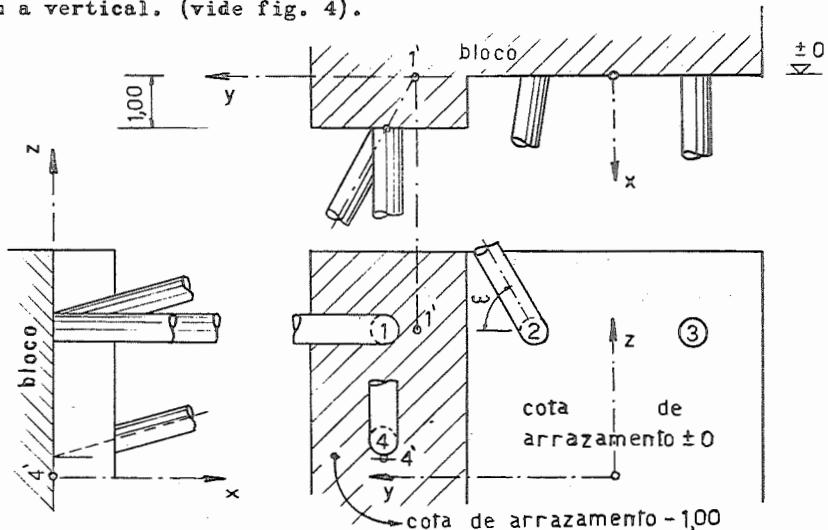


Fig. 4 - Representação de um estaqueamento

2. O estaqueamento geral

Fixamos no bloco um sistema dextrorso de eixos x, y, z , sendo x vertical e positivo para baixo. Os ângulos que forma o eixo da estaca com x, y, z , denominam-se α, β, γ . Se for necessário, o número da estaca será acrescentado como índice. O eixo duma estaca forma com os planos das coordenadas os ângulos complementares dos anteriores, ou seja:

com o plano x/y o ângulo $90 - \gamma$

com o plano y/z o ângulo $90 - \alpha$

com o plano x/z o ângulo $90 - \beta$

Para os ângulos que aparecem nas projeções do estaqueamento usaremos as notações ω, λ, μ , conforme fig. 5. Temos as seguintes relações:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \omega &= \cos \beta / \sin \alpha, & \operatorname{tg} \omega &= \operatorname{tg} \beta \sin \mu = \cos \gamma / \cos \beta \\ \cos \mu &= \cos \alpha / \sin \beta, & \operatorname{tg} \mu &= \operatorname{tg} \alpha \sin \omega = \cos \gamma / \cos \alpha \\ \cos \lambda &= \cos \alpha / \sin \gamma, & \operatorname{tg} \lambda &= \operatorname{tg} \alpha \cos \omega = \cos \beta / \cos \alpha \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

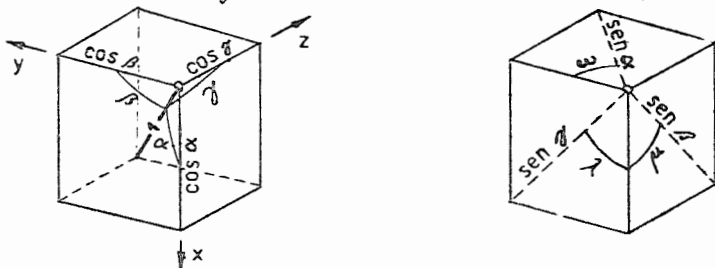


Fig. 5 - Relação entre os ângulos

Normalmente, a posição duma estaca é dada pelo ângulo de cravação α e por um ângulo projetado na planta baixa, por exemplo ω . Neste caso, temos as relações:

$$\cos \beta = \sin \alpha \cos \omega ; \quad \cos \gamma = \sin \alpha \sin \omega \quad (2)$$

Para simplificar o cálculo, convém referir tôdas as estacas ao mesmo plano de arrastamento, por exemplo $x = 0$, porque o "bloco rígido" não é sensível ao deslizamento de fôrças ao longo das suas linhas de ação - vide, por exemplo, as estacas 1 e 4 da fig. 4, que consideraremos como fixadas nos pontos 1' e 4'. Preci-

saremos, naturalmente, levar em conta tal mudança na determinação da compressibilidade elástica das estacas, que é proporcional ao seu comprimento.

Um valor geométrico que interessa em certos casos é a distância mínima d entre os eixos de duas estacas. No projeto, essas distâncias devem ser iguais ou superiores a um certo valor mínimo, imposto pela natureza do terreno e pela exatidão do processo de cravação, para que uma estaca já cravada não fique prejudicada pela cravação de outras vizinhas. Pelos conhecidos processos da geometria analítica espacial encontra-se o ângulo φ formado pelas direções das estacas i e j :

$$\cos \varphi = \cos \alpha_i \cos \alpha_j + \operatorname{sen} \alpha_i \operatorname{sen} \alpha_j \cos (\omega_i - \omega_j)$$

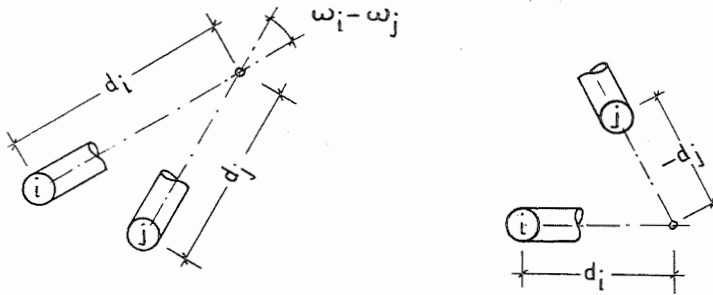


Fig. 6 - Distância entre duas estacas

Com as distâncias d_i , d_j medidas na planta baixa, determina-se o valor auxiliar:

$$a = d_i - d_j \frac{\operatorname{tg} \alpha_i}{\operatorname{tg} \alpha_j}$$

e a distância procurada é:

$$d = \frac{\cos \alpha_i \operatorname{sen} \alpha_j \operatorname{sen} (\omega_i - \omega_j)}{\operatorname{sen} \varphi} a \quad (3)$$

No caso particular frequente de cruzamento dos eixos de duas estacas em ângulo reto na planta, isto é, $\omega_i - \omega_j = 90^\circ$, temos, simplesmente:

$$d = \frac{d_i / \operatorname{tg} \alpha_i - d_j / \operatorname{tg} \alpha_j}{\sqrt{1 / \operatorname{sen}^2 \alpha_i + 1 / \operatorname{sen}^2 \alpha_j - 1}} \quad (3a)$$

2.2. Rigidez da estaca

Para avaliar a compressibilidade elástica de uma estaca faremos uso da noção de sua rigidez, que é a força necessária para produzir uma redução unitária do comprimento. Como nas estacas predominam as forças normais de compressão, daremos a tais forças o sinal positivo.

Notações:

ℓ = comprimento da estaca

F = área da seção da estaca (*)

E = módulo de elasticidade

s = rigidez

N = força normal na estaca

Para uma estaca que transmite toda a força na ponta (sem atrito no fuste), e para $F = \text{constante}$, temos:

$$\frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{N}{EF}, \text{ sendo } N = s \text{ para } \Delta \ell = 1, \text{ ou:}$$

$$s = EF/\ell$$

com a unidade t/m. Na maioria dos casos interessam apenas os valores relativos da rigidez; assim, para uma estaca i :

$$s_i = \frac{E_i}{E_c} \cdot \frac{F_i}{F_c} \cdot \frac{\ell_c}{\ell_i}$$

onde E_c , F_c , ℓ_c são grandezas de comparação convenientemente escolhidas. Muitas vezes, a suposição $s = 1$ para todas as estacas é suficientemente exata.

A transmissão parcial da carga pelo atrito no fuste e certo efeito de compressibilidade do solo na ponta da estaca podem ser levados em conta na determinação dos s .

(*) As letras S ou A , que parecem mais indicadas para o caso, são reservadas para outras grandezas (S = rigidez do estaqueamento, A = força admissível na estaca).

2.3. Componentes de carga externa

Como o bloco é suposto rígido, basta considerar apenas a resultante de tôdas as cargas externas. Esta resultante, no caso geral, não é só uma fôrça. Como se sabe, a "resultante" de um sistema geral de fôrças no espaço pode ser representada de várias maneiras, sendo uma delas por uma fôrça no eixo central do sistema e por um momento em relação a êste eixo.

No presente estudo consideraremos sempre a carga dada pelas fôrças componentes na direção dos três eixos do sistema de referência, e pelos momentos em relação aos mesmos. Usaremos as notações:

$$\begin{aligned}
 R_x &= \text{fôrça componente da carga total na direção de } x \\
 R_y &= \text{" " " " " " " " } y \\
 R_z &= \text{" " " " " " " " } z \\
 R_a &= \text{momento componente da carga total em relação ao eixo } x \\
 R_b &= \text{" " " " " " " " } y \\
 R_c &= \text{" " " " " " " " } z
 \end{aligned}$$

Esta notação, embora possa causar estranheza à primeira vista, facilitará muito a sistematização do problema, como será visto adiante. Nos termos gerais, serão usadas para índices as letras g, h .

O conjunto dos 6 valores R_g ($g = x, y, z, a, b, c$) será chamado vetor da carga \vec{R} , sendo êste valor referido a um espaço 6-dimensional. Usaremos como unidade a t (tonelada) para as componentes da fôrça na direção dos eixos x, y, z , e tm (tonelada.metro) para as componentes "na direção dos eixos" a, b, c . O espaço de 6 dimensões acima referido portanto não é métrico.

O sentido positivo de R_g (para $g = x, y, z$) é dado pelo sentido positivo do eixo correspondente. Os valores de R_g (para $g = a, b, c$) são positivos quando correspondem ao giro positivo definido no sistema dextrorso x, y, z .

Para distinguir com facilidade os vetores tri-dimensionais (que também teremos necessidade de usar) dos vetores 6-dimensionais, colocaremos um traço simples naqueles, reservando a flecha para estes.

2.4. Componentes do vetor da estaca

Uma estaca é geomêtricamente dada pelos cosenos diretores do seu eixo e pelas coordenadas do seu ponto de aplicação no bloco. Usaremos outros parâmetros fixadores da posição da estaca decorrentes da definição das componentes da carga externa.

Imaginemos retirada uma estaca e aplicada na direção do seu eixo uma força unitária de tração no bloco. O valor desta força é 1, sem dimensão, não lt. As 6 componentes desta força, determinadas conforme as definições do parágrafo precedente, e anotadas com $p_x, p_y, p_z, p_a, p_b, p_c$, são as componentes do vetor da estaca, ou, mais simplesmente, componentes da estaca.

As três primeiras componentes da estaca são os cosenos diretores do seu eixo; calculam-se as três últimas, que representam momentos em relação aos eixos coordenados, pelo produto vetorial dos vetores tri-dimensionais $\vec{r} (x, y, z)$ e $\vec{p} (p_x, p_y, p_z)$; portanto:

$$\left. \begin{array}{l} p_x = \cos \alpha \\ p_y = \cos \beta \\ p_z = \cos \gamma \end{array} \right\} \begin{array}{l} p_a = y p_z - z p_y \\ p_b = z p_x - x p_z \\ p_c = x p_y - y p_x \end{array} \dots (6)$$

onde p_x, p_y, p_z são números sem dimensão, e p_a, p_b, p_c são comprimentos.

O vetor da estaca \vec{p} , definido pelas 6 componentes $p_x, p_y, p_z, p_a, p_b, p_c$, não pode ser um vetor unitário porque num espaço não métrico a noção de vetor unitário carece de significado. Bastam 5 parâmetros para caracterizar o vetor \vec{p} , pois, entre os cosenos diretores existe a relação:

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = 1.$$

Chamaremos tais vetores de semi-unitários. Já para o vetor da carga \vec{R} , tôdas as 6 componentes são independentes entre si.

As componentes p_a, p_b, p_c permitem uma interpretação geo-

métrica, que pode ser útil num cálculo gráfico. Imaginemos dada uma estaca pelas coordenadas x, y, z , do seu ponto de aplicação, pelo ângulo de cravação α e pelo ângulo ω que forma a projeção do seu eixo na planta baixa com o eixo y . Conforme a relação (2), temos: $p_y = \text{sen } \alpha \cos \omega$, $p_z = \text{sen } \alpha \text{ sen } \omega$ e (6) fornece:

$$p_a = \text{sen } \alpha (y \text{ sen } \omega - z \text{ cos } \omega).$$

Mas a expressão entre parêntesis é a distância da projeção do eixo da estaca no plano y/z à origem das coordenadas, distância que chamaremos de d_a . Análogamente podemos definir d_b e d_c , fazendo as projeções nos planos x/z e x/y . Assim, teremos:

$$\left. \begin{aligned} p_a &= d_a \text{ sen } \alpha \\ p_b &= d_b \text{ sen } \beta \\ p_c &= d_c \text{ sen } \gamma \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6a)$$

As distâncias d_a, d_b, d_c podem ser medidas no desenho; devemos tomar o cuidado de atribuir a êsses valores o sinal positivo quando uma tração na estaca tende a girar o bloco no sentido positivo, e negativo no caso contrário.

De forma análoga poderiam ser obtidas as componentes R_a, R_b, R_c da carga, multiplicando a projeção da fôrça $\vec{R}(R_x, R_y, R_z)$ no respectivo plano pelo seu braço.

Quando fôr necessário indicar a estaca à qual se referem as componentes acima definidas, usaremos o número da estaca como segundo índice. Por exemplo, \vec{p}_i é o vetor da estaca i , com as componentes $p_{xi}, p_{yi}, p_{zi}, p_{ai}, p_{bi}, p_{ci}$.

2.5. Movimento elástico do bloco

Supomos pequeno o movimento elástico em relação às dimensões do bloco. Segundo os teoremas da Cinemática, tal movimento é

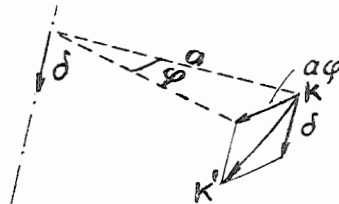


Fig. 7 - Movimento helicoidal elementar

sempre um "movimento helicoidal elementar" em relação ao "eixo instantâneo". Sendo dados o deslocamento paralelo δ a este eixo e o giro φ em torno dele, o deslocamento $K - K'$ dum ponto K à distância a do eixo resulta de uma translação e de uma rotação, como mostra a figura 7.

Para os nossos fins, a representação do movimento elástico pela posição do eixo e pelos valores δ e φ não é prática. Definimos um vetor 6-dimensional \vec{v} representante de um movimento elástico, com o seguinte significado das componentes:

- v_x = deslocamento elástico do bloco na direção do eixo x
- v_y = " " " " " " " " y
- v_z = " " " " " " " " z
- v_a = giro elástico do bloco em torno do eixo x
- v_b = " " " " " " " " y
- v_c = " " " " " " " " z

As componentes v_x, v_y, v_z são comprimentos; v_a, v_b, v_c são grandezas sem dimensão. Observamos aqui uma diferença em comparação com os vetores 6-dimensionais tratados anteriormente. Em \vec{R} e \vec{p} a dimensão das 3 primeiras componentes transforma-se na dimensão das 3 últimas pela multiplicação por um comprimento; no vetor \vec{v} , pela divisão por um comprimento.

O movimento definido pelo vetor \vec{v} pode ser real ou virtual servindo, neste último caso, para estudos de equilíbrio. Por exemplo, o trabalho virtual U que executa uma carga \vec{R} durante um movimento \vec{v} é igual à somatória dos trabalhos das componentes:

$$U = R_x v_x + R_y v_y + R_z v_z + R_a v_a + R_b v_b + R_c v_c$$

Podemos também dizer que o trabalho é o produto escalar da carga pelo movimento:

$$U = \vec{R} \cdot \vec{v} \dots \dots \dots (7)$$

Esta relação permite estabelecer o efeito de um movimento do bloco sobre uma estaca dada pelo vetor \vec{p} . Aplicando o vetor \vec{p}

em lugar da estaca retirada, o trabalho de \vec{p} durante um movimento \vec{v} é obtido pela aplicação da equação (7). O movimento \vec{v} tem por consequência certo deslocamento do ponto de aplicação de \vec{p} . A projeção deste deslocamento sobre o eixo da estaca é a variação do seu comprimento causada pelo movimento \vec{v} . Esta variação Δl é igual ao trabalho de \vec{p} porque a força é unitária; portanto:

$$\Delta l = v_x p_x + v_y p_y + v_z p_z + v_a p_a + v_b p_b + v_c p_c = \vec{v} \times \vec{p} \quad . \quad . \quad (8)$$

De acôrdo com a convenção adotada para o sentido de \vec{p} , Δl positivo significa encurtamento. Note-se que tôdas as parcelas da equação (8) são comprimentos.

Podemos dizer que um movimento caracterizado por $v_g = 1$, sendo nulas tôdas as outras componentes de \vec{v} , provoca um encurtamento p_{gi} na estaca i .

2.6. Rigidez do estaqueamento

O comportamento elástico do conjunto das estacas torna-se conhecido quando podemos indicar para tôda carga \vec{R} o respectivo movimento \vec{v} do bloco. A relação entre \vec{R} e \vec{v} é linear pela existência da lei de HOOKE para o material das estacas.

Como vimos no § precedente, um movimento $v_g = 1$ provoca encurtamentos p_{gi} nas estacas. Multiplicando pela rigidez s_i , resulta a força na estaca. As componentes da força $s_i p_{gi}$ nas "direções" x, y, z, a, b, c , são obtidas pela multiplicação por $p_{xi}, p_{yi} \dots p_{ci}$, porque êsses coeficientes são as componentes respectivas duma carga unitária na estaca. Juntando o efeito de tôdas as estacas, isto é, somando separadamente as componentes correspondentes às "direções" $x, y \dots c$, obtemos um jôgo de 6 componentes da reação total criada no estaqueamento pelo movimento $v_g = 1$. Observamos que as 6 componentes da carga que provoca $v_g = 1$ são respectivamente iguais às 6 componentes da reação, mas de sentido oposto (equilíbrio). As componentes da ação do bloco sobre as estacas denominam-se coeficientes de rigidez do estaqueamento, e terão a notação S_{gh} . O segundo índice significa a causa ($v_g = 1$), o primeiro a direção da componente. Consequentemente:

2. O estaqueamento geral

$$S_{gh} = \sum_{i=1}^n s_i p_{gi} p_{hi} \dots \dots \dots (9)$$

sendo a somatória estendida a tôdas as n estacas.

Em resumo: para provocar um movimento $v_g = 1$, sendo nulas as outras componentes de \vec{v} , precisamos carregar o bloco com uma carga cujas componentes são:

$$\begin{aligned} R_x &= S_{gx} & R_a &= S_{ga} \\ R_y &= S_{gy} & R_b &= S_{gb} \\ R_z &= S_{gz} & R_c &= S_{gc} \end{aligned}$$

Dai resulta por superposição as relações entre a carga \vec{R} e o movimento elástico \vec{v} :

$$\left. \begin{aligned} R_x &= S_{xx} v_x + S_{xy} v_y + S_{xz} v_z + S_{xa} v_a + S_{xb} v_b + S_{xc} v_c \\ R_y &= S_{yx} v_x + S_{yy} v_y + S_{yz} v_z + S_{ya} v_a + S_{yb} v_b + S_{yc} v_c \\ R_z &= S_{zx} v_x + S_{zy} v_y + S_{zz} v_z + S_{za} v_a + S_{zb} v_b + S_{zc} v_c \\ R_a &= S_{ax} v_x + S_{ay} v_y + S_{az} v_z + S_{aa} v_a + S_{ab} v_b + S_{ac} v_c \\ R_b &= S_{bx} v_x + S_{by} v_y + S_{bz} v_z + S_{ba} v_a + S_{bb} v_b + S_{bc} v_c \\ R_c &= S_{cx} v_x + S_{cy} v_y + S_{cz} v_z + S_{ca} v_a + S_{cb} v_b + S_{cc} v_c \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

Estas 6 equações de equilíbrio podem ser escritas na forma abreviada:

$$\vec{R} = S \vec{v} \dots \dots \dots (10a)$$

sendo S um tensor *) cuja matriz é composta pelos elementos S_{gh} , que são os coeficientes de rigidez. Chamaremos S de rigidez tensorial do estaqueamento.

A operação (10a) chama-se "multiplicação escalar" do tensor S pelo vetor \vec{v} . O resultado dessa multiplicação é o vetor \vec{R} .

Os coeficientes S_{gh} podem ser ilustrados num modelo com

*) O cálculo tensorial com vetores tri-dimensionais foi introduzido no cálculo dos estaqueamentos por S.O; ASPLUND, "A Study of three-dimensional pile-grups", Mem. Assoc. Intern. Ponts et Charpenters, 1947, vol. 8, pág. 1 - 16.

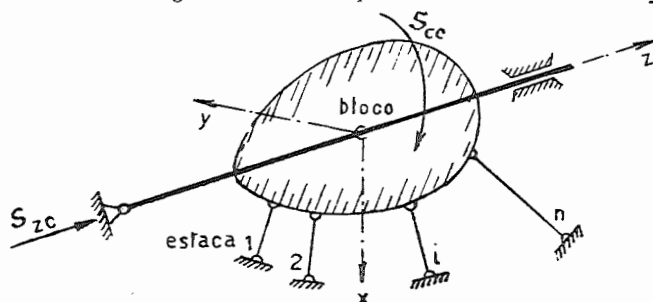


Fig. 8 - Modelo de ilustração

vínculos fictícios, como mostra a figura 8. O eixo z é materializado e fixado por dois mancais fictícios. Aplicando-se no bloco um momento externo S_{cc} em relação ao eixo z , o bloco vai efetuar um giro unitário em torno deste eixo, sendo impedida pelos mancais qualquer outra componente de \vec{v} . Os 5 coeficientes S_{gc} com $g = x, y, z, a, b$, aparecem em forma de reações nos mancais, como, por exemplo, S_{zc} no apoio fixo. Para outra componente unitária do movimento, para um deslocamento paralelo a um dos eixos, por exemplo ter-se-ia que prever outro tipo de vínculos fictícios.

Por razões formais, escrevemos nas equações (10) S_{xy} distinto de S_{yx} , apesar de ser sempre

$$S_{gh} = S_{hg}$$

o que resulta - de acordo com o princípio de MAXWELL - da equação (9). A matriz do tensor S é, portanto, simétrica:

$$S = \left\| \left\| S_{gh} \right\| \right\| = \begin{vmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} & S_{xa} & S_{xb} & S_{xc} \\ S_{xy} & S_{yy} & S_{yz} & S_{ya} & S_{yb} & S_{yc} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} & S_{za} & S_{zb} & S_{zc} \\ S_{xa} & S_{ya} & S_{za} & S_{aa} & S_{ab} & S_{ac} \\ S_{xb} & S_{yb} & S_{zb} & S_{ba} & S_{bb} & S_{bc} \\ S_{xc} & S_{yc} & S_{zc} & S_{ac} & S_{bc} & S_{cc} \end{vmatrix}$$

O número de elementos diferentes entre si numa matriz simétrica quadrática de n^2 elementos é $n(n+1)/2$; no nosso caso, $6.7/2 = 21$. Usaremos neste trabalho apenas matrizes quadradas, que podem sempre ser interpretadas como representativas de um tensor. Isto permite-nos usar os termos "tensor" e "matriz" como sinônimos, e em-

pregar a mesma notação para ambos.

Devido às relações entre os cosenos diretores, os 21 elementos S_{gh} da matriz S não são independentes entre si. Imaginemos que se substitua p_x por $\sqrt{1 - p_y^2 - p_z^2}$ em tôdas as equações (9): resulta uma matriz também simétrica de 5^2 elementos, dos quais apenas $5.6/2 = 15$ são distintos. Portanto, entre os 21 S_{gh} devem existir $21 - 15 = 6$ relações. Duas delas são suficientemente simples para poderem servir como controle de cálculo:

$$S_{xx} + S_{yy} + S_{zz} = \sum_{i=1}^n s_i \quad \dots \dots \dots (11)$$

$$S_{xa} + S_{yb} + S_{zc} = 0 \quad \dots \dots \dots (12)$$

Exprimindo p_x em função de p_y e p_z , resulta a relação (11):

$$S_{xx} = \sum s p_x^2 = \sum s(1 - p_y^2 - p_z^2) = \sum s - S_{yy} - S_{zz}$$

Para provar (12), introduzimos os valores de p_a, p_b, p_c conforme (6):

$$S_{xa} = \sum s p_x p_a = \sum s p_x p_z y - \sum s p_x p_y z$$

$$S_{yb} = \sum s p_y p_b = \sum s p_y p_x z - \sum s p_y p_z x$$

$$S_{zc} = \sum s p_z p_c = \sum s p_z p_y x - \sum s p_z p_x y$$

Somando, resulta valor nulo.

Observação: o número de parâmetros encontrados convida a especulações interessantes em analogia à teoria "rarcionstant" e "multiconstant" da elasticidade dos corpos alótropos, nos quais são usados, respectivamente, 15 e 21 parâmetros independentes.

2.7. Determinação das fôrça nas estacas

Obtém-se a fôrça normal numa estaca multiplicando-se o seu encurtamento Δl segundo a equação (8) pela sua rigidez s :

$$N_i = s_i \vec{v} \times \vec{p}_i = s_i (v_x p_{xi} + v_y p_{yi} + \dots + v_c p_{ci}) \dots (13)$$

onde $v_x, v_y, \dots v_c$, são as soluções das equações de equilíbrio (10). Felizmente, os estaqueamentos da prática têm quase sempre certas particularidades, pelas quais a solução do sistema de 6 equações a 6 incógnitas será sensivelmente simplificada. No caso

particular de serem todos os $S_{gh} = 0$, com $g \neq h$, ficando somente os elementos S_{gg} na diagonal principal da matriz S , temos:

$$v_x = R_x / S_{xx} ; \quad v_y = R_y / S_{yy} ; \quad \dots \quad v_c = R_c / S_{cc} .$$

$$N_i = s_i \left(\frac{R_x}{S_{xx}} p_{xi} + \frac{R_y}{S_{yy}} p_{yi} + \dots + \frac{R_c}{S_{cc}} p_{ci} \right) \dots \dots \dots (13a)$$

Veremos depois que este cálculo simples não é alcançável, no caso geral, por nenhuma transformação de coordenadas.

Quando houver necessidade de se considerar muitos casos de carregamento, convém determinar a "matriz recíproca" $S^{-1} = \|\beta_{gh}\|$. Os elementos desta matriz são definidos como soluções das equações (10), colocando nulas tôdas as parcelas constantes (carga), com exceção de uma, que será igual a 1, como indica o esquema:

	x	y	z	a	b	c	
x	=	-	-	-	-	-	1
y	-	=	-	-	-	-	0
z	-	-	=	-	-	-	0
a	-	-	-	=	-	-	0
b	-	-	-	-	=	-	0
c	-	-	-	-	-	=	0

=	-	-	-	-	-	-	0
-	=	-	-	-	-	-	1
-	-	=	-	-	-	-	0
-	-	-	=	-	-	-	0
-	-	-	-	=	-	-	0
-	-	-	-	-	=	-	0
-	-	-	-	-	-	=	0

...

=	-	-	-	-	-	-	0
-	=	-	-	-	-	-	0
-	-	=	-	-	-	-	0
-	-	-	=	-	-	-	0
-	-	-	-	=	-	-	0
-	-	-	-	-	=	-	0
-	-	-	-	-	-	=	1

Soluções:

$$\begin{array}{lll}
 v_x = \beta_{xx} & v_x = \beta_{xy} & \dots \quad v_x = \beta_{xc} \\
 v_y = \beta_{yx} & v_y = \beta_{yy} & \dots \quad v_y = \beta_{yc} \\
 \vdots & \vdots & \dots \quad \vdots \\
 v_c = \beta_{cx} & v_c = \beta_{cy} & \dots \quad v_c = \beta_{cc}
 \end{array}$$

A matriz recíproca também é simétrica: $\beta_{gh} = \beta_{hg}$

Para uma carga dada pelas componentes do vetor \vec{R} , obtém-se, por superposição:

$$\left. \begin{array}{l}
 v_x = \beta_{xx} R_x + \beta_{xy} R_y + \dots + \beta_{xc} R_c \\
 v_y = \beta_{yx} R_x + \beta_{yy} R_y + \dots + \beta_{yc} R_c \\
 \vdots \\
 v_c = \beta_{cx} R_x + \beta_{cy} R_y + \dots + \beta_{cc} R_c
 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

ou, brevemente:

$$\vec{v} = S^{-1} \vec{R} \quad \dots \dots \dots (14a)$$

β_{gh} , interpretado fisicamente, é a componente v_g do movimento elástico produzido por uma carga $R_h = 1$. Os valores recíprocos $1/\beta_{gh}$ também são uma sorte de coeficientes de rigidez. Compararemos, por exemplo, $1/\beta_{zb}$ com S_{zb} : a carga $\vec{R}(0,0,R_z=1/\beta_{zb},0,0,0)$ provoca $\vec{v}(v_x, v_y, v_z, v_a, v_b = 1, v_c)$ a carga $\vec{R}(R_x, R_y, R_z=S_{zb}, R_a, R_b, R_c)$ provoca $\vec{v}(0,0,0,0, v_b=1, 0)$. Também podemos dizer que $R_z = 1/\beta_{zb}$ é aplicado no sistema real, e $R_z = S_{zb}$ no sistema com vínculos fictícios que obrigam a serem nulas tôdas as componentes de \vec{v} , com exceção de v_b .

Introduziremos agora o valor $\vec{v} = S^{-1}\vec{R}$ na forma abreviada da equação (13), para obter N. Naturalmente, não ganharemos nada na redução do comprido caminho do cálculo numérico, mas, em compensação, obteremos a relação entre as forças axiais nas estacas e a carga externa.

$$N_i = s_i S^{-1} \vec{R} \times \vec{p}_i$$

Pelas propriedades demonstradas na álgebra matricial, neste produto, que contém, além do fator escalar s_i , o tensor S e os vetores \vec{R} e \vec{p}_i , os fatores podem ser comutados desde que a matriz S seja simétrica, que é o nosso caso:

$$N_i = s_i S^{-1} \vec{p}_i \times \vec{R} \dots \dots \dots (15)$$

Chamemos

$$\vec{f}_i = s_i S^{-1} \vec{p}_i \dots \dots \dots (16)$$

de vetor de influência da estaca i. Este vetor desempenha um papel análogo às ordenadas da "linha de influência": basta multiplicar escalarmente a carga por \vec{f}_i para obter a força axial N_i na estaca i:

$$N_i = \vec{R} \times \vec{f}_i \dots \dots \dots (17)$$

O vetor \vec{f} também pode ser definido cinemáticamente, como as linhas de influência. Imaginemos cortada a estaca i em questão e aplicado no corte um par de forças iguais e opostas de tração. Deixamos crescer estas forças até que o deslocamento relativo seja

unitário (o fato de não ser isto possível na realidade, pelo contacto das partes cortadas, não impede a aplicação mental). O vetor \vec{v} , que representa o movimento do bloco devido ao deslocamento unitário local, é idêntico ao vetor de influência \vec{f}_i porque, tomando $\vec{v} \equiv \vec{f}_i$ como movimento virtual, o equilíbrio de uma carga \vec{R} com as forças N nas estacas será expresso por:

$$0 = -N_i \cdot 1 + \vec{R} \times \vec{f}_i, \text{ equação idêntica à (17).}$$

Os nossos vetores 6-dimensionais podem ser agrupados da seguinte maneira:

1ª espécie

carga	\vec{R} , componentes	R_x, R_y, R_z (t)	R_a, R_b, R_c (tm)
vetor da estaca	\vec{p} , "	p_x, p_y, p_z (sem dimensão)	p_a, p_b, p_c (m)

2ª espécie

movimento elástico	\vec{v} , "	v_x, v_y, v_z (m)	v_a, v_b, v_c (sem d.)
vetor de influência	\vec{f} , "	f_x, f_y, f_z (sem dimensão)	f_a, f_b, f_c (1/m)

A representação do movimento elástico correspondente ao vetor \vec{f} pelo "eixo instantâneo de rotação" correspondente pode tornar-se interessante para se estudar o efeito da posição duma carga móvel. Chamemos êste eixo correspondente a \vec{f}_i de eixo de influência da estaca i . Para cada ponto K do bloco, escolhido como ponto de aplicação duma força, existe uma direção crítica em relação a uma estaca i , dada pela direção do deslocamento de K no movimento \vec{f}_i , como indica a figura 7. A força em K - suposta constante em tôdas as direções, para efeito de comparação - aplicada na direção crítica produz maior efeito sôbre a estaca i .

Chamemos de x, y, z , as coordenadas do ponto K . Obtemos o movimento de K somando o efeito do deslocamento paralelo dado por f_x, f_y, f_z , como o efeito do giro dado por f_a, f_b, f_c , sendo êste último expresso pelo produto vetorial:

2. O estaqueamento geral

$$[(f_a, f_b, f_c)(x, y, z)]$$

Chamando de k_x, k_y, k_z as componentes do movimento de K na direção crítica procurada, acha-se, pela execução do produto vetorial:

$$\begin{aligned}
k_x &= f_x + f_b z - f_c y \\
k_y &= f_y + f_c x - f_a z \quad \dots \dots \dots (18) \\
k_z &= f_z + f_a y - f_b x
\end{aligned}$$

O eixo de influência é dado pela condição de a direção crítica dada por k_x, k_y, k_z coincidir com a direção do vetor de giro f_a, f_b, f_c . Daí resulta que:

$$k_x : k_y : k_z = f_a : f_b : f_c \quad \dots \dots \dots (19)$$

são as duas equações do eixo de influência com x, y, z como coordenadas correntes.

Fôrças aplicadas como cargas no ponto K e contidas no plano normal à direção crítica não produzem fôrça normal na estaca em questão. Em particular, tôda fôrça cuja reta de aplicação encontra o eixo de influência num ângulo reto não tem efeito sôbre a estaca respectiva.

Quando tôdas as fôrças normais nas estacas forem determinadas, a comparação com as fôrças admissíveis nas estacas indicará se a carga do estaqueamento é ou não admissível. Seja a carga dada por um vetor semi-unitário \vec{r} na forma $R = R\vec{r}$. Para a estaca i, seja A_i a fôrça admissível de compressão, A'_i a fôrça admissível de tração. Se tôdas as fôrças normais N_i obtidas estiverem entre os limites

$$A'_i < N_i < A_i$$

a carga R será admissível.

Designaremos por R_A o valor limite de R para o qual, em uma ou mais estacas, será atingido o limite A' ou A. Pela inspecção dos valores N_i encontrados, acha-se a estaca cuja fôrça normal mais se aproxima do limite, estaca que designaremos com o índice m. Temos:

$$R_A = R A_m / N_m \quad \text{ou} \quad R_A = R A'_m / N_m, \text{ conforme o caso.}$$

Substituindo N_m por $\vec{R} \times \vec{f}_m = R \vec{r} \times \vec{f}_m$, obtemos:

$$R_A = \frac{A_m}{\vec{r} \times \vec{f}_m} \quad \text{ou} \quad = \frac{A'_m}{\vec{r} \times \vec{f}_m}$$

A carga admissível R_A depende, como é óbvio, da sua posição expressa pelo vetor semi-unitário \vec{r} . No caso geral, R_A é uma função de 5 variáveis de acordo com os 5 parâmetros de que depende \vec{r} . Esta função não é contínua. O espaço 5-dimensional é dividido em certas zonas, nas quais sempre uma estaca específica é responsável pelo valor R_A . Nos limites das zonas há discontinuidade, mas (provavelmente) não haverá saltos do valor R_A .

Antes de prosseguir neste texto, convém estudar o primeiro exemplo numérico do capítulo 6, até à determinação das forças nas estacas. A maior parte dos exemplos deste trabalho está reunida neste capítulo para facilitar o seu uso como modelos de cálculo.

3. MUDANÇA DO SISTEMA DE COORDENADAS

3.1. Introdução

Aplicaremos a mudança do sistema de coordenadas para simplificar o cálculo dos estaqueamentos práticos, que já são mais simples pela existência de simetria ou por outros motivos. O fato de que as transformações de coordenadas serão sempre casos particulares não nos liberta da necessidade de estudar a teoria geral da transformação, porque só esta permite as conclusões necessárias.

Como o cálculo matricial ainda não ganhou na literatura técnica a difusão que merece, julgamos conveniente dar aqui algumas explicações prévias. Na realidade, só precisaremos de alguns elementos deste cálculo, que pode ser interpretado como uma "notação taquigráfica" de sistemas de equações.

Além do expoente -1 para a matriz recíproca já explicada, necessitaremos da indicação da matriz transposta, que resulta da permuta de lugar dos elementos que ocupam dois a dois uma posição simétrica em relação à diagonal principal. Usaremos o expoente tr

como notação. Para matrizes simétricas, como S, por exemplo, temos

$$S^{tr} = S$$

Resulta logo da interpretação dos elementos duma matriz como coeficientes de equações lineares que a recíproca duma transposta é igual à transposta da recíproca:

$$(S^{-1})^{tr} = (S^{tr})^{-1} = S^{-tr} \dots \dots \dots (20)$$

porque a ordem das respectivas equações pode ser invertida.

As vezes um vetor sofre duas transformações consecutivas, dadas pelas matrizes A e B, de forma que o vetor obtido $B\vec{v}$ será novamente transformado para $A(B\vec{v})$. Substituindo-se as matrizes A e B por uma única C que faça a mesma operação:

$$C \vec{v} = A B \vec{v}$$

teremos definido o produto de duas matrizes $C = A B$. Verifica-se a regra ensinada na álgebra matricial para formar os elementos de C interpretando tais elementos como coeficientes de equações lineares. Esta regra diz que o elemento C_{gh} da linha g e da coluna h é obtido como soma dos produtos dos elementos da linha g da matriz A pelos elementos da coluna h da matriz B:

$$C_{gh} = A_{g1} B_{1h} + A_{g2} B_{2h} + A_{g3} B_{3h} + \dots \dots \dots (21)$$

Calculando segundo esta definição o produto duma matriz S pela sua recíproca S^{-1} , resulta a "matriz unitária", com 1 na diagonal principal, e 0 para todos os outros elementos.

$$S S^{-1} = \left\| \left\| s_{gh} \right\| \right\| \left\| \beta_{gh} \right\| \right\| = \left\| \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \right\|$$

Tal cálculo, que pode ser interpretado como verificação dos valores β_{gh} , motivou a criação da palavra "matriz recíproca". (Encontra-se, às vezes, o nome "matriz conjugada", não recomendá-

vel para evitar confusão com a transposta).

A multiplicação matricial é associativa (não há necessidade de parêntesis na expressão $A B \vec{v}$), mas não é comutativa ($A B \neq B A$). Só a multiplicação de uma matriz simétrica por um vetor é comutativa. Existe uma propriedade na álgebra das matrizes que desempenha papel análogo ao da lei comutativa da álgebra comum. Esta propriedade é que a transposta dum produto é o produto dos fatores transpostos na ordem comutada:

$$\text{de } C = A B \text{ resulta } C^{tr} = B^{tr} A^{tr} \dots \dots \dots (22)$$

Nos casos particulares encontraremos sempre matrizes S com vários elementos nulos. Para evidenciar a simplificação do cálculo, convém dispor as linhas e as colunas da matriz de outra maneira, juntando as equações dependentes entre si. Por exemplo, a matriz com $S_{xy} = S_{xz} = S_{xb} = S_{xc} = S_{ya} = S_{za} = S_{ab} = S_{ac} = 0$ pode ser representada do modo seguinte:

	x	a	y	z	b	c
x	=	-	0	0	0	0
a	-	=	0	0	0	0
y	0	0	=	-	-	-
z	0	0	-	=	-	-
b	0	0	-	-	=	-
c	0	0	-	-	-	=

De fato, trata-se de dois sistemas de equações independentes entre si. Diz-se que a matriz é separável segundo as linhas tracejadas em duas sub-matrizes. Só encontraremos separações em sub-matrizes quadradas.

Usaremos uma propriedade evidente da multiplicação de matrizes separáveis. Sejam A e B duas matrizes separáveis segundo as mesmas linhas e colunas. Seguindo a regra da multiplicação matricial, resultam evidentemente nos quarteirões com elementos nulos novamente elementos nulos, e nos outros quarteirões elementos formados pela multiplicação das sub-matrizes; simbolicamente:

$$A B = \begin{vmatrix} A^1 & 0 \\ 0 & A'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} B^1 & 0 \\ 0 & B'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A^1 B^1 & 0 \\ 0 & A'' B'' \end{vmatrix}$$

Para a clareza do formulário, é muito importante que se encontre uma notação conveniente. No cálculo tensorial usa-se a convenção de dar a letra seguinte do alfabeto a todo valor transformado. Esta modalidade seria bem possível no nosso caso, desde que chamássemos os eixos x, y, z, a, b, c , de $x_1, x_2, x_3, \dots, x_6$, e no sistema transformado de $y_1, y_2, y_3, \dots, y_6$. Apesar das vantagens lógicas, não usaremos tal notação, contrária ao espírito do engenheiro, que costuma fazer uma associação direta entre a letra e o significado respectivo. Por exemplo, anotando-se a rigidez às vezes com S , às vezes com T , ou com U , complicar-se-ia a compreensão

Usaremos a seguinte convenção: todo valor transformado recebe um apóstrofo. Por exemplo, o vetor da estaca no sistema x, y, \dots, c , é \vec{p} (p_x, p_y, \dots, p_c), e no sistema transformado passa a ser \vec{p}' (p'_x, p'_y, \dots, p'_c). Uma segunda transformação será indicada por dois apóstrofos. Outras notações serão explicadas no texto.

O primeiro passo na teoria da transformação de coordenadas é uma decepção, pois o sonho de todo calculista - obter uma matriz com elementos não nulos $S_{xx}, S_{yy}, \dots, S_{cc}$ apenas na diagonal principal (equações independentes) - não é realizável no caso geral. Vimos que os 21 coeficientes S_{gh} são reduzidos a 15 parâmetros independentes, por certas relações entre eles. A "matriz ideal" teria apenas 6 coeficientes transformados. Para tornar nulos aqueles que sobram, em número de $15 - 6 = 9$, precisaríamos dispor de 9 parâmetros fixadores da nova posição do sistema das coordenadas. Na realidade, só temos 6, de acordo com os 6 graus de liberdade de movimento no espaço.

3.2. Tensor de transformação

O problema da transformação apresenta-se do modo seguinte: para eixos x, y, z , com origem O arbitrariamente escolhida, foram determinados os vetores \vec{p} das estacas, o vetor \vec{R} da carga, e a matriz de rigidez S ; procura-se, para outro sistema x', y', z' , com a origem O' , os respectivos valores \vec{p}', \vec{R}', S' .

Poder-se-ia, naturalmente, recomeçar o cálculo, obtendo-se

os valores desejados no novo sistema. De fato é este, às vezes, o caminho indicado de cálculo, mas, em geral, uma transformação dos valores \vec{p} , \vec{R} , S em \vec{p}' , \vec{R}' , S' , é mais simples. Quanto ao vetor do movimento elástico \vec{v} , precisar-se-á normalmente da retransformação de \vec{v}' em \vec{v} .

A posição do novo sistema das coordenadas em relação ao antigo ou vice-versa pode ser dada pelas coordenadas respectivas da origem e pelos cosenos diretores dos eixos dum sistema no outro. Em princípio usaremos outros parâmetros fixadores da posição relativa dos dois sistemas. Para fixar o eixo x (antigo) em relação ao novo sistema, imaginemos aplicada uma força unitária na direção do eixo x , e determinemos as 6 componentes no novo sistema do vetor \vec{x} , como se fosse este eixo o de uma estaca. Procedendo da mesma forma com \vec{y} e \vec{z} , obteremos 18 parâmetros (naturalmente não independentes) da posição relativa.

Notações:

1) Origem.

Coordenadas da origem O' (nova) no sistema antigo: x_0, y_0, z_0 .
 Coordenadas da origem O (antiga) no sistema novo: x'_0, y'_0, z'_0 .

2) Cosenos diretores.

Letra q com dois índices, significando o primeiro o novo eixo, o segundo o antigo; por exemplo:

q_{yz} é o coseno do ângulo entre as direções dos eixos y' e z .

Desta forma, os vetores \vec{x} , \vec{y} , \vec{z} , como estacas fictícias, terão, conforme (6), no novo sistema x', y', z' , as componentes:

	Vetor \vec{x}	Vetor \vec{y}	Vetor \vec{z}
x'	q_{xx}	q_{xy}	q_{xz}
y'	q_{yx}	q_{yy}	q_{yz}
z'	q_{zx}	q_{zy}	q_{zz}
a'	$q_{ax} = y'_0 q_{zx} - z'_0 q_{yx}$	$q_{ay} = y'_0 q_{zy} - z'_0 q_{yy}$	$q_{az} = y'_0 q_{zz} - z'_0 q_{yz}$
b'	$q_{bx} = z'_0 q_{xx} - x'_0 q_{zx}$	$q_{by} = z'_0 q_{xy} - x'_0 q_{zy}$	$q_{bz} = z'_0 q_{xz} - x'_0 q_{zz}$
c'	$q_{cx} = x'_0 q_{yx} - y'_0 q_{xx}$	$q_{cy} = x'_0 q_{yy} - y'_0 q_{xy}$	$q_{cz} = x'_0 q_{yz} - y'_0 q_{xz}$

... (23)

Para transformar um vetor de movimento elástico do novo para o antigo sistema, precisamos lembrar-nos da equação (8) para o encurtamento duma estaca resultante de um movimento dado por seu vetor. O "encurtamento da estaca x" é a componente de \vec{v} procurada na direção x, proveniente de um movimento \vec{v}' ; portanto:

$$v_x = q_{xx} v'_x + q_{yx} v'_y + q_{zx} v'_z + q_{ax} v'_a + q_{bx} v'_b + q_{cx} v'_c$$

$$v_y = q_{xy} v'_x + q_{yy} v'_y + q_{zy} v'_z + q_{ay} v'_a + q_{by} v'_b + q_{cy} v'_c$$

$$v_z = q_{xz} v'_x + q_{yz} v'_y + q_{zz} v'_z + q_{az} v'_a + q_{bz} v'_b + q_{cz} v'_c$$

A transformação das componentes que exprimem o giro elástico é mais simples. Basta projetar as componentes do respectivo vetor sobre os eixos antigos, multiplicando-se pelos cossenos diretores correspondentes:

$$v_a = q_{xx} v'_a + q_{yx} v'_b + q_{zx} v'_c$$

$$v_b = q_{xy} v'_a + q_{yy} v'_b + q_{zy} v'_c$$

$$v_c = q_{xz} v'_a + q_{yz} v'_b + q_{zz} v'_c$$

Passemos agora à transformação do vetor da carga do antigo para o novo sistema. Já conhecemos os efeitos das forças unitárias nas direções dos velhos eixos: são as componentes dos vetores \vec{x} , \vec{y} , \vec{z} , conforme (23). Além das forças R_x , R_y , R_z , temos os momentos R_a , R_b , R_c , que se transformam por multiplicação pelos cossenos diretores correspondentes. Esses momentos projetados devem ser somados com os momentos produzidos pelas forças R_x , R_y , R_z ; portanto:

$$R'_x = q_{xx} R_x + q_{xy} R_y + q_{xz} R_z$$

$$R'_y = q_{yx} R_x + q_{yy} R_y + q_{yz} R_z$$

$$R'_z = q_{zx} R_x + q_{zy} R_y + q_{zz} R_z$$

$$R'_a = q_{ax} R_x + q_{ay} R_y + q_{az} R_z + q_{xx} R_a + q_{xy} R_b + q_{xz} R_c$$

$$R'_b = q_{bx} R_x + q_{by} R_y + q_{bz} R_z + q_{yx} R_a + q_{yy} R_b + q_{yz} R_c$$

$$R'_c = q_{cx} R_x + q_{cy} R_y + q_{cz} R_z + q_{zx} R_a + q_{zy} R_b + q_{zz} R_c$$

Nestas transformações intervém visivelmente uma matriz e

sua transposta. Para a notação "taquigráfica" das equações de transformação, estabeleceremos o tensor da transformação T, ccm a matriz:

$$T = \begin{vmatrix} q_{xx} & q_{xy} & q_{xz} & 0 & 0 & 0 \\ q_{yx} & q_{yy} & q_{yz} & 0 & 0 & 0 \\ q_{zx} & q_{zy} & q_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ q_{ax} & q_{ay} & q_{az} & q_{xx} & q_{xy} & q_{xz} \\ q_{bx} & q_{by} & q_{bz} & q_{yx} & q_{yy} & q_{yz} \\ q_{cx} & q_{cy} & q_{cz} & q_{zx} & q_{zy} & q_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{comp. do vetor } \vec{x} & \text{comp. do vetor } \vec{y} & \text{comp. do vetor } \vec{z} & 0 & 0 & 0 \\ \text{comp. do vetor } \vec{x} & \text{comp. do vetor } \vec{y} & \text{comp. do vetor } \vec{z} & 0 & 0 & 0 \\ \text{comp. do } \bar{x} & \text{comp. do } \bar{y} & \text{comp. do } \bar{z} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (24)$$

Na segunda redação simbólica de T, usamos $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, para os vetores 6-dimensionais conforme (23), $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, para os vetores tri-dimensionais, com os cosenos diretores como componentes. Com o emprego de T, obtemos as seguintes expressões para a transformação:

$$\vec{R}^i = T \vec{R} \quad \text{e} \quad \vec{v} = T^{tr} \vec{v}^i \quad \dots \dots \dots (25)$$

Como casos particulares da transformação de coordenadas, temos a rotação e a translação do sistema. A rotação, na qual a origem é mantida, é caracterizada pelo fato de serem nulas tôdas as componentes dos vetores $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ que exprimem momentos; portanto, o tensor da rotação tem a matriz

$$T(\text{rot}) = \begin{vmatrix} q_{xx} & q_{xy} & q_{xz} & 0 & 0 & 0 \\ q_{yx} & q_{yy} & q_{yz} & 0 & 0 & 0 \\ q_{zx} & q_{zy} & q_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{xx} & q_{xy} & q_{xz} \\ 0 & 0 & 0 & q_{yx} & q_{yy} & q_{yz} \\ 0 & 0 & 0 & q_{zx} & q_{zy} & q_{zz} \end{vmatrix} \dots \dots \dots (26)$$

A matriz T(rot) não é simétrica (por exemplo, $q_{xy} \neq q_{yx}$), mas goza da propriedade: $T(\text{rot})^{-1} = T(\text{rot})^{tr}$, o que resulta do significado dos cosenos diretores.

Na translação, o paralelismo dos eixos implica valor 1 para os cosenos diretores com índices iguais e valor 0 para aqueles com índices diferentes. Convém substituir diretamente as coordenadas relativas das origens, que são, neste caso de transla-

ção, iguais em valor absoluto e de sinal oposto:

$$x_0 = -x'_0 ; \quad y_0 = -y'_0 ; \quad z_0 = -z'_0$$

Pondo nulos os respectivos cosenos diretores, temos:

$$\begin{array}{lll}
q_{ax} = 0 & q_{ay} = -z'_0 = z_0 & q_{az} = y'_0 = -y_0 \\
q_{bx} = z'_0 = -z_0 & q_{by} = 0 & q_{bz} = -x'_0 = x_0 \\
q_{cx} = -y'_0 = y_0 & q_{cy} = x'_0 = -x_0 & q_{cz} = 0
\end{array}$$

e a matriz do tensor de translação é:

$$T(\text{transl.}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z'_0 & +y'_0 & 1 & 0 & 0 \\ +z'_0 & 0 & -x'_0 & 0 & 1 & 0 \\ -y'_0 & +x'_0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +z_0 & -y_0 & 1 & 0 & 0 \\ -z_0 & 0 & +x_0 & 0 & 1 & 0 \\ +y_0 & -x_0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots (27)$$

Procuramos agora o processo para a transformação da rigidez S. Temos, segundo (10a), $\vec{R} = S \vec{v}$, e procuramos a relação análoga $\vec{R}' = S' \vec{v}'$. As equações (25) fornecem:

$$\begin{aligned}
\vec{R}' &= T \vec{R} = T S \vec{v} = T S T^{tr} \vec{v}' ; \text{ donde:} \\
S' &= T S T^{tr} \dots \dots \dots (28)
\end{aligned}$$

é a relação que transforma a rigidez.

Para transformar a recíproca da rigidez, partimos de:

$$\begin{aligned}
\vec{R}' &= S' \vec{v}' \quad \text{ou} \quad \vec{v}' = S'^{-1} \vec{R}' \\
\vec{v} &= T^{tr} \vec{v}' = T^{tr} S'^{-1} \vec{R}' = T^{tr} S'^{-1} T \vec{R} = S^{-1} \vec{R}; \text{ donde:} \\
S^{-1} &= T^{tr} S'^{-1} T \dots \dots \dots (29)
\end{aligned}$$

Tôdas as transformações no sentido inverso exigem a determinação da matriz recíproca de T, o que só é simples no caso de rotação.

O vetor da estaca e o vetor de influência transformam-se como o vetor da carga e o vetor do movimento, respectivamente.

Fórmulas de transformação

<u>Vetores da 1ª espécie</u>	ida:	volta:	}	(30)
carga	$\vec{R}' = T \vec{R}$	$\vec{R} = T^{-A} \vec{R}'$		
vetor da estaca	$\vec{p}' = T \vec{p}$	$\vec{p} = T^{-1} \vec{p}'$		
<u>Vetores da 2ª espécie</u>				
movimento elástico	$\vec{v}' = T^{-tr} \vec{v}$	$\vec{v} = T^{tr} \vec{v}'$		
vetor de influência	$\vec{f}' = T^{-tr} \vec{f}$	$\vec{f} = T^{tr} \vec{f}'$		
<u>Matriz de rigidez</u>	$S' = T S T^{tr}$	$S = T^{-A} S' T^{-tr}$		
	$S'^{-1} = T^{-tr} S^{-A} T^{-A}$	$S^{-1} = T^{tr} S'^{-A} T$		

3.3. Direções principais, eixos centrais e elásticos

Estudemos as possibilidades de simplificar a matriz de rigidez S por uma rotação do sistema. Por uma escolha apropriada das direções dos novos eixos, podemos tentar obter nulos os coeficientes transformados S'_{xy} , S'_{yz} , S'_{xz} , a fim de que a matriz nova seja da forma:

$$S' = \begin{pmatrix} = & 0 & 0 & - & - & - \\ 0 & = & 0 & - & - & - \\ 0 & 0 & = & - & - & - \\ - & - & - & = & - & - \\ - & - & - & - & = & - \\ - & - & - & - & - & = \end{pmatrix}$$

Supondo, por enquanto, que existam tais posições dos eixos chamadas direções principais do deslocamento, podemos tirar certas conclusões que facilitarão a procura delas:

1. Um deslocamento elástico numa das direções principais provocará como reação uma força da mesma direção (a posição desta força resulta dos coeficientes não nulos da coluna correspondente de S).

2. Substituindo o estaqueamento real por outro, chamado "reduzido", obtido pela transferência paralela de todas as estacas à origem, as direções principais de deslocamento não se alteram porque a direção da reação resultante dum certo deslocamento paralelo só depende da direção das estacas.

Sendo assim, na procura das direções principais de deslocamento, teremos de considerar apenas o estaqueamento reduzido à origem, com a matriz de rigidez:

$$S_{x,y,z} = \begin{vmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{xy} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} \end{vmatrix}$$

Quando uma matriz contiver somente uma parte das 6 linhas e colunas, usaremos a notação de índices na letra S. Esses índices devem ser separados por vírgulas para que se não faça confusão com o respectivo coeficiente de rigidez; assim, por exemplo:

$$S_{x,y} = \begin{vmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{xy} & S_{yy} \end{vmatrix}$$

Procuramos uma direção principal, expressa pelo vetor unitário \bar{q} (q_x, q_y, q_z), que goza da seguinte propriedade: uma força \bar{R} (R_x, R_y, R_z) na direção \bar{q} provocará um deslocamento na mesma direção. Designaremos por σ o valor (módulo) desta força correspondente a um deslocamento unitário $\bar{v} = \bar{q}$.

Entre \bar{R} e \bar{v} , há a relação

$$\bar{R} = S_{x,y,z} \bar{v};$$

portanto, a propriedade mencionada pode ser expressa por:

$$\sigma \bar{q} = S_{x,y,z} \bar{q}.$$

Desenvolvendo esta equação vetorial $S_{x,y,z} \bar{q} - \sigma \bar{q} = 0$, resulta:

$$\begin{aligned} (S_{xx} - \sigma)q_x + S_{xy}q_y + S_{xz}q_z &= 0 \\ S_{xy}q_x + (S_{yy} - \sigma)q_y + S_{yz}q_z &= 0 \quad \dots (31) \\ S_{xz}q_x + S_{yz}q_y + (S_{zz} - \sigma)q_z &= 0 \end{aligned}$$

Essas três equações homogêneas para os cossenos diretores q_x, q_y, q_z , só serão compatíveis entre si quando for nulo o determinante dos coeficientes:

$$\begin{vmatrix} S_{xx} - \sigma & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{xy} & S_{yy} - \sigma & S_{yz} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo o determinante, resulta:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$$

onde I_1, I_2, I_3 são os invariantes da matriz $S_{x,y,z}$

$$I_1 = S_{xx} + S_{yy} + S_{zz}$$

$$I_2 = S_{xx} S_{yy} + S_{yy} S_{zz} + S_{zz} S_{xx} - S_{xy}^2 - S_{yz}^2 - S_{zx}^2 \dots (32)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{xy} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} \end{vmatrix}$$

As três soluções para σ da equação cúbica (32) são os valores da força que produz deslocamento unitário na sua direção, isto é, essas soluções são os coeficientes procurados $S'_{xx}, S'_{yy}, S'_{zz}$ da matriz transformada. Cada um desses valores substituídos nas equações (31) fornece, junto com a equação

$$q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = 1$$

3 cosenos diretores. Suprimimos a prova de que as 3 direções assim encontradas são normais entre si. Designando

as componentes de \bar{q} correspondentes a S'_{xx}	por q_{xx}, q_{xy}, q_{xz}
" " " " " "	" S'_{yy} " q_{yx}, q_{yy}, q_{yz}
" " " " " "	" S'_{zz} " q_{zx}, q_{zy}, q_{zz}

temos os elementos para estabelecer a matriz $T(\text{rot})$ conforme (26), que fornece os elementos restantes da matriz transformada S' por meio de

$$S' = T S T^{\text{tr}}.$$

A primeira parte deste cálculo, que é a transformação da matriz $S_{x,y,z}$, é encontrada análogamente em várias outras aplicações físicas. Podemos mesmo aproveitar as fórmulas já estabelecidas para os cosenos diretores. Resolvida a equação cúbica (32),

calculam-se*) 9 valores auxiliares ($g = x, y, z$):

$$\left. \begin{aligned} C_{gx} &= (S_{yy} - S'_{gg}) (S_{zz} - S'_{gg}) - S_{yz}^2 \\ C_{gy} &= (S_{xx} - S'_{gg}) (S_{zz} - S'_{gg}) - S_{xz}^2 \\ C_{gz} &= (S_{xx} - S'_{gg}) (S_{yy} - S'_{gg}) - S_{xy}^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots (33)$$

e os cosenos diretores são ($g, h, = x, y, z$):

$$q_{gh}^2 = \frac{C_{gh}}{C_{gx} + C_{gy} + C_{gz}} \dots \dots (34)$$

Os sinais desses valores resultam da inspeção das equações (31).

Esta dedução poderia ter sido feita sem recorrer ao estaqueamento "reduzido", com tôdas as estacas transferidas à origem. O fato de a parte $S'_{x,y,z}$ da matriz transformada depender apenas da direção das estacas e não das suas posições resulta da própria multiplicação matricial, com a matriz $T(\text{rot})$ segundo (26). Imaginemos as matrizes $T(\text{rot})$ e S separadas em 4 partes anotadas do seguinte modo:

$$T = T(\text{rot}) = \left\| \begin{array}{c|c} [q] & 0 \\ \hline 0 & [q] \end{array} \right\| \quad S = \left\| \begin{array}{c|c} [S]_1 & [S]_2 \\ \hline [S]_2^{\text{tr}} & [S]_3 \end{array} \right\|$$

Aplicando a regra da multiplicação matricial, resulta:

$$T S = \left\| \begin{array}{c|c} [q][S]_1 & [q][S]_2 \\ \hline [q][S]_2^{\text{tr}} & [q][S]_3 \end{array} \right\|$$

$$T S T^{\text{tr}} = \left\| \begin{array}{c|c} [q][S]_1 & [q]^{\text{tr}}[S]_2 \\ \hline [q][S]_2^{\text{tr}} & [q]^{\text{tr}}[S]_3 \end{array} \right\|$$

isto é, na transformação por rotação da primeira parte $S_{x,y,z} = [S]_1$, intervém somente os coeficientes desta parte, e não os das outras partes $[S]_2$ e $[S]_3$.

O mesmo acontece com a última parte $S_{a,b,c} = [S]_3$ da

*) T. van LANGENDONCK, Resistência, 2º vol., Tensões, Rio, 1956, pág. 39.

matriz. Isto permite uma conclusão interessante sobre as propriedades elásticas do estaqueamento. Procuramos uma rotação do sistema que torne $S_{ab} = S_{ac} = S_{bc} = 0$, com o que se obtém a matriz:

$$S' = \begin{pmatrix} - & - & - & - & - & - \\ - & = & - & - & - & - \\ - & - & = & - & - & - \\ - & - & - & = & 0 & 0 \\ - & - & - & 0 & = & 0 \\ - & - & - & 0 & 0 & = \end{pmatrix}$$

Basta para êste fim aplicar as equações (31), (32), (33) e (34), substituindo x, y, z , por a, b, c . Para reconhecer as propriedades dos novos eixos, imaginemos que o estaqueamento execute um giro em torno de um dos eixos, por exemplo um movimento elástico com a única componente $\varepsilon_a = 1$. A carga correspondente a êste giro contém só as componentes R_x, R_y, R_z, R_a , sendo $R_b = R_c = 0$ por serem nulos os valores S_{ab} e S_{ac} . Tal carga pode, portanto, ser representada por duas forças, uma das quais aplicada no eixo x , e a outra num plano normal a êste eixo. Chamaremos as direções desses eixos novos de direções principais de giro.

Bem mais simples torna-se o assunto quando um dos eixos originais já for colocado numa direção principal, determinada, por exemplo, por simetria. Suponhamos que uma das direções principais do deslocamento seja a direção do eixo z . Trata-se, então, de uma rotação do sistema em torno de z . O vetor unitário que indica as outras direções principais é agora bi-dimensional, com as componentes q_x e q_y . Em vez das equações (31), temos:

$$\left. \begin{aligned} (S_{xx} - \sigma)q_x + S_{xy}q_y &= 0 \\ S_{xy}q_x + (S_{yy} - \sigma)q_y &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (35)$$

Dessas equações resulta o ângulo φ de rotação do sistema (fig.9),

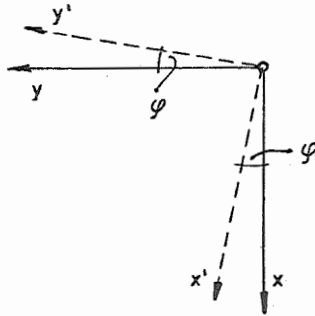


Fig. 9 - Rotação em torno de uma direção principal

com $q_x = \cos \varphi$; $q_y = \text{sen } \varphi$

$$\frac{q_y}{q_x} = \text{tg } \varphi = - \frac{S_{xx} - \sigma}{S_{xy}} \quad (\text{da } 1^{\text{a}} \text{ das (35)})$$

$$\frac{q_x}{q_y} = \text{cotg } \varphi = - \frac{S_{yy} - \sigma}{S_{xy}} \quad (\text{da } 2^{\text{a}} \text{ das (35)})$$

Com $\text{tg } 2\varphi = \frac{2}{\text{cotg } \varphi - \text{tg } \varphi}$, vêm:

$$\text{tg } 2\varphi = \frac{2 S_{xy}}{S_{xx} - S_{yy}} \quad \dots \dots \dots (36)$$

Fazendo nulo o determinante dos coeficientes das equações homogêneas (35), resulta a equação quadrática:

$$\sigma^2 - (S_{xx} + S_{yy})\sigma + S_{xx}S_{yy} - S_{xy}^2 = 0$$

cujas soluções terão a notação $\sigma_1 = S'_{xx}$, $\sigma_2 = S'_{yy}$:

$$S'_{xx} = \frac{S_{xx} + S_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{S_{xx} - S_{yy}}{2}\right)^2 + S_{xy}^2} \quad \dots \dots \dots (37)$$

tudo em perfeita analogia com a teoria do estado plano das tensões.

Quando se tratar das direções principais de giro, valem as mesmas fórmulas, desde que se substitua x, y, por a, b.

Supomos achadas as direções principais do deslocamento por rotação do sistema. Estudemos agora as possibilidades de simplifi-

car ainda mais a matriz por uma segunda transformação, que será, naturalmente, uma translação, para que se não percam as vantagens já obtidas pelas direções principais. Temos de executar:

$$S'' = T S' T^{tr}$$

com $T = T(\text{trans})$ conforme (27), e com S' resultante da rotação:

$$S' = \begin{vmatrix} S'_{xx} & 0 & 0 & S'_{xa} & S'_{xb} & S'_{xc} \\ 0 & S'_{yy} & 0 & S'_{ya} & S'_{yb} & S'_{yc} \\ 0 & 0 & S'_{zz} & S'_{za} & S'_{zb} & S'_{zc} \\ S'_{xa} & S'_{ya} & S'_{za} & S'_{aa} & S'_{ab} & S'_{ac} \\ S'_{xb} & S'_{yb} & S'_{zb} & S'_{ab} & S'_{bb} & S'_{bc} \\ S'_{xc} & S'_{yc} & S'_{zc} & S'_{ac} & S'_{bc} & S'_{cc} \end{vmatrix}$$

Pela dupla multiplicação matricial resultam alguns elementos iguais S'_{gh} , outros diferentes S''_{gh} . Os valores desses últimos são dados em fórmulas separadas.

$$S'' = \begin{vmatrix} S'_{xx} & 0 & 0 & S'_{xa} & S''_{xb} & S''_{xc} \\ 0 & S'_{yy} & 0 & S'_{ya} & S'_{yb} & S'_{yc} \\ 0 & 0 & S'_{zz} & S'_{za} & S''_{zb} & S'_{zc} \\ S'_{xa} & S''_{ya} & S''_{za} & S''_{aa} & S''_{ab} & S''_{ac} \\ S''_{xb} & S'_{yb} & S''_{zb} & S''_{ab} & S''_{bb} & S''_{bc} \\ S''_{xc} & S''_{yc} & S'_{zc} & S''_{ac} & S''_{bc} & S''_{cc} \end{vmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} S''_{xb} &= S'_{xb} - z'_0 S'_{xx} = S'_{xb} + z''_0 S'_{xx} \\ S''_{xc} &= S'_{xc} + y'_0 S'_{xx} \quad \text{etc., com } x''_0 = -x'_0 \\ S''_{ya} &= S'_{ya} + z'_0 S'_{yy} \quad y''_0 = -y'_0 \\ S''_{yc} &= S'_{yc} - x'_0 S'_{yy} \quad z''_0 = -z'_0 \\ S''_{za} &= S'_{za} - y'_0 S'_{zz} \\ S''_{zb} &= S'_{zb} + x'_0 S'_{zz} \\ S''_{ab} &= S'_{ab} - x'_0 y'_0 S'_{zz} + z'_0 (S'_{yb} - S'_{xa}) + x'_0 S'_{za} - y'_0 S'_{zb} \\ S''_{bc} &= S'_{bc} - y'_0 z'_0 S'_{xx} + x'_0 (S'_{zc} - S'_{yb}) + y'_0 S'_{xb} - z'_0 S'_{xc} \\ S''_{ca} &= S'_{ca} - x'_0 z'_0 S'_{yy} + y'_0 (S'_{xa} - S'_{zc}) + z'_0 S'_{yc} - x'_0 S'_{ya} \end{aligned} \right\} \dots (38)$$

$$\left. \begin{aligned} S''_{aa} &= S'_{aa} + y'_0{}^2 S'_{zz} + z'_0{}^2 S'_{yy} + 2(z'_0 S'_{ya} - y'_0 S'_{za}) \\ S''_{bb} &= S'_{bb} + z'_0{}^2 S'_{xx} + x'_0{}^2 S'_{zz} + 2(x'_0 S'_{zb} - z'_0 S'_{xb}) \\ S''_{cc} &= S'_{cc} + x'_0{}^2 S'_{yy} + y'_0{}^2 S'_{xx} + 2(y'_0 S'_{xc} - x'_0 S'_{yc}) \end{aligned} \right\} \dots (39)$$

Evidentemente, não é possível obter uma separação da matriz em 6 submatrizes independentes. Em primeiro lugar, temos os elementos S'_{gh} não alterados pela translação, que já estabelecem uma relação entre x e a , y e b , z e c . Além disso, a separação em 3 submatrizes $S_{x,a}$, $S_{y,b}$, $S_{z,c}$, não pode ser obtida porque nenhuma escolha da posição relativa das origens, dada pelos 3 parâmetros x'_0 , y'_0 , z'_0 , pode tornar nulos os 9 valores (38).

Anulando os dois primeiros valores $S''_{xb} = S''_{xc} = 0$, resultam y'_0 e z'_0 que determinam uma posição especial do eixo x'' . Para reconhecer as propriedades dêste eixo, imaginemos um deslocamento com a única componente $v''_x = 1$. Como na primeira coluna de S'' encontram-se agora só os dois coeficientes $S''_{xx} = S'_{xx}$ e S''_{xa} , a carga correspondente a êste deslocamento consiste, conforme (10), apenas numa força aplicada na direção do eixo x'' e num momento atuante num plano normal a êsse eixo. O mesmo raciocínio, mas com outra escolha dos parâmetros x'_0 , y'_0 , z'_0 , fornece posições especiais dos eixos y'' e z'' . Chamaremos tais eixos de eixos centrais do deslocamento do estaqueamento.

Estudo análogo poderia ser feito para as direções principais de giro, encontrando-se 3 eixos centrais de giro. Para simplificar a terminologia, chamaremos os eixos centrais do deslocamento simplesmente de eixos centrais, e aquêles relativos ao giro de eixos elásticos.

Todo estaqueamento (e em geral, tôda ligação elástica entre dois corpos rígidos) tem 3 eixos centrais e 3 eixos elásticos, respectivamente normais entre si, mas não se encontrando num ponto. O eixo $\left\{ \begin{array}{l} \text{central} \\ \text{elástico} \end{array} \right\}$ tem a propriedade de um $\left\{ \begin{array}{l} \text{deslocamento na direção} \\ \text{giro em tórno} \end{array} \right\}$ do eixo provocar como reação apenas uma força na direção dêle e um momento aplicado num plano normal a êsse eixo.

Encontra-se muitas vèzes o caso particular, ocasionado por

simetria ou outro motivo, de um deslocamento na direção principal provocar apenas como reação uma força na direção do eixo central, sem momento, e um giro em torno do eixo elástico produzir só momento como reação, sem força. Chamamos tais eixos de eixos puros. O eixo $\left\{ \begin{array}{l} \text{central} \\ \text{elástico} \end{array} \right\}$ puro tem a propriedade de $\left\{ \begin{array}{l} \text{uma força} \\ \text{um momento} \end{array} \right\}$ agindo $\left\{ \begin{array}{l} \text{no eixo} \\ \text{em torno do eixo} \end{array} \right\}$ provocar como movimento elástico só $\left\{ \begin{array}{l} \text{um deslocamento na direção} \\ \text{um giro em torno} \end{array} \right\}$ do eixo.

O plano formado por dois eixos centrais puros encontrando-se num ponto é o plano central do estaqueamento: um carregamento dado por forças contidas neste plano provoca movimentos elásticos paralelos ao mesmo. Pelo ponto de interseção de dois eixos centrais puros passa, normalmente ao plano, um dos eixos elásticos. Este ponto denomina-se centro elástico (C.E.) do estaqueamento.

Propriedades do centro elástico:

1. Um carregamento dado por forças contidas no plano central e aplicadas no C.E. provoca como movimento elástico somente deslocamento paralelo àquele plano, sem giro.

2. Um carregamento dado por momentos atuantes no plano central provoca como movimento elástico apenas giro em torno do C.E., paralelo ao plano central.

No caso de um estaqueamento simétrico em relação a dois planos, todos os eixos centrais e elásticos são puros, tendo-se, geralmente, dois C.E. (figura 10).

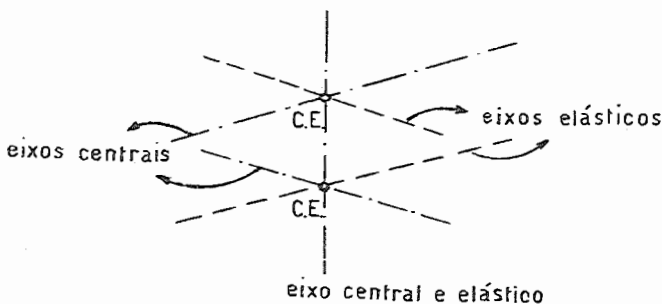


Fig.10 - Caso particular da posição dos eixos

4. O ESTAQUEAMENTO NÃO GERAL

4.1. Generalidades

As razões de execução simples impõem, nos estaqueamentos da prática, uma certa regularidade geométrica na disposição das estacas. Teremos, assim, estaqueamentos que não pertencem ao caso mais geral possível, e que permitem, por isso mesmo, certas simplificações no cálculo. Para tirar todos os proveitos simplificadores, o sistema dos eixos deve ser colocado em certas posições especiais (direções principais, centros elásticos), que resultam parcialmente sem cálculo, pela própria disposição das estacas, parcialmente calculados.

Como critério de classificação dos estaqueamentos usaremos a matriz de rigidez, que indicará, como parte decisiva do cálculo, o número de equações a resolver. Quando esta matriz for referida a eixos nas direções principais, poderemos reconhecer os estaqueamentos degenerados pelo fato de serem nulos um ou mais coeficientes da diagonal principal. Indicamos com esse nome os estaqueamentos que resistem apenas a fôrças em posições especiais. O estaqueamento não degenerado denomina-se completo.

Um motivo de degeneração pode ser um número menor do que 6 estacas (simples), mas os casos mais frequentes são causados pela disposição geométrica das estacas. Por exemplo, nas fundações de edifícios constituídas apenas por estacas verticais, o estaqueamento resiste só a fôrças verticais. A definição de degeneração pela matriz de rigidez determinada com estacas simples (articuladas no tópo e na ponta) refere-se, naturalmente, a este caso ideal. Na realidade, as fôrças horizontais serão recebidas em parte pelo engastamento das estacas, em parte pelo empuxo passivo do terreno. Estes efeitos serão estudados mais tarde, com outras hipóteses ideais mais perto da realidade.

No caso de um estaqueamento degenerado trabalhar em conjunto com outros corpos (terra, por exemplo), para resistir a fôrças quaisquer, falaremos de "estaqueamento degenerado com apoios adicionais". O estaqueamento completo também pode ter apoios adicionais, intervindo em tal caso as propriedades elásticas do es-

taqueamento como elementos de um cálculo hiperestático.

Há várias modalidades de se usar a teoria da transformação no cálculo de estaqueamentos. A primeira fase consiste na determinação das componentes dos vetores \vec{p} e dos coeficientes S_{gh} de rigidez. Escolhida, em função de S , a posição mais favorável do sistema dos eixos, segue-se:

a) O cálculo é reiniciado (determinação dos vetores \vec{p} , etc) evitando-se qualquer fórmula de transformação.

b) Transformação \vec{p} em \vec{p}' , S em S' . As componentes da carga \vec{R}' , determinadas diretamente no novo sistema, servem para solucionar as equações de equilíbrio e para a determinação das forças nas estacas, usando \vec{p}' .

c) Transforma-se somente S em S' . Resolvidas as equações, as componentes de \vec{v}' obtidas serão retransformadas em \vec{v} , e fornecerão as forças normais com o uso de \vec{p} .

d) Transforma-se S em S' , e determina-se S'^{-1} . Este valor será retransformado em S^{-1} , que fornece com facilidade as forças nas estacas, usando \vec{p} , ou determinando os vetores de influência \vec{f} .

Observe-se que, em tôdas essas transformações descritas, aparecem só os tensores T e T^{tr} , não os recíprocos. Qual a modalidade recomendável, depende das circunstâncias de cada caso particular.

De grande utilidade será a propriedade da multiplicação de matrizes separáveis, mencionada na introdução do capítulo 3. Quando a matriz de transformação T permitir a mesma separação que a matriz de rigidez S , poderemos efetuar o cálculo $S' = T S T^{tr}$ apenas com as respectivas submatrizes. No caso de estaqueamentos com matriz S separável, existe uma classe de mudanças de sistema caracterizada pelo fato de ser T separável da mesma maneira. Chamaremos tais mudanças de aparentadas. Na procura de simplificações do cálculo, convém considerar apenas as transformações aparentadas para que se não arrisque a perder a simplificação já obtida pela separabilidade de S .

4.2. Estaqueamento simétrico a um plano

Coloquemos os eixos x e y no plano de simetria, sendo x

vertical e dirigido para baixo. Pela simetria, a tóda estaca *i* corresponde uma simétrica *j*, como mostra a fig. 11 em planta baixa. Além desses pares simétricos, também pode haver estacas contidas no plano de simetria (por exemplo, estaca *k* da figura).

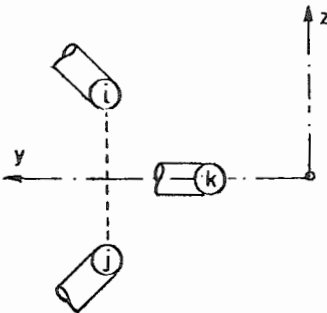


Fig. 11 - Estacas simétricas ao plano x/y

Um movimento elástico do bloco paralelamente ao plano de simetria é caracterizado pelo vetor $\vec{v} (v_x, v_y, 0, 0, 0, v_c)$. Tal movimento provocará forças nas estacas, cuja resultante, evidentemente, está contida no plano de simetria, que é plano central, portanto. A carga correspondente a esse movimento será $\vec{R} (R_x, R_y, 0, 0, 0, R_c)$. Concluímos que todo coeficiente S_{gh} com um índice do grupo x, y, c, outro do grupo z, a, b, será nulo, sendo possível a separação da matriz *S* em duas submatrizes:

$$S = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y & z & a & b & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \\ a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} = & - & 0 & 0 & 0 & - \\ - & = & 0 & 0 & 0 & - \\ 0 & 0 & = & - & - & 0 \\ 0 & 0 & - & = & - & 0 \\ 0 & 0 & - & - & = & 0 \\ - & - & 0 & 0 & 0 & = \end{bmatrix} \end{matrix} = \left\{ \begin{matrix} \begin{matrix} x \\ y \\ c \end{matrix} \begin{bmatrix} x & y & c \\ = & - & - \\ - & = & - \\ - & - & = \end{bmatrix} = S_{x,y,c} \\ \begin{matrix} z \\ a \\ b \end{matrix} \begin{bmatrix} z & a & b \\ = & - & - \\ - & = & - \\ - & - & = \end{bmatrix} = S_{z,a,b} \end{matrix} \right.$$

A transformação aparentada deste tipo de estaqueamento será aquela que não altere a simplificação já obtida por simetria, isto é, uma mudança paralela ao plano x/y. Tal mudança é dada pelas coordenadas x_0, y_0 da nova origem O' e pelo ângulo φ de rotação, considerado positivo quando x' estiver contido entre x e y , como se vê na fig. 12. Nesta figura também são indicados, nas 3 projeções, os sentidos de giro positivo (sistema destrorso), necessário para estabelecer os sinais das componentes dos vetores

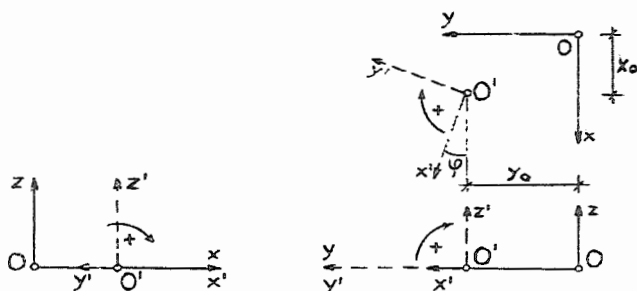


Fig. 12 - Mudança paralela ao plano x/y

semi-unitários \vec{x} e \vec{y} . Essas componentes, que são os elementos da matriz de transformação, resultam diretamente da fig. 12:

vetor \vec{x}	vetor \vec{y}	vetor \vec{z}
$q_{xx} = \cos \varphi$	$q_{xy} = \text{sen } \varphi$	$q_{xz} = 0$
$q_{yx} = -\text{sen } \varphi$	$q_{yy} = \cos \varphi$	$q_{yz} = 0$
$q_{zx} = 0$	$q_{zy} = 0$	$q_{zz} = 1$
$q_{ax} = 0$	$q_{ay} = 0$	$q_{az} = +y'_0$
$q_{bx} = 0$	$q_{by} = 0$	$q_{bz} = -x'_0$
$q_{cx} = y_0$	$q_{cy} = -x_0$	$q_{cz} = 0$

A matriz de transformação é separável da mesma maneira que a matriz S, isto é, a mudança é aparentada.

$$T = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \text{sen } \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen } \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +y'_0 & \cos \varphi & \text{sen } \varphi & 0 \\ 0 & 0 & -x'_0 & -\text{sen } \varphi & \cos \varphi & 0 \\ y_0 & -x_0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \text{sen } \varphi & 0 \\ -\text{sen } \varphi & \cos \varphi & 0 \\ y_0 & -x_0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = T_{x,y,c} \begin{vmatrix} +y'_0 & \cos \varphi & \text{sen } \varphi \\ -x'_0 & -\text{sen } \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} = T_{z,a,b}$$

Trataremos primeiro do caso de cargas aplicadas no plano de simetria.

Temos de determinar $S' = T S T^{\text{tr}}$ para poder escolher apropriadamente os parâmetros x_0, y_0, φ . Como exemplo, executaremos em extenso uma das multiplicações matriciais, dando futuramente

sempre só o resultado. Por ser aparentada a transformação, o cálculo se reduz às submatrizes respectivas:

$$\begin{vmatrix} \cos \varphi & \text{sen } \varphi & 0 \\ -\text{sen } \varphi & \cos \varphi & 0 \\ y_0 & -x_0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xc} \\ S_{xy} & S_{yy} & S_{yc} \\ S_{xc} & S_{yc} & S_{cc} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \cos \varphi S_{xx} + \text{sen } \varphi S_{xy} + 0 & \cos \varphi S_{xy} + \text{sen } \varphi S_{yy} + 0 \\ -\text{sen } \varphi S_{xx} + \cos \varphi S_{xy} + 0 & -\text{sen } \varphi S_{xy} + \cos \varphi S_{yy} + 0 \\ y_0 S_{xx} - x_0 S_{xy} + S_{xc} & y_0 S_{xy} - x_0 S_{yy} + S_{yc} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \cos \varphi S_{xc} + \text{sen } \varphi S_{yc} + 0 \\ -\text{sen } \varphi S_{xc} + \cos \varphi S_{yc} + 0 \\ y_0 S_{xc} - x_0 S_{yc} + S_{cc} \end{vmatrix}$$

0 produto desta matriz T S por

$$T^{tr} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\text{sen } \varphi & y_0 \\ \text{sen } \varphi & \cos \varphi & -x_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ fornece a matriz } S' \text{ com os elementos:}$$

$$\left. \begin{aligned} S'_{xx} &= S_{xx} \cos^2 \varphi + S_{yy} \text{sen}^2 \varphi + 2S_{xy} \text{sen } \varphi \cos \varphi \\ S'_{yy} &= S_{xx} \text{sen}^2 \varphi + S_{yy} \cos^2 \varphi - 2S_{xy} \text{sen } \varphi \cos \varphi \\ S'_{cc} &= S_{cc} + S_{xx} y_0^2 + S_{yy} x_0^2 + 2(S_{xc} y_0 - S_{yc} x_0 - S_{xy} x_0 y_0) \end{aligned} \right\} \dots (40)$$

Os valores de S'_{xx} e S'_{yy} , segundo as equações (37) e (40), são idênticos, para φ conforme (36).

$$\begin{aligned} S'_{xy} &= -(S_{xx} - S_{yy}) \text{sen } \varphi \cos \varphi + S_{xy} (\cos^2 \varphi - \text{sen}^2 \varphi) \\ S'_{xc} &= (S_{xx} y_0 - S_{xy} x_0 + S_{xc}) \cos \varphi + (S_{xy} y_0 - S_{yy} x_0 + S_{yc}) \text{sen } \varphi \\ S'_{yc} &= (S_{xx} y_0 - S_{xy} x_0 + S_{xc}) (-\text{sen } \varphi) + (S_{xy} y_0 - S_{yy} x_0 + S_{yc}) \cos \varphi \end{aligned}$$

Para tornar nulos os três últimos elementos, determinamos o ângulo φ que resulta de $S'_{xy} = 0$:

$$\text{tg } 2\varphi = \frac{2 S_{xy}}{S_{xx} - S_{yy}} \text{ (vide(36)) } \dots (41)$$

S'_{xc} e S'_{yc} serão nulos quando as expressões entre parêntesis o forem. Isto fornece duas equações para a determinação de x_0 e y_0 .

Observe-se que a origem O' assim determinada, que é o C.E., corresponde a um valor mínimo do coeficiente S'_{cc} . De fato, fazendo nulas as derivadas de S'_{cc} , obtemos as mesmas condições para x_0 e y_0 :

$$\frac{\partial S'_{cc}}{\partial x_0} = 2 S_{yy} x_0 + 2(-S_{yc} - S_{xy} y_0) = 0$$

$$\frac{\partial S'_{cc}}{\partial y_0} = 2 S_{xx} y_0 + 2(S_{xc} - S_{xy} x_0) = 0$$

Dessa maneira, provámos uma propriedade do C.E.: a rigidez contra giro elástico é mínima em tórno dêste ponto.

As coordenadas de $O' = \text{C.E.}$ resultam como soluções das duas equações:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{-S_{xc} S_{xy} + S_{yc} S_{xx}}{S_{xx} S_{yy} - S_{xy}^2} \\ y_0 &= \frac{S_{yc} S_{xy} - S_{xc} S_{yy}}{S_{xx} S_{yy} - S_{xy}^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (42)$$

Pela escolha de φ , x_0 e y_0 segundo essas equações, temos a origem O' no centro elástico, sendo x' e y' eixos centrais do estaqueamento. O terceiro eixo z não é eixo central, mas é eixo elástico.

Um carregamento que consista em fôrças e momentos situados no plano x/y e referidos ao C.E. será expresso por $\vec{R}'(R'_x, R'_y, 0, 0, 0, R'_c)$. Pela independência das equações de equilíbrio, obtemos diretamente as componentes do movimento elástico:

$$v'_x = R'_x / S'_{xx} \quad ; \quad v'_y = R'_y / S'_{yy} \quad ; \quad v'_c = R'_c / S'_{cc} \quad \dots \dots \dots (43)$$

A retransformação dêsses valores para o antigo sistema será efetuada pela matriz T^{tr} :

$$\vec{v} = T^{tr} \vec{v}' \quad \text{ou:}$$

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v'_x \cos \varphi - v'_y \sin \varphi + v'_c y_0 \\ v_y &= v'_x \sin \varphi + v'_y \cos \varphi - v'_c x_0 \\ v_c &= v'_c \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (44)$$

Essas componentes do vetor \vec{v} nada mais são do que as soluções das equações de equilíbrio no sistema original $\vec{R} = S \vec{v}$.

Pela substituição dos valores encontrados em (44) nessas equações, devem obter-se, portanto, as componentes da carga \vec{R} no sistema original, o que fornece um controle do cálculo de transformação. Em muitos casos, a solução direta das equações, sem transformação alguma, será mais simples. A vantagem de transformação é permitir um menor grau de exatidão no cálculo (régua em vez de máquina de calcular).

As forças normais nas estacas são:

$$N_i = s_i (v'_x p_{xi} + v'_y p_{yi} + v'_c p_{ci}) \dots \dots \dots (45)$$

Também podemos, depois da determinação do C.E. e das direções x' e y' , transformar as componentes das estacas por meio de

$$\left. \begin{aligned} \vec{p}' &= T \vec{p} \quad \text{ou:} \\ p'_x &= p_x \cos \varphi + p_y \sin \varphi \\ p'_y &= -p_x \sin \varphi + p_y \cos \varphi \\ p'_c &= p_c + x'_0 p_y - p_v x_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (46)$$

tendo-se diretamente as forças nas estacas:

$$N_i = s_i \left(\frac{R'_x}{S'_{xx}} p'_x + \frac{R'_y}{S'_{yy}} p'_y + \frac{R'_c}{S'_{cc}} p'_c \right) \dots \dots \dots (47)$$

Este segundo processo só é recomendável quando houver vários casos de carregamento, porque as transformações (46) devem ser aplicadas a todas as estacas, enquanto que as transformações (44) são efetuadas uma única vez para cada caso de carregamento.

Quando os eixos x e y já forem escolhidos segundo as direções principais, teremos $S_{xy} = 0, S'_{xx} = S_{xx}, S'_{yy} = S_{yy}$. Nesse caso, vem:

$$\left. \begin{aligned} x_o &= S_{yc}/S_{yy} \\ y_o &= -S_{xc}/S_{xx} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (42a)$$

$$S'_{cc} = S_{cc} - S_{xc}^2/S_{xx} - S_{yc}^2/S_{yy} \dots \dots \dots (40a)$$

As fórmulas (44) e (46) simplificam-se também com $\cos \varphi = 1$, $\text{sen } \varphi = 0$:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v'_x + v'_c y_o \\ v_y &= v'_y - v'_c x_o \\ v_c &= v'_c \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (44a)$$

$$\left. \begin{aligned} p'_x &= p_x \\ p'_y &= p_y \\ p'_c &= p_c + p_x y_o - p_y x_o \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (46a)$$

Passemos agora ao caso de cargas normais ao plano de simetria -

Esta carga, juntamente com aquela contida no plano x/y , é suficiente para representar, pela combinação delas, qualquer carregamento geral.

Para simplificar a matriz $S_{z,a,b}$, convém colocar o novo eixo z'' no respectivo eixo central, para se obter uma separação em S_z e $S_{a,b}$. Podemos efetuar a respectiva transformação, ou aplicar diretamente as equações (38) e (39), com $z_o = 0$. Por uma translação dos eixos x e y no plano x/y , vêm:

$$\begin{aligned} S''_{zz} &= S_{zz} \\ S''_{aa} &= y_o^2 S_{zz} - 2y_o S_{za} + S_{aa} \\ S''_{ab} &= -x_o y_o S_{zz} + x_o S_{za} - y_o S_{zb} + S_{ab} \\ S''_{bb} &= x_o^2 S_{zz} + 2x_o S_{zb} + S_{bb} \\ S''_{za} &= -y_o S_{zz} + S_{za} \\ S''_{zb} &= +x_o S_{zz} + S_{zb} \end{aligned}$$

Fazendo iguais a zero os dois últimos valores, encontram-se os parâmetros que determinam o eixo central z'' :

$$\left. \begin{aligned} x_o &= -S_{zb}/S_{zz} \\ y_o &= S_{za}/S_{zz} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (48)$$

Com êsses valores, obtém-se mais simplesmente:

$$\left. \begin{aligned} S''_{zz} &= S_{zz} \\ S''_{aa} &= S_{aa} - y_0 S_{za} \\ S''_{bb} &= S_{bb} + x_0 S_{zb} \\ S''_{ab} &= S_{ab} - S_{za} S_{zb} / S_{zz} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (49)$$

Se quisermos separar completamente a matriz, podemos, como segundo passo, efetuar uma rotação em tórno de z'' de um ângulo ψ. Acha-se êste ângulo, por uma dedução análoga aos casos precedentes, da condição S'''_{ab} = 0:

$$\text{tg } 2\psi = \frac{2 S''_{ab}}{S''_{aa} - S''_{bb}} \dots \dots \dots (50)$$

$$S'''_{ab} = \frac{S''_{aa} + S''_{bb}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{S''_{aa} - S''_{bb}}{2}\right)^2 + S''_{ab}{}^2} \dots (51)$$

Os eixos x''' e y''' assim determinados gozam da propriedade de um momento, com seu vetor paralelo a um dêles, provocar apenas giro em tórno do eixo, isto é, x''' e y''' são eixos elásticos do estaqueamento, segundo a definição dada no § 3.3. O terceiro eixo elástico do nosso estaqueamento em questão é o eixo z', resultante da primeira transformação para cargas no plano x/y.

Com a matriz separada

$$\left\| \begin{array}{ccc} S'''_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & S'''_{aa} & 0 \\ 0 & 0 & S'''_{bb} \end{array} \right\|$$

e com a carga $\vec{R}'''(0, 0, R'''_z, R'''_a, R'''_b, 0)$, determinam-se:

$$v''_z = R'''_z / S'''_{zz} ; v''_a = R'''_a / S'''_{aa} ; v''_b = R'''_b / S'''_{bb} .$$

A retransformação do vetor de movimento pode ser feita num único passo $\vec{v} = T^{tr} \vec{v}'''$, usando

$$T_{z,a,b}^{tr} = \begin{vmatrix} 1 & -y_0 & +x_0 \\ 0 & \cos \psi & -\text{sen} \psi \\ 0 & \text{sen} \psi & \cos \psi \end{vmatrix} \quad \text{ou:}$$

$$\left. \begin{aligned} v_z &= v_z^{III} - y_0 v_a^{III} + x_0 v_b^{III} \\ v_a &= v_a^{III} \cos \psi - v_b^{III} \text{sen} \psi \\ v_b &= v_a^{III} \text{sen} \psi + v_b^{III} \cos \psi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (52)$$

Resultam as fôrças normais nas estacas:

$$N_i = s_i (v_z p_{zi} + v_a p_{ai} + v_b p_{bi}) \dots \dots \dots (53)$$

4.3. Estaqueamentos planos

Indicaremos com êste nome os estaqueamentos com todos os eixos das estacas contidos num plano, e aqueles que se comportam como se assim o fosse.

O estaqueamento plano degenerado por $S_{zz} = S_{aa} = S_{bb} = 0$ poderia ter sido tratado como caso particular do estaqueamento simétrico a um plano. Entretanto, como os estaqueamentos planos são comuns na prática, convém estudar à parte as possibilidades de simplificação do cálculo para aproveitar inteiramente as particularidades do caso.

E de supor que os estaqueamentos com um plano de simetria, carregados nêste plano, comportam-se como estaqueamentos planos. Deduziremos primeiro a regra pela qual as estacas reais podem ser substituídas por equivalentes ao plano de simetria.

Imaginemos um par de estacas simétricas que formam um ângulo δ com o plano de simetria. Este "cavelete", considerado só, é um estaqueamento degenerado. Para um eixo x colocado na bissetriz, temos o coeficiente S_{xx} de rigidez, que é, por definição, a rigidez du ma estaca fictícia colocada nêste eixo equivalente ao cavelete em relação ao movimento v_x . Com $p_{xi} = p_{xj} = \cos \delta$, vem $S_{xx} = 2 s \cos^2 \delta$. Para podermos re-

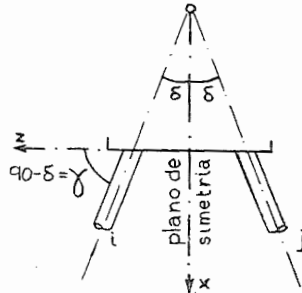


Fig. 13 - "Cavelete" simétrico

transformar a força resultante na estaca fictícia em forças nas estacas i e j , temos de imaginar o cavalete carregado com R_x . Resulta:

$$N_i = N_j = \frac{R_x}{S_{xx}} s_{px} = \frac{R_x s}{2 s \cos^2 \delta} \cos \delta = \frac{R_x}{2 \cos \delta}$$

Temos, portanto, a seguinte regra para transformar um estaqueamento carregado no seu plano de simetria em estaqueamento plano: toda estaca será colocada na sua projeção sobre o plano de simetria, multiplicando-se, ao mesmo tempo, a sua rigidez por $\cos^2 \delta$. Dividindo as forças obtidas nas estacas projetadas por $\cos \delta$, resultam as forças reais. (Estacas paralelas ao plano de simetria, com $\delta = 0$, serão, portanto, simplesmente projetadas no plano, sem se preocupar com multiplicação ou divisão).

Comencemos o estudo dos estaqueamentos planos com o caso particular de estacas paralelas. Coloquemos o eixo x paralelo às estacas, coincidente com o "eixo de gravidade", determinado pela condição:

$$\sum_{i=1}^n s_i y_i = 0$$

Praticamente a origem é calculada de maneira mais simples por meio das distâncias d medidas na planta baixa, porque a proporcionalidade

$$y_i = d_i \cos \alpha_x$$

com $\cos \alpha_x = \text{cte.}$, permite também escrever

$$\sum_{i=1}^n s_i d_i = 0$$

Os únicos elementos não nulos da matriz degenerada deste estaqueamento resultam de $p_{xi} = 1$ e $p_{ci} = y_i$, e valem:

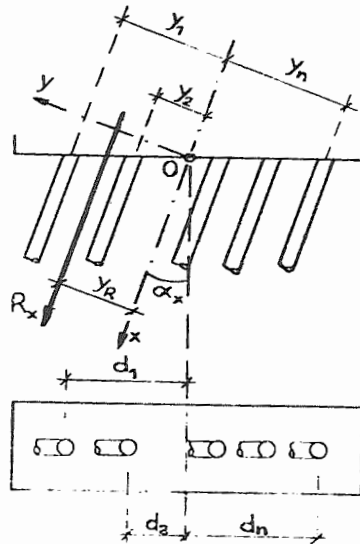


Fig. 14 - Estaqueamento plano com estacas paralelas

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^n s_i \quad ; \quad S_{cc} = \sum_{i=1}^n s_i y_i^2 \dots \dots \dots (54)$$

Para qualquer ponto no eixo de gravidade escolhido como origem, valem êsses valores e resulta também $S_{xc} = \sum_{i=1}^n s_i y_i = 0$. Podemos dizer que todo ponto do eixo de gravidade é centro elástico, no sentido de um giro em torno de tal ponto produzir só momento como reação. A outra propriedade do C.E., de que tôda fôrça por êle provoca só deslocamento paralelo, tem aqui um sentido especial porque de "tôdas as fôrças" só são permitidas as paralelas às estacas, das quais a única que passa pelo C.E. está aplicada no eixo de gravidade.

As fôrças nas estacas serão:

$$\left(N_i = \frac{R_x}{S_{xx}} + \frac{R_c}{S_{cc}} y_i \right) s_i$$

onde R_x é a fôrça paralela às estacas e $R_c = R_x y_R$ é o seu momento em relação à origem.

Na maioria dos estaqueamentos planos encontrados na prática, o centro elástico pode ser prèviamente determinado por raciocínios simples, baseados principalmente nas propriedades do caso especial estudado de estacas paralelas. Mostraremos os casos que permitem tal cálculo simplificado em forma de um quadro com figuras seguidas de explicações necessárias no texto.

Nos estaqueamentos planos, usaremos a seguinte notação:

- x, y = eixos arbitrários, mas sempre x vertical para baixo;
- x', y' = eixos centrais pelo C.E.
- r_i = distância da estaca i ao C.E., positiva quando uma tração na estaca, aplicada no bloco, produz giro positivo (anti-go p_c). Segundo a convenção feita na dedução das equações (6a), teríamos de usar a notação r_{ci} , mas suprimimos o índice c por ter aqui só uma espécie de valores r .

α_i = ângulo que forma a estaca i com a vertical

φ = " " " o eixo x' " " "

$J = \sum s_i r^2$ = momento de inércia (antigo S_{cc})

V = componente vertical da carga

H = " horizontal "

M = momento da carga em relação ao C.E.

I, II = índices para grupos de estacas paralelas

(i) = polo de influência da estaca (i) (explicação a seguir)

$M(i)$ = momento da carga em relação a (i).

CASOS PARTICULARES DE ESTAQUEAMENTOS PLANOS

1º caso: estacas aplicadas só em duas retas = cavalete simples.

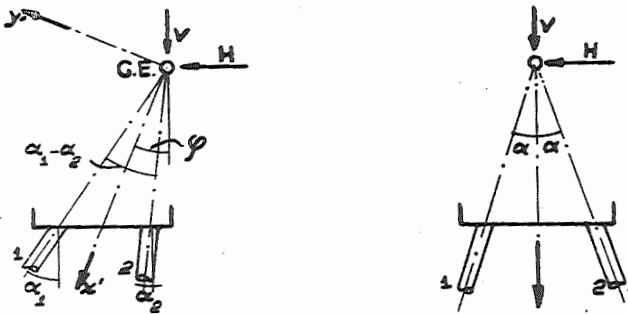


Fig. 15 - 1º Caso

C.E. na interseção das estacas

s_1, s_2 = rigidez das estacas

$$\operatorname{tg} 2 \varphi = \frac{s_1 \operatorname{sen} 2 \alpha_1 + s_2 \operatorname{sen} 2 \alpha_2}{s_1 \cos 2 \alpha_1 + s_2 \cos 2 \alpha_2} \dots\dots\dots(55)$$

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{-V \operatorname{sen} \alpha_2 + H \cos \alpha_2}{\operatorname{sen} (\alpha_1 - \alpha_2)} \\ N_2 &= \frac{V \operatorname{sen} \alpha_1 - H \cos \alpha_1}{\operatorname{sen} (\alpha_1 - \alpha_2)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(56)$$

Cavalete simétrico com $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$:

$$N = \frac{1}{2} \left(\frac{V}{\cos \alpha} \pm \frac{H}{\operatorname{sen} \alpha} \right) \dots\dots\dots(56a)$$

2º caso: uma estaca numa direção e outras numa segunda direção.

C.E. na interseção do eixo da estaca isolada com o eixo de gravidade do grupo.

Direções principais conforme (55), substituindo-se s_2 pelo valor

$$s_{II} = \sum_{i=2}^n s_i$$

$$J = \sum_{i=2}^n s_i r_i^2$$

Estaca 1: segundo (56)

Estacas do grupo

$$N_i = s_i \left[\frac{1}{s_{II}} \frac{V \sin \alpha_1 - H \cos \alpha_1}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)} + \frac{M r_i}{J} \right] \dots \dots \dots (57)$$

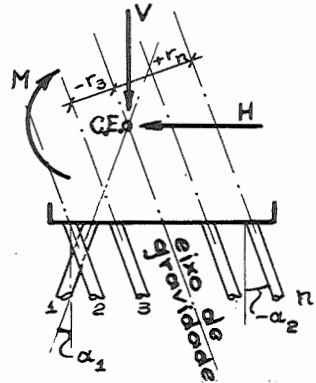


Fig.15a - 2º Caso

3º caso: estacas em duas direções.

Notação:

Grupo I: estacas 1 . . . c . . . i com α_I

" II: " j . . . k . . . n com α_{II}

C.E. na interseção dos eixos dos grupos
direções principais conforme (55) substituindo-se s_1 e s_2 pelos valores

$$s_I = \sum_{c=1}^i s_c$$

$$s_{II} = \sum_{k=j}^n s_k$$

$$J = \sum_{c=1}^n s_c r_c^2$$

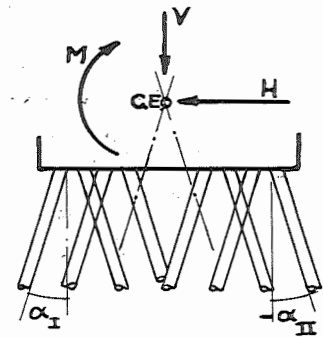


Fig.15b - 3º Caso

$$\left. \begin{aligned} \text{grupo I: } N_c &= s_c \left[\frac{1}{s_I} \frac{-V \sin \alpha_{II} + H \cos \alpha_{II}}{\sin(\alpha_I - \alpha_{II})} + \frac{M r_c}{J} \right] \\ \text{grupo II: } N_k &= s_k \left[\frac{1}{s_{II}} \frac{-V \sin \alpha_I - H \cos \alpha_I}{\sin(\alpha_I - \alpha_{II})} + \frac{M r_k}{J} \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots (58)$$

4º caso: estacas aplicadas em 3 retas

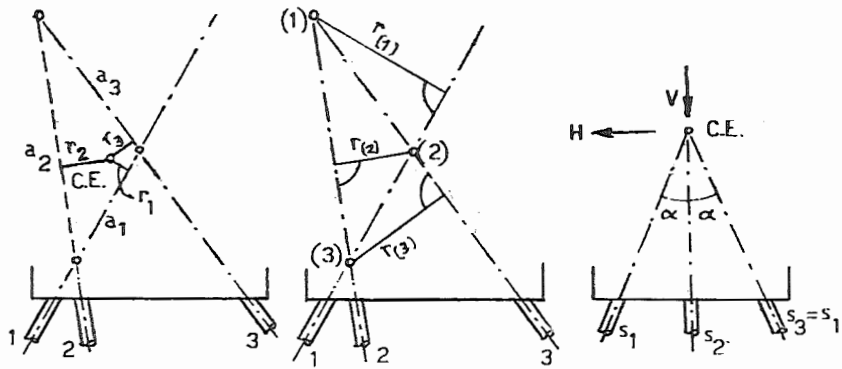


Fig. 16 - 4º Caso

C.E. contido no triângulo formado pelos eixos das estacas com $a_1 : a_2 : a_3 = r_1 s_1 : r_2 s_2 : r_3 s_3$. Mais fácil é a determinação do C.E. - aliás não necessário no cálculo dos N - pelas fórmulas gerais do estaqueamento plano.

Polos de influência (1), (2), (3); raios de influência $r(1)$, $r(2)$, $r(3)$ (vide figura).

$$N_1 = \frac{M(1)}{r(1)} \quad N_2 = \frac{M(2)}{r(2)} \quad N_3 = \frac{M(3)}{r(3)} \dots \dots \dots (59)$$

onde $M(1)$, $M(2)$, $M(3)$ são os momentos da carga em relação aos polos (o sinal de N_i resulta da posição da carga).

Outra solução: Decomposição gráfica do R nas 3 direções segundo CULMANN.

Caso particular: cavalete simétrico com $\alpha_1 = -\alpha_3 = \alpha = 0$, $s_1 = s_3$.

Valor auxiliar $\lambda = \frac{s_2}{s_1 + s_3} = \frac{s_2}{2 s_1}$

$$\left. \begin{aligned} N_3 &= \frac{1}{2} \left[\frac{V \cos \alpha}{\lambda + \cos^2 \alpha} + \frac{H}{\sin \alpha} \right] \\ N_2 &= \frac{V \lambda}{\lambda + \cos^2 \alpha} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (60)$$

*) Para $s =$ etc., C.E. = ponto LEMOINE do triângulo com construção simples

5º caso: estacas em 3 direções.

C.E. pelas formulas gerais do estaqueamento plano (é contido no triângulo formado pelos eixos dos grupos).

Frequentemente encontra-se o caso particular representado na figura 17.

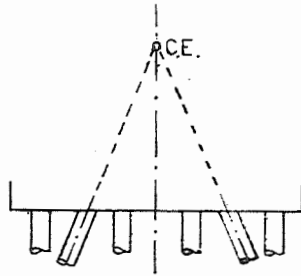


Fig.17 - Estacas em 3 direções - caso particular.

No primeiro caso deste formulário, "cavelete isostático", temos um estaqueamento isostático, que se resolve por simples decomposição das forças - equação (56). A determinação da direção principal, segundo (55), não é necessária neste caso. Também isostático é o 4º caso.

A posição do C.E. no 2º e no 3º caso resulta da propriedade mencionada atrás para o eixo de gravidade dum grupo de estacas paralelas: todo ponto deste eixo pode ser considerado centro elástico do grupo.

No caso geral de estaqueamento plano, determina-se o C.E. por cálculo. Uma estaca é dada pelo seu ângulo de cravação α e pela distância y do seu ponto de aplicação. Supomos para todas as estacas $x = 0$, isto é, que o eixo y esteja colocado na base, por hipótese horizontal, do bloco, e também $s = 1$. (Para valores s diferentes, precisamos introduzi-los como fatores dentro das somas). Assim, teremos:

$$\begin{aligned} S_{xx} &= \sum \cos^2 \alpha & S_{xc} &= - \sum y \cos^2 \alpha \\ S_{yy} &= \sum \sin^2 \alpha & S_{yc} &= - \sum y \sin \alpha \cos \alpha \\ S_{xy} &= \sum \sin \alpha \cos \alpha & S_{cc} &= \sum y^2 \cos^2 \alpha \end{aligned}$$

O cálculo desses valores é simplificado pela tabela que anexamos no fim do livro. Os valores φ , x_0 , y_0 são determinados

pelas equações (41) e (42). O resto do cálculo é feito da mesma maneira que nos estaqueamentos simétricos em relação a um plano, para "cargas aplicadas no plano de simetria". Em vez de calcular S'_{cc} pela fórmula de transformação (40), pode-se também medir no desenho as distâncias r ao C.E., obtendo-se S'_{cc} por

$$S'_{cc} = J = \sum r^2$$

Também é possível uma determinação gráfica de S'_{xx} e S'_{yy} , construindo-se o conhecido "círculo de MOHR", ou melhor, "círculo de LAND-MOHR", partindo dos valores S_{xx} , S_{yy} , S_{xy} .

No caso de poucas estacas é recomendável recomençar o cálculo com os eixos x' , y' , e $O' = C.E.$ Temos: $S'_{xx} = \sum \cos^2 \alpha'_i$; $S'_{yy} = \sum \sin^2 \alpha'_i$; $J = \sum r^2$. A fôrça numa estaca será:

$$N_i = R'_x \frac{\cos \alpha'_i}{\sum \cos^2 \alpha'_i} + R'_y \frac{\sin \alpha'_i}{\sum \sin^2 \alpha'_i} + M \frac{r_i}{\sum r_i^2} \dots \dots (61)$$

Para poder estudar sistematicamente o efeito de cargas móveis sôbre estaqueamentos planos, retomamos a teoria do vetor e do eixo de influência, desenvolvida para estaqueamentos gerais. O vetor de influência representa um movimento elástico resultante dum deslocamento unitário das seções de corte duma estaca. Tal movimento será, no nosso caso, um movimento plano, e o seu polo instantâneo é o ponto de interseção do eixo de influência com o plano do estaqueamento. Chamaremos êsses polos de polos de influência. O polo de influência da estaca k será designado por (k) . Em alguns casos determinados o polo de influência é o C.E. do estaqueamento que resta após a retirada da estaca em questão.

Já foi usado o polo de influência no "4º caso" do formulário, no qual temos a particularidade de o estaqueamento restante ser cavalete isostático. Nêste caso particular, a fôrça numa estaca resulta do momento em relação ao polo de influência respectivo multiplicado por $1/r_{(k)}$, como mostra o 4º caso (equilíbrio de momentos).

Discutiremos o caso geral do estaqueamento plano. Supomos determinado o vetor de influência \vec{f}_k para a estaca k e procuramos o polo de influência para esta estaca. Para o estaqueamento plano este vetor representa um movimento plano, isto é, \vec{f}_k contém só as componentes f_{xk}, f_{yk}, f_{ck} . O polo instantâneo deste movimento - que é o polo de influência - acha-se da seguinte forma: sendo x_k, y_k as coordenadas do polo procurado (k) e ω_k o giro em torno de (k), idêntico ao movimento \vec{f}_k , temos

$$x_k = -\frac{f_{yk}}{f_{ck}}, \quad y_k = +\frac{f_{xk}}{f_{ck}}, \quad \omega_k = + f_{ck} \dots\dots\dots(62)$$

Para estacas que têm $f_{ck} = 0$ o ponto (k) está no infinito e o movimento \vec{f}_k é uma translação, cuja direção faz o ângulo φ com o eixo x, dado por

$$\text{tg } \varphi = \frac{f_{yk}}{f_{xk}}$$

Neste caso o polo de influência só serve para considerações sobre a influência da direção da carga. A própria força da estaca resulta por

$$N_k = \vec{R} \times \vec{f}_k$$

A figura 18 mostra um exemplo de estaqueamento com os polos de influência determinados.

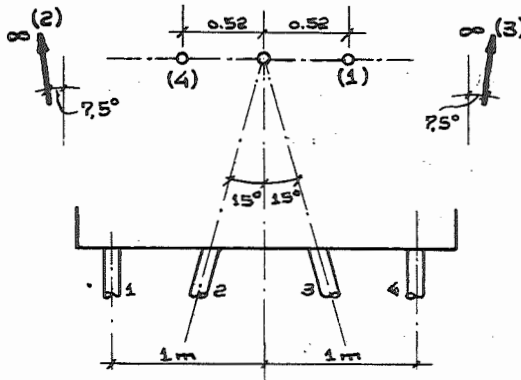


Fig. 18 - Estaqueamento plano com polos de influência

Uma vez determinados, para todas as estacas os polos de

influência (k) e os coeficientes ω_k , será fácil reconhecer a posição mais perigosa da carga móvel, que é aquela que origina máximo momento em relação a (k). A força na estaca k será:

$$N_k = \omega_k M(k) \dots \dots \dots (63)$$

4.4. Dois planos de simetria

Nas fundações de pontes, encontram-se, muitas vezes, estaqueamentos simétricos em relação a dois planos. Um plano de simetria é longitudinal à ponte, o outro transversal. Este tipo de estaqueamento permite um cálculo bem simples.

Sejam x/y e x/z os planos de simetria; x é eixo central, e a matriz S pode ser separada em 4 submatrizes, como se verifica facilmente:

$$\begin{matrix}
 & & & y & c & & & z & b \\
 & & & = & - & & & = & - \\
 x & \begin{matrix} x \\ = \end{matrix} & a & \begin{matrix} a \\ = \end{matrix} & c & \begin{matrix} y & - \\ - & = \end{matrix} & b & \begin{matrix} z & - \\ - & = \end{matrix}
 \end{matrix}$$

Conhecida esta situação, a matriz recíproca pode ser obtida com facilidade, sem nenhuma transformação. Por solução dos grupos das duas equações, vêm:

$$\left. \begin{aligned}
 \beta_{xx} &= \frac{1}{S_{xx}} & \beta_{aa} &= \frac{1}{S_{aa}} \\
 \beta_{yy} &= \frac{S_{cc}}{S_{yy}S_{cc} - S_{yc}^2} & \beta_{zz} &= \frac{S_{bb}}{S_{zz}S_{bb} - S_{zb}^2} \\
 \beta_{cc} &= \frac{S_{yy}}{S_{yy}S_{cc} - S_{yc}^2} & \beta_{bb} &= \frac{S_{zz}}{S_{zz}S_{bb} - S_{zb}^2} \\
 \beta_{yc} &= \frac{-S_{yc}}{S_{yy}S_{cc} - S_{yc}^2} & \beta_{bz} &= \frac{-S_{zb}}{S_{zz}S_{bb} - S_{zb}^2}
 \end{aligned} \right\} \dots (64)$$

As equações (14) para o cálculo das componentes elásticas têm aqui o aspecto:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \beta_{xx} R_x & v_a &= \beta_{aa} R_a \\ v_y &= \beta_{yy} R_y + \beta_{yc} R_c & v_z &= \beta_{zz} R_z + \beta_{zb} R_b \\ v_c &= \beta_{yc} R_y + \beta_{cc} R_c & v_b &= \beta_{zb} R_z + \beta_{bb} R_b \end{aligned} \right\} \dots (65)$$

e as forças nas estacas resultam da equação (13).

Em muitos casos da prática, convém não seguir este caminho de cálculo, mas procurar os centros elásticos e usar as transformações, porque a posição do C.E. em relação à posição das cargas aplicadas permite uma conclusão sobre a possibilidade de melhorar o "rendimento" do projeto. Chamamos de rendimento de projeto a relação entre o valor da carga máxima e a soma das capacidades das estacas (a concepção do projeto dum estaqueamento será tratada num capítulo especial).

No caso normal de rigidez constante $s = 1$ para todas as estacas, e de base horizontal do bloco no plano $x = 0$, temos as seguintes componentes das estacas:

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \cos \alpha & p_a &= \sin \alpha (y \cos \omega - z \sin \omega) = r_a \sin \alpha \\ p_y &= \sin \alpha \cos \omega & p_b &= z \cos \alpha \\ p_z &= \sin \alpha \sin \omega & p_c &= -y \cos \alpha \end{aligned} \right\} (66)$$

e os coeficientes de rigidez são:

$$\left. \begin{aligned} S_{xx} &= \sum \cos^2 \alpha & S_{aa} &= \sum \sin^2 \alpha (y \cos \omega - z \sin \omega)^2 = \\ S_{yy} &= \sum \sin^2 \alpha \cos^2 \omega & &= \sum r_a^2 \sin^2 \alpha \\ S_{yc} &= -\sum y \sin \alpha \cos \alpha \cos \omega & S_{zz} &= \sum \sin^2 \alpha \sin^2 \omega \\ S_{cc} &= \sum y^2 \cos^2 \alpha & S_{zb} &= \sum z \sin \alpha \cos \alpha \sin \omega \\ & & S_{bb} &= \sum z^2 \cos^2 \alpha \end{aligned} \right\} (67)$$

Na prática, usam-se, muitas vezes, estaqueamentos que contêm só estacas nos planos verticais paralelos aos planos x/y e x/z , isto é, estaqueamentos para os quais ω só possui os valores $\omega = 0$ e $\omega = 90^\circ$. Na redação das fórmulas para este caso simplificado, indicaremos com

\sum a somatória que compreende tôdas as estacas
 \sum_y " " " " as estacas com $\omega = 0$
 \sum_z " " " " " " " $\omega = 90^\circ$

as estacas verticais só aparecem em \sum_z , e não em \sum_y e em \sum_z .

$$\left. \begin{aligned} S_{xx} &= \sum \cos^2 \alpha & S_{aa} &= \sum_y z^2 \sin^2 \alpha + \sum_z y^2 \sin^2 \alpha \\ S_{yy} &= \sum_y \sin^2 \alpha & S_{zz} &= \sum_z \sin^2 \alpha \\ S_{yc} &= -\sum_y y \sin \alpha \cos \alpha & S_{zb} &= \sum_z z \sin \alpha \cos \alpha \\ S_{cc} &= \sum_y y^2 \cos^2 \alpha & S_{bb} &= \sum_z z^2 \cos^2 \alpha \end{aligned} \right\} \dots (67a)$$

Essas fórmulas adaptam-se ao caso de rigidez variável, acrescentando-se o fator s dentro das somatórias.

a) Efeito da força R_x .

$$N_i = \frac{R_x}{S_{xx}} P_{xi} \dots (68)$$

b) Efeito da força R_y e do momento R_c .

Determina-se, conforme (42a), a posição do primeiro

C.E. = $0'$:

$$x'_0 = -x_0 = -S_{yc}/S_{yy} \dots (69)$$

e, segundo (40a):

$$S'_{cc} = S_{cc} - S_{yc}^2/S_{yy}; \quad S'_{yy} = S_{yy} \dots (70)$$

Temos $R'_y = R_y$, e R_c transforma-se em:

$$R'_c = R_c + R_y y'_0 \dots (71)$$

Quando, em vez de R_y e R_c , é dada uma força horizontal H_1 na altura h_1 acima da base, temos:

$$R'_y = H_1; \quad R'_c = H_1 (x'_0 - h_1) \dots (72)$$

As componentes transformadas das estacas são:

$$P'_y = P_y ; P'_c = P_c + P_y x'_o \quad \dots \dots \dots (73)$$

$$N_i = \frac{R_y}{S_{yy}} p_y + \frac{R'_c}{S'_{cc}} p'_c \quad \dots \dots \dots (74)$$

c) Efeito do momento R_a :

$$N_i = \frac{R_a}{S_{aa}} p_a \quad \dots \dots \dots (75)$$

d) Efeito da força R_z e do momento R_b .

Este caso é análogo ao caso b), com a diferença dos sinais (compare S''_{yc} e S''_{zb} nas equações (38)). Para a origem $O'' = C.E.$, vê-se:

$$x''_o = -x_o = + S_{zb}/S_{zz} \quad \dots \dots \dots (76)$$

$$S''_{bb} = S_{bb} - S_{zb}^2/S_{zz} ; S''_{zz} = S_{zz} \quad \dots \dots \dots (77)$$

$$R''_z = R_z ; R''_b = R_b - x''_o R_z \quad \dots \dots \dots (78)$$

ou, para uma carga H_2 na altura h_2 :

$$R''_z = H_2 ; R''_b = H_2 (x''_o - h_2) \quad \dots \dots \dots (79)$$

$$P''_z = P_z ; P''_b = P_b - P_y x''_o \quad \dots \dots \dots (80)$$

$$N_i = \frac{R''_z}{S''_{zz}} p_z + \frac{R''_b}{S''_{bb}} p''_b \quad \dots \dots \dots (81)$$

As equações de (68) a (81) têm validade geral para estaqueamentos com dois planos de simetria; as equações de (66) a (67a) só valem para $x = 0$, e $s = 1$ para todas as estacas.

4.5. Estaqueamentos com um eixo de simetria

O estaqueamento tratado no § anterior é simétrico em relação ao eixo x . Podem imaginar-se estaqueamentos simétricos com relação ao eixo x , mas sem planos de simetria. O característico desta simetria em relação a um eixo é que, além de uma eventual estaca central, só há pares simétricos de

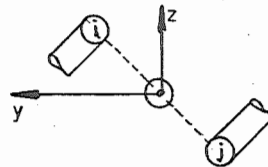


Fig. 19 - Estacas simétricas ao eixo x

estacas como i e j na figura 19.

Os movimentos elásticos v_x e v_a provocam como reações somente uma força aplicada no eixo x e um momento num plano normal a x. Isto significa que x, além de ser eixo central, com a consequência $S_{xy} = S_{xz} = S_{xb} = S_{xc} = 0$, também é eixo elástico, de forma que $S_{ya} = S_{za} = S_{ab} = S_{ac} = 0$. Restam as duas submatrizes:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} x \\ a \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline x & a \\ \hline - & - \\ \hline - & - \\ \hline \end{array} = S_{x,a} ; \quad \begin{array}{c} y \\ z \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline y & z & b & c \\ \hline - & - & - & - \\ \hline - & - & - & - \\ \hline - & - & - & - \\ \hline - & - & - & - \\ \hline \end{array} = S_{y,z,b,c}.
 \end{array}$$

Uma mudança aparentada para simplificar as matrizes consistiria numa translação de x_0 , e numa rotação de φ em torno do eixo x, conforme indica a figura 20.

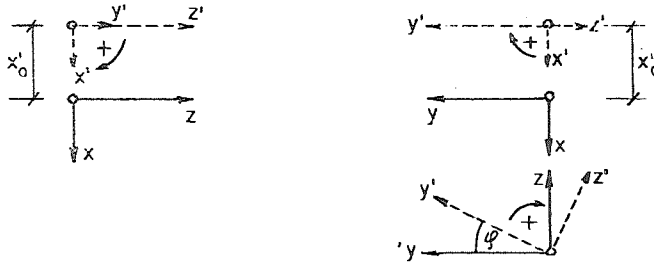


Fig. 20 - Mudança do sistema

As componentes dos eixos antigos como "estacas" no sistema novo são:

<u>vetor \vec{x}</u>	<u>vetor \vec{y}</u>	<u>vetor \vec{z}</u>
$q_{xx} = 1$	$q_{xy} = 0$	$q_{xz} = 0$
$q_{yx} = 0$	$q_{yy} = + \cos \varphi$	$q_{yz} = + \text{sen } \varphi$
$q_{zx} = 0$	$q_{zy} = - \text{sen } \varphi$	$q_{zz} = + \cos \varphi$
$q_{ax} = 0$	$q_{ay} = 0$	$q_{az} = 0$
$q_{bx} = 0$	$q_{by} = + x'_0 \text{ sen } \varphi$	$q_{bz} = -x'_0 \cos \varphi$
$q_{cx} = 0$	$q_{cy} = + x'_0 \cos \varphi$	$q_{cz} = +x'_0 \text{ sen } \varphi$

A matriz de transformação

$$T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \text{sen } \varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\text{sen } \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x'_0 \text{sen } \varphi & -x'_0 \cos \varphi & 0 & \cos \varphi & \text{sen } \varphi \\ 0 & x'_0 \cos \varphi & x'_0 \text{sen } \varphi & 0 & -\text{sen } \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}$$

é separável em

$$T_{x_a} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad T_{y,z,b,c} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \text{sen } \varphi & 0 & 0 \\ -\text{sen } \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ x'_0 \text{sen } \varphi & -x'_0 \cos \varphi & \cos \varphi & \text{sen } \varphi \\ x'_0 \cos \varphi & x'_0 \text{sen } \varphi & -\text{sen } \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}$$

Na matriz S_{x_a} as equações não podem ser separadas por transformação, porque a "matriz unitária" = T_{x_a} de transformação não influe nos coeficientes de S_{x_a} na multiplicação.

Para simplificar $S_{y,z,b,c}$, procuramos as direções principais por

$$\text{tg} 2\varphi = \frac{2S_{yz}}{S_{yy} - S_{zz}} \quad \text{conforme (36),}$$

obtendo-se, assim, $S_{yz}^2 = 0$ na transformação. Por uma translação conveniente, podemos obter os eixos centrais, mas a separação completa da matriz $S_{y,z,b,c}$ não é possível.

Nos casos práticos, recomenda-se resolver logo as 4 equações da segunda matriz, sem transformação nenhuma.

4.6. Estaqueamento com tôdas as estacas paralelas

Este é o caso mais frequente de degeneração. Para x paralelo às estacas (verticais, no caso usual), temos degeneração por $S_{yy} = S_{zz} = S_{aa} = 0$, ficando só a matriz

O estaqueamento não geral

$$\begin{array}{c}
 x \quad b \quad c \\
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 x \\
 \hline
 = \quad - \quad - \\
 \hline
 b \\
 \hline
 - \quad = \quad - \\
 \hline
 c \\
 \hline
 - \quad - \quad = \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}$$

Colocando x no eixo de gravidade do estaqueamento, temos:

$$\begin{array}{c}
 x \quad b \quad c \\
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 x \\
 \hline
 = \quad 0 \quad 0 \\
 \hline
 b \\
 \hline
 0 \quad = \quad - \\
 \hline
 c \\
 \hline
 0 \quad - \quad = \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}$$

Para separar completamente a matriz, fazemos uma rotação do sistema com

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{obtendo-se:} \\
 \text{tg } 2\varphi = \frac{2 S_{bc}}{S_{bb} - S_{cc}}, \\
 S'_{\begin{array}{cc} bb \\ cc \end{array}} = \frac{S_{bb} + S_{cc}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{S_{bb} - S_{cc}}{2}\right)^2 + S_{bc}^2}
 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (82)$$

com a matriz

$$\begin{array}{c}
 x' \quad b' \quad c' \\
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 x' \\
 \hline
 = \quad 0 \quad 0 \\
 \hline
 b' \\
 \hline
 0 \quad = \quad 0 \\
 \hline
 c' \\
 \hline
 0 \quad 0 \quad = \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}$$

Temos uma perfeita analogia com a teoria da distribuição das tensões na flexão duma barra prismática. S_{xx} desempenha o papel da área da seção, S_{bb} , S_{cc} dos momentos de inércia, e S_{bc} do momento centrífugo.

5. PROCESSOS ESPECIAIS DE CÁLCULO DE ESTAQUEAMENTO

5.1. O método de estacas equivalentes

Nos estaqueamentos com número elevado de estacas, a consideração de cada uma numa tabela é trabalhosa. Poder-se-ia pensar numa simplificação do cálculo, reunindo em grupos todas as estacas que gozam de certa característica geométrica comum. Cada grupo isolado forma um estaqueamento degenerado, com determinação fácil dos coeficientes individuais S_{gh} . Transformando todos esses valores relativos aos sistemas individuais x, y, z , para um sistema comum x', y', z' , e somando os efeitos, obtém-se a matriz comum dos S'_{gh} . Feito o cálculo do movimento elástico do sistema comum, deve ser este movimento retransformado para os sistemas individuais, a fim de se obterem as forças nas estacas.

A necessidade dessas transformações pode por em perigo toda a "simplificação" obtida pela reunião em grupos das estacas. Felizmente, existe uma possibilidade de se proceder - objetivo do § presente - pela qual essas transformações são feitas quase sem se sentir.

Imaginemos um grupo formado por uma fila retilínea de estacas verticais. Coloquemos o eixo x no eixo de gravidade da fila

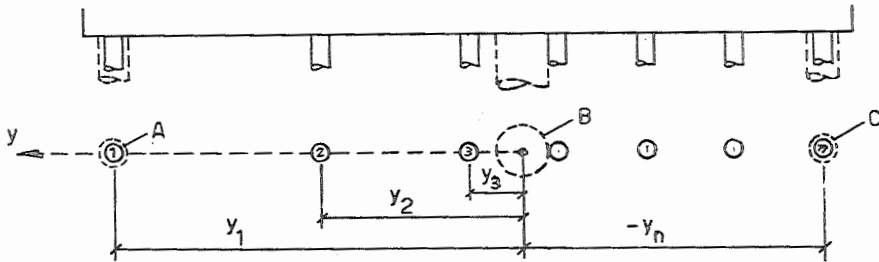


Fig. 21 - Fila de estacas verticais

de estacas, e no plano da fila; temos

$$S_{xx} = \sum s ; \quad S_{cc} = \sum s y^2$$

como únicos coeficientes de rigidez.

Determinemos três estacas equivalentes A, B, C, A e C nas

extremidades, B no centro de gravidade, com rigidez escolhida de maneira que S_{xx} e S_{cc} fiquem inalterados, isto é:

$$s_A + s_B + s_C = S_{xx}$$

$$s_A y_1^2 + s_C y_n^2 = S_{cc}$$

Para manter o centro de gravidade, deve ser:

$$s_A y_1 + s_C y_n = 0$$

As forças nas estacas da fila dependem do movimento elástico do bloco, em que intervêm somente as componentes v_x e v_c , tendo-se nas estacas extremas 1 e n, conforme (13), as forças:

$$N_1 = s_1(v_x p_{x1} + v_c p_{c1}) = s_1(v_x + v_c y_1)$$

$$N_n = s_n(v_x p_{xn} + v_c p_{cn}) = s_n(v_x + v_c y_n)$$

As forças nas outras estacas, correspondentes a uma interpolação linear entre N_1 e N_n , geralmente não interessam.

Substituindo a fila pelas 3 estacas A, B, C, teríamos:

$N_A = s_A(v_x + v_c y_1)$; $N_C = s_C(v_x + v_c y_n)$; portanto:

$$N_1 = \frac{s_1}{s_A} N_A \quad ; \quad N_n = \frac{s_n}{s_C} N_C \quad \dots \dots (83)$$

Se a fila consistir em estacas inclinadas, só muda a posição do sistema individual, com x no eixo de gravidade, e x/y

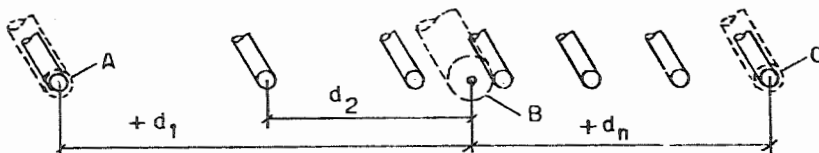


Fig. 22 - Fila de estacas inclinadas

como plano da fila. A proporcionalidade entre as coordenadas y e as distâncias medidas na planta baixa permite estabelecer as condições para s_A , s_B , s_C ; estas distâncias serão designadas por d. Podemos tomá-las com os seus valores absolutos, porque intervêm apenas os quadrados. Com B no centro de gravidade, resultam as condições :

$$\left. \begin{aligned} s_A + s_B + s_C &= \sum_{i=1}^n s_i \\ d_1 s_A - d_n s_C &= 0 \\ d_1^2 s_A + d_n^2 s_C &= \sum_{i=1}^n d_i^2 s_i \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (84)$$

As equações (83) são válidas também para a fila de estacas inclinadas.

No caso mais frequente de uma fila de estacas equidistantes, com rigidez constante, o cálculo é bem simples. Quando n for um número ímpar, uma das estacas está no centro, e teremos:

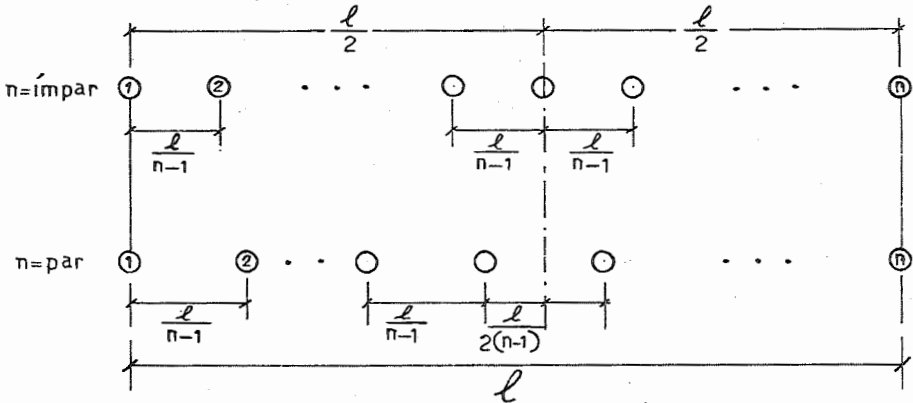


Fig. 23 - Fila de estacas equidistantes

$$S_{cc} = \sum d^2 = 2 \left(\frac{l}{n-1} \right)^2 \left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + \left(\frac{n-1}{2} \right)^2 \right] = 2 s_A \left(\frac{l}{2} \right)^2 ;$$

para n par, temos:

$$S_{cc} = \sum d^2 = 2 \left[\frac{l}{2(n-1)} \right]^2 \left[1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (n-1)^2 \right] = 2 s_A \left(\frac{l}{2} \right)^2$$

E curioso notar que resulta o mesmo s_A de ambas as equações:

$$\left. \begin{aligned} s_A = s_C &= \frac{n(n+1)}{6(n-1)} \\ s_B &= n - 2 s_A = \frac{2n(n-2)}{3(n-1)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (85)$$

Esses valores são indicados na seguinte tabela:

Número de estacas na fila n	Rigidez das estacas equivalentes	
	$s_A = s_C$	s_B
3	1,000	1,000
4	1,111	1,778
5	1,250	2,500
6	1,400	3,200
7	1,556	3,889
8	1,714	4,571
9	1,875	5,250
10	2,037	5,926
11	2,200	6,600
12	2,364	7,273
13	2,528	7,944
14	2,692	8,615
15	2,857	9,286

No cálculo prático basta, portanto, substituir, na determinação dos coeficientes S_{gh} de rigidez, a fila pelas 3 estacas A, B, C, de rigidez indicada na tabela. As componentes das estacas equivalentes A e C são as mesmas que as das estacas 1 e n, diferindo só a rigidez. Depois de determinarmos, como de costume, as componentes do movimento elástico pela solução de $\vec{R} = S \vec{v}$, obtemos as forças normais N_1 e N_n pelas equações (13), sendo $s = 1$ no caso em questão:

$$N_1 = v_x P_{x1} + v_y P_{y1} + \dots + v_c P_{c1} ; N_n = v_x P_{xn} + \dots + v_c P_{cn}$$

As forças normais nas estacas intermediárias da fila não interessam porque estão contidas entre os extremos N_1 e N_n . Eventualmente podem obter-se tais forças por simples interpolação linear.

Encontram-se, muitas vezes, filas que não são simétricas, com rigidez $s = 1 = \text{constante}$, mas não equidistantes. Nêste caso, em vez de usar a tabela, temos de calcular $s_A = s_C$ e s_B segundo as equações (84), que, para o caso de simetria, têm o aspecto mais simples ($d_1 = d_n = l/2$):

$$s_A = s_C = \frac{2}{\ell} \sum_{i=1}^{n/2} d_i^2 ; \quad s_B = n - 2 s_A \quad \dots \dots \dots (84a)$$

O índice superior $n/2$ na somatória indica que só uma metade da fila será levada em consideração.

As vantagens deste processo de estacas equivalentes são notáveis quando há um número grande de estacas numa fila. Poder-se-ia estender o processo para grupos de filas, filas de cavaletes com estacas equivalentes em 2 planos, etc., mas precisamos ficar atentos para que a "simplificação" do cálculo não fique neutralizada por uma complicação exagerada no manejo das estacas equivalentes.

5.2. Processos de iteração

5.2.1. Iteração do "excesso de carga"

Os estaqueamentos usuais, sempre simétricos ou regulares na disposição das estacas, permitem um cálculo direto relativamente simples, e não necessitam de um processo de iteração, ficando este reservado aos estaqueamentos gerais. Do ponto de vista prático, parece ser inútil o desenvolvimento de um processo especial para os casos gerais, porque nenhum engenheiro projetará, só por arrogância, um estaqueamento geral. Infelizmente, existe um destes casos gerais que, mesmo com toda a boa vontade do projetista, não pode ser evitado. E o caso de forte variação de profundidade da camada firme, que anula toda a simetria do estaqueamento pela distribuição assimétrica da rigidez nas estacas.

Todo processo de iteração necessita duma solução aproximada como ponto de partida, solução esta cujo erro será eliminado sucessivamente durante os "passos de iteração". No estaqueamento de disposição simétrica das estacas, mas com distribuição assimétrica de rigidez, oferece-se o cálculo com a suposição $s =$ constante = 1 para todas as estacas como solução aproximada. Designaremos os resultados deste cálculo pelo índice superior 0 nas letras respectivas; por exemplo, N_i^0 para a força normal na estaca i e S_{gh}^0 para o coeficiente de rigidez. Vejamos o proveito que se pode tirar de tal solução aproximada.

Entre as forças N nas estacas e as componentes do vetor \vec{v} do movimento elástico, existem as relações:

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= s_1 (p_{1x} v_x + p_{1y} v_y + \dots + p_{1c} v_c) \\ N_2 &= s_2 (p_{2x} v_x + p_{2y} v_y + \dots + p_{2c} v_c) \\ &\vdots \\ N_n &= s_n (p_{nx} v_x + p_{ny} v_y + \dots + p_{nc} v_c) \end{aligned} \right\} \dots (86)$$

cujo número é igual ao número n das estacas. Introduzindo os valores N^0 , essas n equações para as 6 incógnitas $v_x, v_y, v_z, v_a, v_b, v_c$, estarão em contradição, e uma solução aproximada segundo um critério de mínimo erro representaria uma boa aproximação dos valores reais das componentes de \vec{v} . Tal aspecto do problema convidamos a abandonar logo este caminho, porque em vez dum simplificação, apresenta-se uma complicação considerável do assunto.

Entre a carga \vec{R} e as forças internas N , existem as 6 relações:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= N_1 p_{1x} + N_2 p_{2x} + \dots = \sum_{i=1}^n N_i p_{ix} \\ &\vdots \\ R_b &= N_1 p_{1b} + N_2 p_{2b} + \dots = \sum_{i=1}^n N_i p_{ib} \\ R_c &= N_1 p_{1c} + N_2 p_{2c} + \dots = \sum_{i=1}^n N_i p_{ic} \end{aligned} \right\} \dots (87)$$

Essas relações são satisfeitas tanto pelos valores reais N como pelos valores aproximados N^0 .

Designaremos os valores resultantes do primeiro passo de iteração por meio de um índice superior I , por exemplo, v^I e N^I . Os valores das componentes de v^I resultam da solução das equações da matriz S^0 , introduzindo, por exemplo, a média aritmética da rigidez das estacas:

$$s_m = \frac{1}{n} (s_1 + s_2 + \dots + s_n)$$

Se, por exemplo, for a matriz S^0 completamente separável, teremos:

$$v_x^I = \frac{R_x}{s_m S_{xx}^o} ; v_y^I = \frac{R_y}{s_m S_{yy}^o}, \text{ etc.}$$

Com os valores reais $s_1, s_2 \dots$ calculamos, conforme (86):

$$\left. \begin{aligned} N_1^I &= s_1 (p_{1x} v_x^I + \dots + p_{1c} v_c^I) \\ \vdots \\ N_n^I &= s_n (p_{nx} v_x^I + \dots + p_{nc} v_c^I) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (88)$$

Essas forças $N_1^I \dots N_n^I$ são a solução exata do estaqueamento em questão, mas não carregado pela carga dada \vec{R} e sim por uma carga que é a resultante dos N_i^I , tomada com sinal oposto. As componentes de tal carga são os segundos membros das equações (86), substituindo os valores N_i^I .

A carga com as componentes

$$\left. \begin{aligned} R_x^I &= R_x - \sum_1^n N_i^I p_{ix} \\ R_y^I &= R_y - \sum_1^n N_i^I p_{iy} \\ \vdots \\ R_c^I &= R_c - \sum_1^n N_i^I p_{iz} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (89)$$

será chamada excesso de carga \vec{R}^I . Carregando o estaqueamento com \vec{R}^I , obtêm-se, por intermédio dos valores \vec{v}^{II} análogamente determinados, as respectivas forças normais N_i^{II} , que representam a solução aproximada. Passando novamente para as equações (89), fornecedoras de \vec{R}^{II} , e seguindo da mesma forma, resultam as forças normais procuradas em forma de série:

$$N_i = N_i^I + N_i^{II} + N_i^{III}$$

É razoável supor que essas séries serão tanto mais convergentes quanto mais perto estiver o estaqueamento simplificado do estaqueamento real.

5.2.2. Adição de estacas fictícias segundo ASPLUND

Um método análogo àquele exposto no § precedente foi pro-

posto por ASPLUND^(*), para certos tipos de estaqueamentos gerais. Imaginemos um estaqueamento geral com distribuição das estacas tal que, com um acréscimo de uma ou mais estacas, torna-se simétrico o estaqueamento. A rigidez das estacas é suposta simetricamente distribuída.

Por exemplo, o estaqueamento da fig. 24 é geral, mas torna-se simétrico pela adição das estacas fictícias 11 e 12. O "estaqueamento simplificado", base de partida do cálculo, é aqui o estaqueamento completado pelas estacas fictícias. As forças normais respectivas serão designadas por N^0 como no § precedente.

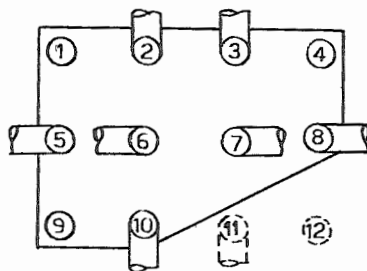


Fig. 24 - Estaqueamento com estacas fictícias

Entrando agora nos detalhes do processo, não seguiremos mais o caminho de ASPLUND, mas usaremos os nossos vetores de influência das estacas no sistema completado, designados por \vec{f}_i^0 . Esses vetores são determinados com facilidade porque o estaqueamento completado é simétrico. O uso dos vetores de influência permitir-nos-á indicar a soma das séries que representam as forças normais, tirando-se, assim, o caráter de iteração do processo. Trataremos apenas do caso de uma única estaca fictícia, designada pelo índice k , porque para duas ou mais estacas fictícias o cálculo torna-se bem mais complicado, perdendo assim o interesse prático. O índice i indica, como sempre, uma estaca genérica.

Segundo a definição do vetor de influência, as forças internas do estaqueamento completado são:

$$N_i^0 = R \times \vec{f}_i^0 \quad N_k^0 = R \times \vec{f}_k^0$$

(*) A study of three-dimensional pile-groups, Mem. Ass. Intern. Ponts et Charpentes, vol. 8, pág. 11. (1947)

Essas forças internas do estaqueamento completado são ao mesmo tempo forças internas do estaqueamento real mas carregado com $\vec{R} - N_k^0 \vec{p}_k$. Acrescentando o efeito de $+ N_k^0 \vec{p}_k$ que é o excesso de carga, obteremos os valores procurados N_i .

Aplicamos no estaqueamento completado uma força unitária na direção da estaca k, isto é, aplicamos a carga \vec{p}_k . A força interna resultante na estaca k será anotada com N_{kk} e pode ser obtida por exemplo pelo vetor de influência:

$$N_{kk} = \vec{p}_k \times \vec{f}_k$$

Para obtermos o efeito da carga \vec{p}_k sobre o estaqueamento real temos de carregar o estaqueamento completado, sucessivamente, com os excessos da carga que são sempre as forças na estaca k, quer dizer, temos de aplicar a carga

$$\vec{p}_k (1 + N_{kk}^2 + N_{kk}^3 \dots) = \vec{p}_k \frac{1}{1 - N_{kk}} = \frac{\vec{p}_k}{1 - \vec{p}_k \times \vec{f}_k}$$

A somação da série geométrica é permitida porque tem-se sempre $N_{kk} < 1$. O maior valor possível $N_{kk} = 1$ resulta nos estaqueamentos isostáticos, nos quais não se necessita do processo em questão.

Resumindo, podemos dizer que as forças internas do estaqueamento real resultam por um cálculo que considera o estaqueamento completado carregado com

$$\vec{R} + \frac{N_k^0}{1 - N_{kk}} \vec{p}_k$$

Se este cálculo é feito com os vetores de influência, tal carga precisa ser multiplicada escalarmente pelos vetores \vec{f}_i^0 . Daí resulta a expressão para o vetor de influência

$$\vec{f}_i = \vec{f}_i^0 + \frac{\vec{p}_k \times \vec{f}_i^0}{1 - \vec{p}_k \times \vec{f}_k^0} \vec{f}_k^0 \dots \dots \dots (90)$$

5.2.3. Iteração das equações de equilíbrio

O caminho mais indicado para um processo de iteração é a solução direta das 6 equações $\vec{R} = S\vec{V}$ por este processo. Nos estaqueamentos com aspecto simétrico, mas com distribuição assimétrica da rigidez, este método é geralmente mais rápido do que a iteração do "excesso de carga" mostrada no § 5.2.1.

Como se sabe, a iteração só é possível quando os elementos da diagonal principal são maiores que os restantes, porque, como primeiro passo da iteração, usam-se os valores aproximados $v_x^I = R_x/S_{xx}$ ou $v_y^I = R_y/S_{yy}$, etc. O estudo do estaqueamento simplificado consiste, porém, neste processo, só na escolha mais vantajosa da posição dos eixos (origem no C.E. por exemplo), para que se obtenha predominância dos elementos na diagonal principal.

A determinação dos coeficientes S_{gh} com os valores dados da rigidez é, naturalmente, mais trabalhosa que aquela no caso $s = 1$, mas não é complicada, como mostra o 6º exemplo numérico.

5.3. Estacas engastadas, tubulões

5.3.1. Teoria geral

Nos estaqueamentos não degenerados, o efeito das forças não axiais nas estacas é quase sempre pequeno. Já nos estaqueamentos degenerados, todo carregamento que sai do quadro das "cargas permitidas" produz efeito não desprezível. Típica para a transmissão de forças não axiais é a fundação em tubulões. A grande capacidade de carga indica muitas vezes um projeto com menos de 6 tubulões, o que já traz em si a degeneração e a necessidade de se preverem forças internas não axiais para cargas arbitrárias. Mais frequente ainda é a degeneração pelo fato de haver só tubulões verticais, motivado pela execução complicada de tubulões inclinados.

No texto que se segue, falaremos somente de estacas, ficando subentendido o caso de tubulões, caracterizado pela maior capacidade. As estacas tratadas até agora, com forças normais sempre axiais, serão chamadas estacas simples, sendo este § dedicado às estacas fletidas.

A introdução de forças não axiais nas estacas pode ser provocada por

- a) engastamento da extremidade superior no bloco
- b) engastamento da ponta no terreno
- c) reação lateral do terreno sobre as estacas, devida ao movimento elástico do bloco.

Introduziremos todos êsses efeitos no cálculo como proporcionais ao movimento elástico. Sempre será possível escolher convenientemente os parâmetros respectivos para não se afastar muito da realidade na zona interessante. Naturalmente surge aqui o defeito comum de todos os cálculos baseados na lei de HOOKE de fornecer tensões máximas, forças internas, etc., mas de não indicar a própria capacidade de carga, que se encontra numa zona onde não há mais proporcionalidade. Um dos parágrafos seguintes será dedicado à determinação da capacidade.

Para podermos considerar o efeito da rigidez duma estaca sobre a rigidez total do estaqueamento, imaginemos um sistema individual de eixos com x no eixo da estaca. Os valores individuais S_{gh} deste sistema são os parâmetros que caracterizam o comportamento da estaca, e a transformação dos valores S_{gh} para o sistema comum x', y', z' , permite obter os valores comuns S'_{gh} devidos à soma dos efeitos das estacas.

Começemos com a estaca articulada no bloco e engastada no terreno, como indica a fig. 25. A posição indicada do sistema in-

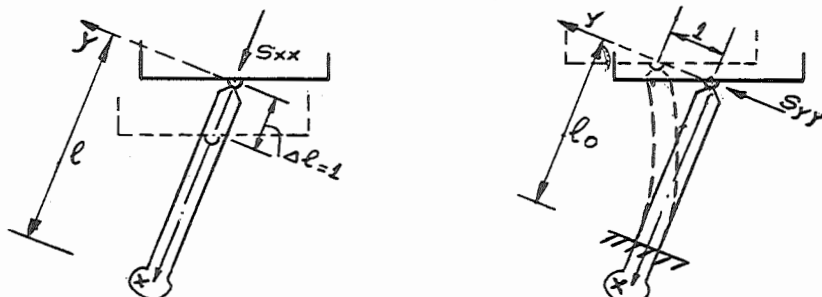


Fig. 25 - Estaca articulada no bloco, engastada no terreno
 O sistema individual é x no eixo da estaca e a origem O na articulação. A estaca forma um "estaqueamento" degenerado, sendo não nulos apenas

os coeficientes S_{xx} , S_{yy} e S_{zz} , porque a resistência contra giro na articulação, S_{aa} , pode ser desprezada. O fato de o eixo da estaca ser uma reta implica em $S_{xy} = 0$, e, se o perfil da estaca for simétrico (círculo, quadrado, por exemplo), teremos também $S_{yy} = S_{zz}$. Numa estaca cuja seção não tenha simetria circular (retângulo, perfil H de aço, etc.), coloca-se y e z nos eixos centrais da seção para manter $S_{xy} = 0$.

A articulação que serviu para a origem do sistema individual é, ao mesmo tempo, C. E. do "estaqueamento" formado pela estaca individual. Podemos observar que S_{xx} é idêntico à rigidez s da estaca simples.

Quando a estaca for articulada na ponta e engastada no bloco, nada se muda no formulário, mas a origem deve ser colocada na ponta da estaca para coincidir com o C. E. A força S_{yy} que atua no bloco e produz o deslocamento transversal unitário pode ser imaginada como sendo aplicada num braço rígido solidário com o bloco, como se vê na fig. 26.

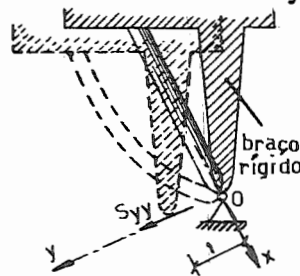


Fig. 26 - Estaca articulada na ponta

Passando agora para uma estaca engastada em ambas as extremidades, temos de escolher convenientemente a posição da origem para obter a matriz individual mais simples possível. Isto só pode ser feito por um cálculo preliminar.

Colocando provisoriamente a origem na extremidade superior da estaca, teremos os seguintes coeficientes não nulos da matriz individual: S_{xx} , S_{yy} , S_{yc} , S_{zz} , S_{zb} , S_{aa} , S_{bb} , S_{cc} (vide fig. 27).

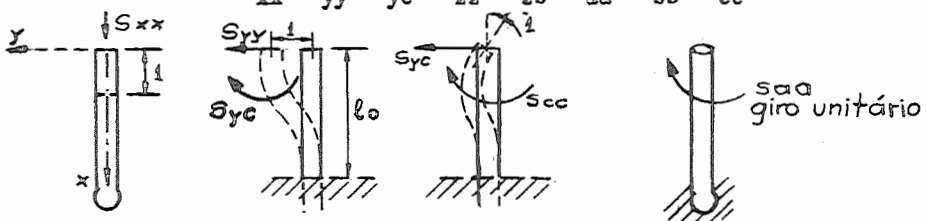


Fig. 27 - Coeficientes de rigidez individual

Os eixos y e z são supostos eixos centrais da seção da estaca. Se esta seção tiver simetria circular, teremos $S_{yy} = S_{zz}$ e $S_{zb} = -S_{yc}$, (negativo, de acordo com as convenções feitas).

Como se sabe da teoria da transformação, os centros elásticos da estaca encontram-se nas profundidades

$$\bar{x}_0 = -x'_0 = S_{yc}/S_{yy} \quad \text{e} \quad \bar{x}_0 = -x''_0 = -S_{zb}/S_{zz}.$$

Limitar-nos-emos ao caso em que êsses valores são iguais, o que acontece, naturalmente, para seções de simetria circular, e ainda nos casos gerais em que o engastamento no terreno pode ser representado por um engastamento perfeito na profundidade l_0 .

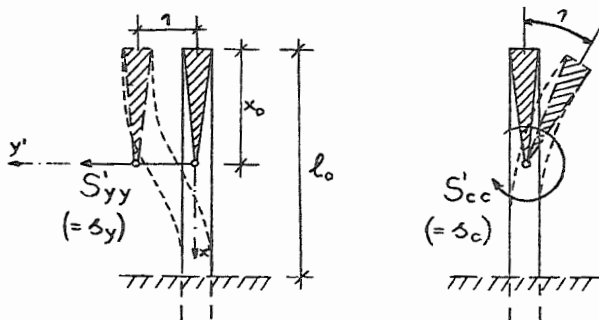


Fig. 28- Coeficientes de rigidez para a origem no centro elástico

Colocando a origem $0'$ no C.E., obteremos uma matriz com elementos não nulos apenas na diagonal principal, sendo

$$\begin{aligned} S'_{xx} &= S_{xx}, & S'_{yy} &= S_{yy}, & S'_{zz} &= S_{zz}, & S'_{aa} &= S_{aa} \\ S'_{bb} &= S_{bb} - \bar{x}_0 S_{zb}, & S'_{cc} &= S_{cc} - \bar{x}_0 S_{yc} \end{aligned}$$

A fig. 28 mostra o movimento elástico para os coeficientes de rigidez atuando como forças ou momentos no bloco, e aplicados num braço rígido solitário com o bloco (naturalmente S'_{cc} pode agir diretamente no bloco).

Podemos, portanto, escolher sempre os eixos individuais da

estaca de forma que se obtenha a matriz individual com elementos não nulos só na diagonal principal. Isto permite convencionar uma nova notação dos coeficientes individuais da estaca, necessária para simplificar a redação das fórmulas respectivas ao estaqueamento.

Notações.

O_i = origem individual da estaca i, colocada na articulação, se houver, caso contrário, no C. E. individual (tratamos só do caso normal em que coincidem ambos os C.E.).

x_i = eixo individual x colocado no eixo da estaca i.

y_i, z_i = eixos individuais y, z, colocados nos eixos centrais da seção da estaca, ou, nas seções com simetria circular, colocados arbitrariamente no plano normal a x_i , sendo de preferência um desses eixos paralelo ao plano y/z do sistema comum do estaqueamento.

Ou:

x_i, y_i, z_i = coordenadas de O_i no sistema comum x/y/z.

x_0 = distância de O_i à extremidade superior da estaca.

	estaca sem articulação		estaca com articulação
$S_i =$	$\begin{vmatrix} s_{xi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{yi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{zi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{ai} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{bi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{ci} \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} s_{xi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{yi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{zi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

S_i = matriz individual de rigidez da estaca i, sendo

- s_{xi} = rigidez contra compressão axial
- s_{yi}, s_{zi} = rigidez contra deslocamento transversal medido no "braço" x_0 , na altura do C.E.
- s_{ai} = rigidez contra torção
- s_{bi} = rigidez contra giro em torno do eixo y_i
- s_{ci} = " " " " " " " " z_i

Para estacas com seção de simetria circular (círculo, polígono regular), temos $s_{yi} = s_{zi}$, $s_{bi} = s_{ci}$

$$T_i = \begin{pmatrix} i_{xx} & i_{xy} & i_{xz} & 0 & 0 & 0 \\ i_{yx} & i_{yy} & i_{yz} & 0 & 0 & 0 \\ i_{zx} & i_{zy} & i_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ i_{ax} & i_{ay} & i_{az} & i_{xx} & i_{xy} & i_{xz} \\ i_{bx} & i_{by} & i_{bz} & i_{yx} & i_{yy} & i_{yz} \\ i_{cx} & i_{cy} & i_{cz} & i_{zx} & i_{zy} & i_{zz} \end{pmatrix} =$$

= matriz individual de transformação da estaca. Os elementos i_{gh} são as componentes dos eixos individuais tomados como "vetores" no sistema comum.

\vec{P}_i = vetor individual do esforço solicitante na estaca i , sendo as componentes P_{xi} , P_{yi} , P_{zi} aplicadas na origem individual O_i .

Esforços solicitantes na extremidade superior da estaca:

N_i = compressão axial na estaca

M_{yi} , Q_{yi} = momento fletor e força cortante para flexão no plano x/y

M_{zi} , Q_{zi} = momento fletor e força cortante para flexão no plano x/z

M_{xi} = momento de torção

\vec{v}_i = vetor do movimento elástico do bloco expresso no sistema individual $x_i/y_i/z_i$.

Na determinação dos parâmetros de rigidez s_{xi} , s_{yi} ... s_{ci} , que caracterizam o comportamento da estaca, intervêm raciocínios de mecânica dos solos que não serão tratados aqui. Só queremos observar que o efeito de engastamento pode ser levado em conta por um comprimento efetivo l_0 , considerando-se a estaca perfeitamente engastada nesta profundidade (vide as figuras 25 e 27). Na determinação de s_{xi} , convém desprezar o atrito lateral e calcular com o comprimento total l . Verifica-se facilmente que, com essas suposições, resultam os parâmetros da seguinte maneira (índice da

estaca suprimido):

a) estaca com articulação

$$\left. \begin{aligned} s_x &= \frac{EF}{\ell} \\ s_y &= s_z = \frac{3 EJ}{\ell_o^3} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (93)$$

(J = momento de inércia da seção,
F = área da seção da estaca).

b) estaca sem articulação

$$\left. \begin{aligned} x_o &= \ell_o/2 \\ s_x &= \frac{EF}{\ell} \\ s_y &= s_z = \frac{12 EJ}{\ell_o^3} \\ s_b &= s_c = \frac{EJ}{\ell_o} \\ s_a &= \frac{GJ_t}{\ell'} \end{aligned} \right\} \dots \dots (94)$$

(G = módulo de elasticidade transversal,
J_t = momento de inércia contra torção.
ℓ' = comprimento efetivo de engastamento contra torção).

A relação entre ℓ e ℓ_o não pode ser dada numa forma geral, por exemplo ℓ_o = 1/2 a 2/3 ℓ, porque depende da relação entre a rigidez da estaca à flexão (EJ) e a compressibilidade do solo. Além disto, o próprio método de trabalhar com um comprimento efetivo ℓ_o só merece confiança quando abaixo desta profundidade houver camadas bem mais resistentes. Normalmente, a resistência lateral das camadas superiores aumentará os valores s_y = s_c e diminuirá a distância x_o.

Entre as componentes do vetor \vec{P} do esforço solicitante e êsses esforços mesmos, existem, na extremidade superior da estaca, as relações:

$$\left. \begin{aligned} N &= P_x \\ M_y &= P_c + x_o P_y \\ Q_y &= P_y \\ M_z &= P_b - x_o P_z \\ Q_z &= P_z \\ M_t &= P_a \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (95)$$

As fórmulas para M_y e M_z resultam do fato de P_y e P_z serem aplicadas no C.E. (vide fig. 28).

O itinerário do próprio cálculo é o seguinte: transforma-se a matriz individual S_i de cada estaca para o sistema comum por meio de $T_i S_i T_i^{tr}$, resultando a matriz da rigidez do estaqueamento por soma dos elementos respectivos obtidos:

$$S = \sum_{i=1}^n T_i S_i T_i^{tr} \dots \dots \dots (96)$$

Depois de resolvidas as equações $\vec{R} = S \vec{v}$, transforma-se \vec{v} em \vec{v}_i para cada estaca, efetuando

$$\vec{v}_i = T_i^{tr} \vec{v} \dots \dots \dots (97)$$

O vetor do esforço solicitante numa estaca i é dado por

$$\vec{P}_i = S_i \vec{v}_i = S_i T_i^{tr} \vec{v} \dots \dots \dots (98)$$

e os esforços respectivos pelas equações (95).

Esta perspectiva de um cálculo trabalhossíssimo exclue a aplicação prática em casos gerais. Apesar dêste pessimismo, não consideramos perdido o esforço no desenvolvimento dessas fórmulas, porque só o conhecimento das relações gerais permite-nos aproveitar inteiramente as possibilidades de um cálculo aproximado, objetivo dos próximos §§.

5.3.2. Processos aproximados

Um primeiro estudo das possibilidades de um cálculo aproximado conduz à idéia de determinar o movimento elástico do estaqueamento com estacas simples, e de calcular depois as solicitações integrais das estacas supondo existente tal movimento elásti-

co. Em outras palavras, consideram-se, na determinação de S, só os coeficientes individuais s_{xi} , supondo $s_{yi} = s_{zi} = \dots = s_{ci} = 0$, mas na retransformação de \vec{v} em \vec{P}_i , conta-se com todos os coeficientes.

Este processo, não muito complicado, é bem análogo ao método clássico de determinar as solicitações secundárias em treliças devidas aos nós rígidos. Não seguiremos este caminho porque encontra-se um defeito grave: nos estaqueamentos degenerados, por cargas fora do quadro permitido, onde o estudo seria interessante, o processo falha completamente porque a matriz S aproximada permanece com valores nulos nos coeficientes essenciais, obtendo-se, assim, movimentos elásticos infinitos. Por outro lado, as pequenas solicitações devidas ao engastamento em estaqueamentos não degenerados, ou em degenerados com cargas permitidas, poderiam ser calculadas por este processo, mas tais solicitações quase nunca interessam porque são mesmo secundárias.

Limitando-nos ao caso interessante de estaqueamento degenerado, podemos proceder da seguinte maneira: separamos da carga total \vec{R} a parte \vec{R}_N que pode ser recebida só por forças normais nas estacas e determinamos as forças internas para esta carga permitida \vec{R}_N , como se fossem estacas simples. Fica uma parte $\vec{R}_F = \vec{R} - \vec{R}_N$, que deve ser recebida por flexão nas estacas. A aproximação consiste em desprezar a flexão no estudo do efeito de \vec{R}_N , o que está em concordância com a boa experiência do engenheiro com a "inteligência do material". Naturalmente, na consideração de \vec{R}_F , tentaremos também usar aproximações o mais possível para simplificar o cálculo.

Como é mais difícil indicar regras gerais para a aplicação do processo, passaremos para alguns casos especiais.

5.3.3. Cavalete plano carregado no seu plano

Cavalete plano é um estaqueamento com 2 ou mais estacas coplanares cujos eixos encontram-se num ponto, que é o C. E. A carga \vec{R} , que é uma força no plano do cavalete, será separada numa força \vec{R}_N , passando pelo C.E., e \vec{R}_F , que é um momento aplicado no

plano.

Determinam-se as forças normais N nas estacas devidas à parte \vec{R}_N da carga, por simples decomposição de forças no caso de duas estacas, ou por intermédio dos coeficientes S_{xx} , S_{yy} , S_{xy} para mais de duas estacas, colocando a origem no C.E. Naturalmente, a suposição de as estacas serem simples, base deste cálculo, não fornece nenhuma rigidez S_{cc} para resistir a \vec{R}_F .

O coeficiente S_{cc} resulta da resistência transversal das estacas provocada por um giro unitário em torno de C.E. = 0. Tal giro provoca na estaca um deslocamento lateral e um giro, como mostra a figura 29.

O calculista enfrentará o cavelete carregado com momento principal para julgar o efeito de uma pequena excentricidade involuntária da carga, porque ninguém vai projetar voluntariamente caveletes com grande excentricidade de carga. Para julgar tal efeito secundário, convém fazer uma aproximação grosseira, ganhando assim um cálculo simples. Supomos $s_c = 0$ ficando como reação da estaca no giro unitário do bloco, só a força $e_i s_{yi}$, segundo a fig.29, onde s_y é a reação para o deslocamento unitário, e e_i é a distância do C.E. individual ao C.E. comum. Devemos, portanto, simplesmente distribuir o momento $R_F = M$ sobre tais forças atuantes com os braços e_i . Resulta:

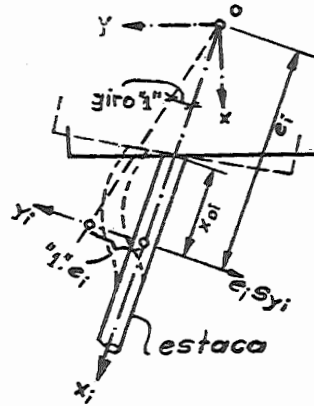


Fig.29 - Giro unitário

$$P_{yi} = \frac{e_i s_{yi}}{\sum_{i=1}^n e_i^2 s_{yi}} \cdot M$$

e o momento na extremidade superior da estaca é

$$M_{yi} = P_{yi} x_{oi} = \frac{x_{oi} e_i s_{yi}}{\sum_{i=1}^n e_i^2 s_{yi}} M \dots \dots \dots (99)$$

Normalmente, a rigidez s_{yi} contra deslocamento horizontal é constante em tôdas as estacas, e também a distância x_o do centro elástico, resultando assim:

$$M_{yi} = \frac{x_o e_i}{\sum_{i=1}^n e_i^2} M \dots \dots \dots (99a)$$

No cavalete plano o cálculo segundo a teoria geral também é relativamente simples. Dêduziremos a matriz S respectiva, que pode servir para justificar o cálculo aproximado, introduzindo os dados numéricos de um certo problema.

Na transformação por meio de T_i , trata-se de uma mudança no plano x/y , e os elementos que intervêm nesta operação são:

vetor \vec{x}_i	vetor \vec{y}_i	vetor \vec{z}_i
$i_{xx} = \cos \alpha$	$i_{xy} = -\text{sen} \alpha$	$i_{xz} = 0$
$i_{yx} = \text{sen} \alpha$	$i_{yy} = \cos \alpha$	$i_{yz} = 0$
⋮	⋮	$i_{zz} = e$
$i_{cx} = 0$	$i_{cy} = e$	⋮

$$T_i = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\text{sen} \alpha & 0 \\ \text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & e & 1 \end{vmatrix}$$

Com

$$S_i = \begin{vmatrix} s_{xi} & 0 & 0 \\ 0 & s_{yi} & 0 \\ 0 & 0 & s_{ci} \end{vmatrix}$$

resulta, pela execução da multiplicação matricial

$$T_i S_i T_i^{tr} = \begin{vmatrix} s_{xi} \cos^2 \alpha_i + s_{yi} \text{sen}^2 \alpha_i & (s_{xi} - s_{yi}) \text{sen} \alpha_i \cos \alpha_i & -e_i s_{yi} \text{sen} \alpha_i \\ (s_{xi} - s_{yi}) \text{sen} \alpha_i \cos \alpha_i & s_{xi} \text{sen}^2 \alpha_i + s_{yi} \cos^2 \alpha_i & +e_i s_{yi} \cos \alpha_i \\ -e_i s_{yi} \text{sen} \alpha_i & +e_i s_{yi} \cos \alpha_i & s_{yi} e_i^2 + s_c \end{vmatrix}$$

Somando as contribuições de tôdas as estacas para cada elemento, acha-se a matriz S do estaqueamento.

O cálculo aproximado explicado atrás usa a seguinte matriz:

$$S = \begin{vmatrix} \sum s_{xi} \cos^2 \alpha_i & 0 & 0 \\ 0 & \sum s_{xi} \sin^2 \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & \sum s_{yi} e_i^2 \end{vmatrix}$$

A aproximação é explicada pelo fato de ser sempre $s_y \ll s_x$, e também $s_c \ll s_y e^2$, e $e \ll e^2$. Além disto, os valores

$$S_{xy} = \sum (s_{xi} - s_{yi}) \sin \alpha_i \cos \alpha_i$$

$$S_{xc} = -\sum e_i s_{yi} \sin \alpha_i$$

são nulos para cavaletes simétricos.

A comparação do S_{yy} exato com o S_{yy} aproximado indica claramente que o cálculo de cavaletes com pequena inclinação das estacas, carregadas com fôrças horizontais consideráveis, não pode ser feito com a suposição de as estacas serem simples, mesmo se a fôrça estiver aplicada exatamente no C. E. Para um α_i pequeno começa a predominar a parcela $s_{yi} \cos^2 \alpha_i$ em relação a $s_{xi} \sin^2 \alpha_i$, mesmo se for s_{yi} bem menor que s_{xi} . Isto significa que, em tais cavaletes, sempre será mobilizada a resistência das estacas contra deslocamento horizontal, criando-se, assim, flexão nas estacas.

5.3.4. Estaqueamento com tôdas as estacas paralelas

Supomos que tôdas as estacas (verticais) tenham os C.E. individuais na mesma profundidade x_0 . Colocamos o eixo x no eixo de gravidade das estacas e os eixos y e z nas direções principais determinadas segundo (82).

Seja a carga uma fôrça \vec{R} com posição arbitrária. Para achar uma solução aproximada, temos de decompor esta fôrça numa componente vertical $V = R_x$ recebida pelas fôrças internas N, e numa horizontal H recebida pela flexão. Aqui também convém supor $s_c = 0$ em comparação a s_y aplicado no seu braço x_0 e ainda $s_y =$ constante = 1 em tôdas as estacas.

Pela suposição provisória de as estacas serem simples (sem rigidez à flexão), nem todos os graus de liberdade do movimento do bloco são suprimidos, ficando livre todo deslocamento horizontal. Tal movimento cria nas estacas, realmente não simples, forças aplicadas na profundidade x_0 , resultantes da multiplicação a_y pelo deslocamento. Daí segue-se que só uma força H aplicada num plano desta profundidade pode ser recebida apenas pela flexão nas estacas.

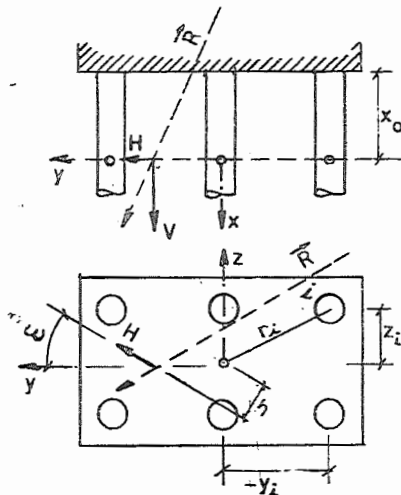


Fig. 30-Estaqueamento com estacas verticais.

Determinam-se H como indica a fig. 30, e o seu braço h ao centro das estacas. A força H aplicada no centro produz um deslocamento de translação, com distribuição uniforme das forças sobre as estacas, sendo o momento de flexão

$$M_{\text{translação}} = x_0 \frac{H}{n}$$

O momento $H.h$ cria um giro com distribuição do esforço proporcional aos raios r (vide fig. 30)

$$M_{\text{giro}} = x_0 \frac{r}{\sum r^2} Hh$$

Para facilitar a superposição dos dois momentos é melhor decompor H em $R_y = H \cos \omega$ e $R_z = H \sin \omega$, calculando as componentes P_y e P_z do esforço solicitante. Temos:

$$S_{aa} = \sum r_i^2 = \sum y_i^2 + \sum z_i^2$$

$$S_{yy} = S_{zz} = n \text{ (número das estacas)}$$

$$v_a = Hh/S_{aa}$$

$$v_y = H \cos \omega / S_{yy}$$

$$v_z = H \sin \omega / S_{zz}$$

Na estaca i é:

$$v_{yi} = v_y - z_i v_a = \frac{H \cos \omega}{n} - z_i \frac{Hh}{\sum r_i^2} = P_{yi} \text{ porque } s_y = 1$$

$$v_{zi} = v_z + y_i v_a = \frac{H \sin \omega}{n} + y_i \frac{Hh}{\sum r_i^2} = P_{zi}$$

$$\left. \begin{aligned} M_{yi} &= x_o P_{yi} = Hx_o \left(\frac{\cos \omega}{n} - \frac{z_i h}{\sum r_i^2} \right) \\ M_{zi} &= x_o P_{zi} = Hx_o \left(\frac{\sin \omega}{n} + \frac{y_i h}{\sum r_i^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (100)$$

Usando as componentes de \vec{R} segundo a convenção normal, teríamos:

$$\left. \begin{aligned} M_{yi} &= x_o \left(\frac{R_y}{n} - \frac{R_a}{\sum r_i^2} \cdot z_i \right) \\ M_{zi} &= x_o \left(\frac{R_z}{n} - \frac{R_a}{\sum r_i^2} \cdot y_i \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (100a)$$

No cálculo exato do caso em questão, temos, como transformação de S_i , uma translação no plano y/z. Os eixos individuais y_i , z_i são supostos paralelos aos comuns y, z. Segundo a equação(27):

$$T_i = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z_i & +y_i & 1 & 0 & 0 \\ +z_i & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -y_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

A equação (96) fornece:

$$S_{xx} = \sum_1^n s_{xi} \quad (\text{igual ao cálculo aproximado})$$

$$S_{xy} = S_{xz} = S_{xa} = S_{yz} = S_{yb} = S_{yc} = S_{zb} = S_{zc} = S_{ab} = S_{ac} = 0$$

$$S_{yy} = S_{zz} = \sum_1^n s_{yi} \quad (\text{igual ao cál.aprox.})$$

$$S_{ya} = - \sum s_{yi} z_i = 0 \text{ para simetria (= 0 no cál. aprox.)}$$

$$S_{za} = + \sum s_{yi} y_i = 0 \quad " \quad " \quad (= 0 \quad " \quad " \quad ")$$

$$S_{aa} = \sum s_{ai} + \sum s_{yi} (y_i^2 + z_i^2) \quad (= \sum s_{yi} (y_i^2 + z_i^2) \text{ no cál. aprox.})$$

$$S_{bb} = \sum s_{bi} + \sum s_{xi} z_i^2 \quad (= \sum s_{xi} z_i^2 \text{ no cál. aprox.})$$

$$S_{cc} = \sum s_{ci} + \sum s_{xi} y_i^2 \quad (= \sum s_{xi} y_i^2 \quad " \quad " \quad ")$$

A comparação com os respectivos valores do cálculo aproximado inspira muita confiança neste cálculo simples. Naturalmente, há casos em que o cálculo aproximado não pode satisfazer. Por exemplo, quando a resistência lateral da camada superior for baixa ou nula (água), o desprezo da rigidez individual à torção não é mais permitido - principalmente quando só há 2 ou 3 estacas (tubulões).

5.3.5. Estaqueamento com estacas paralelas a um plano

Geralmente tais estaqueamentos têm um plano de simetria, sendo tôdas as estacas paralelas a êste plano. Colocando x/y no plano de simetria, temos degeneração por $S_{zz} = 0$. Todos os outros coeficientes da diagonal principal são diferentes de zero se não houver mais alguma particularidade na disposição das estacas.

Faremos só um cálculo aproximado dêste caso. O único grau de liberdade deixado livre pelas estacas supostas simples é o deslocamento v_z . Neste deslocamento, serão mobilizadas as fôrças $s_{zi} v_z$ aplicadas nos centros elásticos.

O cálculo consiste em determinar o eixo de gravidade de tais fôrças, escolher êste eixo como eixo z (origem no plano de simetria), determinar as componentes da carga R em relação a êsse sistema de referência, calcular o estaqueamento da maneira usual para as componentes R_x, R_y, R_a, R_b, R_c e distribuir R_z uniformemente sôbre as estacas ($s_y = s_z = \text{constante}$), tendo-se:

$$M_{zi} = x_0 \frac{R_z}{n} \dots \dots \dots (101)$$

em tôdas as estacas.

5.4. Cálculos segundo a capacidade

5.4.1. Teoria geral

Em todos os ramos da Estática o projeto com base nas tensões admissíveis começa a ser substituído por um estudo da capacidade, tomando-se uma certa fração deste valor como carga admissível.

Para podermos definir a capacidade, imaginemos um estaqueamento solicitado por uma carga em posição invariável, mas de valor crescente a partir de zero. No início teremos um acréscimo de deslocamentos proporcional ao acréscimo do valor da carga. Depois, na estaca mais carregada, acontecerá um escoamento plástico, por exemplo por afundamento no terreno, e, em consequência, os deslocamentos do bloco aumentam mais fortemente que a carga.

Chamaremos de capacidade o valor da carga para o qual os deslocamentos crescem sem aumentar a carga. Para uma outra posição da carga, naturalmente a capacidade também é outra.

O ponto de partida do nosso estudo da capacidade dum estaqueamento será a capacidade duma estaca isolada. Não discutiremos em detalhe as considerações de "resistência" e de "mecânica dos solos" pelas quais esse valor será determinado. Queremos apenas lembrar o fato conhecido de que, em certos casos, a capacidade de um grupo de estacas pode ser bem menor que a capacidade duma estaca vezes o número delas. Isto sempre acontece quando o estaqueamento pode falhar por formação de uma superfície comum de escoamento do terreno. Em tais casos, a determinação da capacidade é um problema da "mecânica dos solos", e as considerações deste § não podem ser aplicadas.

Quando a capacidade duma estaca é atingida por escoamento do próprio material da estaca, tal capacidade é um valor fixo, não havendo influência recíproca entre as estacas. Até na flambagem de

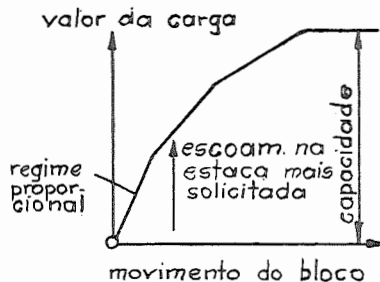


Fig.31-Definição da capacidade de carga

estacas parcialmente enterradas podemos considerar que a carga N_{F1} seja mantida nos deslocamentos crescentes do bloco, se as condições geométricas da extremidade superior não se modificarem durante este movimento.

O valor do coeficiente de segurança, relação entre a capacidade de carga e a carga admissível, também não será discutido aqui. Só desejamos lembrar que este coeficiente não precisa ser muito grande pelo mesmo motivo que permite a existência dos conhecidos pequenos valores deste fator na mecânica dos solos: a probabilidade pequena de ultrapassar a carga prevista, devido à grande porcentagem da carga morta nas fundações. Naturalmente, o coeficiente de segurança deve cobrir as incertezas do cálculo e da previsão dos parâmetros característicos, se esta previsão não tiver sido feita com o pessimismo necessário.

O núcleo estático do problema da determinação da capacidade dum estaqueamento dado apresenta-se da seguinte forma: E dada a capacidade C_i de cada estaca. Também é dada a posição da carga pelo vetor \vec{r} semi-unitário, isto é, $r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = 1$, seguindo as outras componentes as regras de um "vetor de estaca", conforme (6). O valor máximo possível da carga, expresso por $\vec{R}_{\text{máx.}} = K \vec{r}$, é aquele para o qual os deslocamentos crescem sem aumentar R . O problema consiste na determinação de K , chamado capacidade do estaqueamento.

Temos de pensar ainda numa particularidade que pode surgir na determinação da capacidade K . Geralmente a capacidade das estacas à tração é bem menor que aquela à compressão. Nos estaqueamentos com tração nas estacas intervêm, portanto, outro valor limite C' . No que se segue colocaremos só a letra C para simplificar a redação, ficando subentendida a substituição de C por C' , se for o caso.

Imaginemos o estaqueamento sob a ação de uma carga crescente $\vec{R} = R \vec{r}$ com $0 < R < K$. Seja a estaca m a mais solicitada segundo um cálculo normal (elástico). Suponhamos que, para um certo valor R_1 , N_m atinja C_m . Para cargas $R > R_1$, o estaqueamento não segue mais as regras do cálculo "elástico", mas as forças normais

podem ser determinadas da seguinte forma: $N_m = C_m$ não é mais incógnita, e sim força dada, que pode ser incluída na carga. Temos, portanto, de fazer um cálculo para a carga.

$$\vec{R} = R \vec{r} - \sum C_m \vec{p}_m$$

Nêste cálculo teremos uma surpresa bem desagradável : Para efeito de cálculo, o estaqueamento não contém mais a estaca m , sendo no lugar dela aplicada uma força constante C_m . Assim, tôdas as vantagens de simetria, etc., são perdidas, obtendo-se um caso geral. Podemos salvar a situação recorrendo ao método de estaca fictícia de ASPLUND, que resolve brilhantemente tais casos de falta de uma estaca para estabelecer a simetria. Mas quando outras estacas atingem o valor constante C , o método de ASPLUND torna-se muito difícil.

Geralmente os casos intermediários de escoamento parcial não interessam, mas só o valor K . Dando-se à $R =$ variável valores sempre crescentes, tira-se cada vez mais estacas da sua função de elemento elástico da estrutura, até restar um estaqueamento isostático, que contém, no caso geral, 6 estacas. Uma dessas ainda pode atingir o valor $N = C$, sendo nêste momento atingido o limite $R = K$.

O problema contém duas partes: primeiro reconhecer quais são as $n - 5$ estacas com $N = C$, segundo calcular K . Começaremos com a segunda parte, supondo feita a escolha das 5 estacas "sobreviventes" por intuição, o que é possível em muitos casos. As somatórias que contém as $n-5$ estacas com escoamento serão designadas por \sum_{es} , sendo m a respectiva estaca genérica, e as somatórias que contém as 5 estacas elásticas são \sum_{el} , com a estaca genérica i . A carga que deve ser recebida pelas 5 estacas i no momento em que se atinge a capacidade é

$$\vec{R} = K \vec{r} - \sum_{es} C_m \vec{p}_m$$

O equilíbrio de R com as 5 forças incógnitas N_i exige:

$$\vec{R} = \sum_{el} N_i \vec{p}_i$$

A equação vetorial:

$$K \vec{r} - \sum_{es} C_m \vec{p}_m = \sum_{el} N_i \vec{p}_i \dots \dots \dots (102)$$

equivale a 6 equações formadas com as componentes, nas quais encontramos como incógnitas K e os 5 valores N_i . Uma solução completa dessas 6 equações não é necessária porque só interessa a incógnita K. Aplicando-se, por exemplo, o processo de eliminação de GAUSS, coloca-se K no último lugar do esquema, parando o cálculo quando for determinado K. Em muitos casos práticos há possibilidade de simplificar o problema, como veremos mais tarde.

Voltamos agora para a primeira parte, que é a escolha das estacas m. As 5 estacas i que ficam elásticas até o fim encontram-se, naturalmente, entre as menos carregadas na fase de todo o estaqueamento ser elástico, mas não há meio de fazer a separação certa com base apenas num cálculo elástico. O caminho ortodoxo seria determinar, num primeiro cálculo elástico, a estaca mais carregada m, repetir tal cálculo com $N_m = C_m$, determinando N_l como máximo, base de novo cálculo com $N_m = C_m$, $N_l = C_l$, e percorrer desta forma todas as fases intermediárias até sobrarem 5 estacas i.

Se a determinação de K por meio de escolhas arbitrárias não for muito complicada, recomenda-se outro procedimento: Determina-se o valor K para todas as escolhas consideradas possíveis de serem as verdadeiras. A escolha certa é aquela que fornece o valor mínimo de K.

Passaremos agora aos casos particulares, na pesquisa de simplificações do processo geral.

5.4.2. Casos simples de solução direta

Em primeiro lugar temos de citar o caso de estaqueamento isoestático, que contém, no caso geral, 6 estacas não coplanares ou 3 no plano, e no caso particular de cavaletes, 3 estacas no espaço ou 2 no plano (estacas paralelas entre si formam também "cavaletes", com C.E. no infinito). Basta, em tais casos, fazer um único cálculo elástico, adotando, por exemplo, $R = 1$. Designando-se as forças normais resultantes deste cálculo por $N_{i,1}$, a capa-

cidade será dada por simples proporcionalidade:

$$K = C_m / N_{m, l} \quad (103)$$

sendo m a estaca na qual esta fração tem o valor mínimo.

Também simples é o caso de estaqueamento com dois planos de simetria onde a resultante da carga é uma força aplicada na interseção destes planos. As estacas que atingem ao mesmo tempo, com o crescer da carga, o valor limite C, formam sempre um grupo simétrico cuja resultante é uma força axial. Seja x o eixo de simetria; portanto $\vec{r} = \vec{x}$. A capacidade K resulta da projeção de todas as forças C_i sobre o eixo x:

$$K = \sum C_i p_{xi} \quad (104)$$

Finalmente, temos o caso mais simples possível: todas as estacas de mesma capacidade, paralelas e carregadas no eixo de gravidade, onde temos simplesmente:

$$K = n C$$

5.4.3. Estaqueamentos com plano de simetria carregados neste plano

Para cargas no plano de simetria, o estaqueamento comporta-se como se fôsse plano. No cálculo elástico tínhamos projetado as estacas sobre o plano, acrescentando o fator $\cos^2 \delta$ (δ = ângulo da estaca com o plano). No cálculo plástico este fator é só $\cos \delta$, porque duas estacas simétricas com a força normal $N = C$ têm a resultante $2C \cos \delta$.

A determinação de K como problema plano é bem simples. O estaqueamento torna-se isostático quando sobrarem 3 estacas, das quais 1 atingirá o valor limite C. Acha-se K, portanto, por simples decomposição duma força. Numéricamente, temos 3 equações, conforme (102):

$$K r_x - C \sum_{es} p_{xm} = \sum_{el} N_i p_{xi}$$

$$K r_y - C \sum_{es} p_{ym} = \sum_{el} N_i p_{yi}$$

$$K r_c - C \sum_{es} p_{cm} = \sum_{el} N_i p_{ci}$$

As somatórias dos segundos membros contêm só duas parcelas, correspondentes às duas estacas "sobreviventes".

Em muitos casos recomenda-se a solução gráfica. A fig. 32

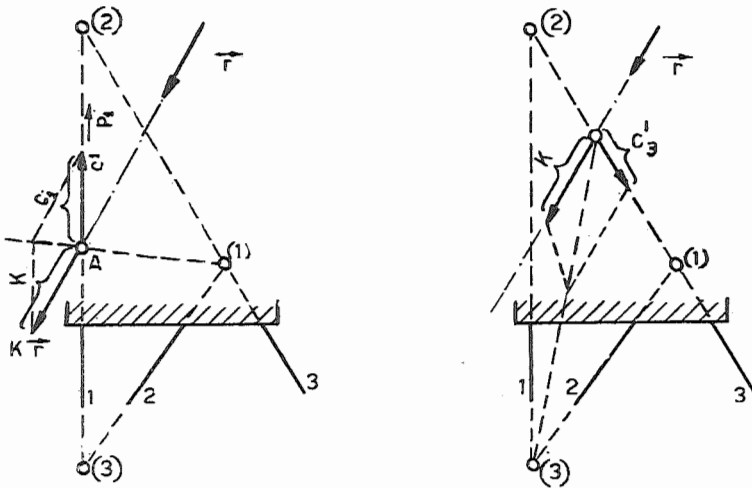


Fig.32 - Capacidade para 3 estacas

mostra um estaqueamento com estacas aplicadas em 3 retas. E dada a reta de aplicação da carga pelo vetor \vec{r} . A posição desta reta em relação aos 3 pontos de influência já indica que a estaca 1 será a mais solicitada. No caso limite teremos o cavalete composto pelas estacas 2 e 3, carregado pela soma das forças $K\vec{r}$ e $C_1\vec{p}_1$, ou seja, a força $K\vec{r} + C_1\vec{p}_1$ deve passar pelo ponto (1). Procura-se, portanto, o ponto A de interseção do eixo da estaca 1 com a reta de aplicação da carga, coloca-se o valor C_1 na linha de 1, e obtém-se K da maneira indicada na fig. 32. É necessário ainda verificar se a estaca 3 não é decisiva para a capacidade, porque esta estaca trabalha à tração com valor provavelmente melhor que a capacidade individual C_3^i . A construção é indicada à direita da fig. 32, e o me-

por dos dois valores de K é o certo.

A determinação gráfica da capacidade dum estaqueamento plano com mais de 3 estacas pode ser reduzida ao caso precedente, como mostra a fig. 33. Supomos reconhecidas as estacas 1 e 2 como aquelas que entram em regime plástico. Determina-se a resultante

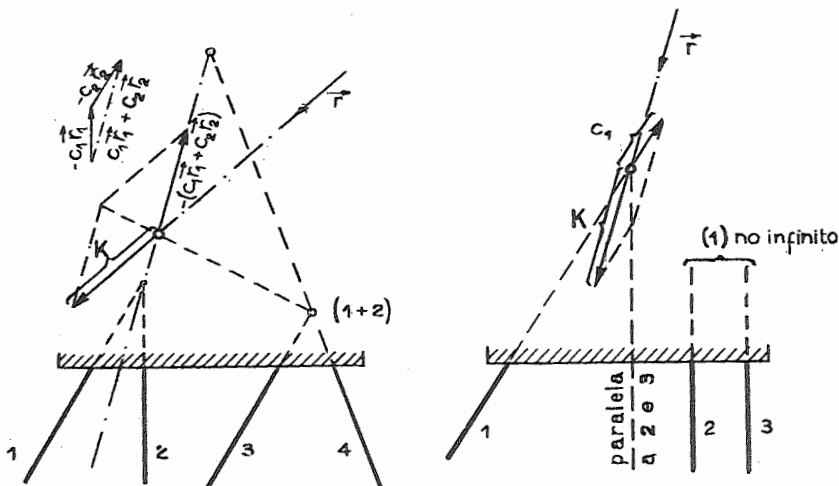


Fig. 33-Capacidade de um estaqueamento plano. Fig. 34-Capacidade no caso de estacas paralelas.

das forças normais máximas destas estacas, desempenhando esta resultante o papel da estaca plástica.

Quando forem paralelas as estacas afetadas por escoamento, basta colocar a resultante na posição certa. No caso de paralelismo das duas estacas "sobreviventes", a fig. 34 indica a solução.

Na aplicação prática desses processos gráficos, nota-se o grande inconveniente de serem tôdas as linhas quase verticais, ficando incertos os pontos de interseção. Convém fazer a construção gráfica numa escala deformada, por exemplo a horizontal 5 a 10 vêzes maior que a vertical. Nesta anamorfose o paralelismo nos polígonos das forças fica mantido, precisando-se tomar cuidado apenas nos comprimentos dos segmentos que representam forças. Convém colocar no desenho sempre a projeção vertical das forças, por exemplo $C_i \cos \alpha_i$, que não fica alterada na anamorfose.

No caso de cavalete plano, esta deformação do desenho não

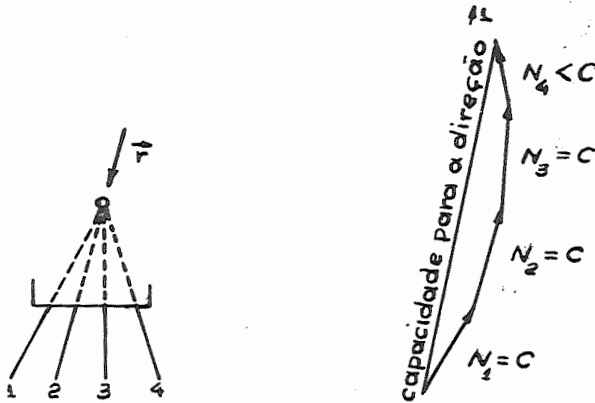


Fig. 35 - Cavalete plano

é necessária porque não há pontos de interseção, ficando todo o processo gráfico resumido à construção de polígonos de fôrças. Indica-se na fig. 35 a determinação da capacidade de um cavalete plano.

5.4.4. O conjunto dos valores da capacidade

A capacidade K é, naturalmente, uma função da posição da carga, expressa pelo vetor semi-unitário \vec{r} , na forma $\vec{R} = K \vec{r}$. Existe uma relação semelhante, como aquela encontrada no §.2.7., para a carga admissível R_A em função da posição dada por \vec{r} . K também é uma função (escalar) dos 5 parâmetros de que depende \vec{r} . Aqui também este espaço 5-dimensional é dividido em zonas, havendo discontinuidade da função K nos limites dessas zonas. Cada zona é relacionada a uma estaca responsável pelo valor K nesta zona.

No problema elástico as estacas responsáveis são as mais carregadas para uma certa posição \vec{r} . Aqui as responsáveis são aquelas que entram em último lugar em regime plástico.

O problema parece ser complicado demais para se poder tirar um proveito prático. Retomaremos o assunto para o caso plano em outro capítulo.

5.5. Estaqueamentos com apoios adicionais

5.5.1. Sistemas isostáticos

Quando o bloco não pode exercer livremente o movimento elástico correspondente à carga e à rigidez, temos um estaqueamento com apoio adicional. O apoio adicional pode ser uma estrutura anexa, ou o próprio terreno lateral do bloco. Se as forças reativas que agem entre o bloco e o apoio resultam só de considerações de equilíbrio, temos sistema isostático (o próprio estaqueamento pode ser hiperestático). Tal caso só é possível quando o estaqueamento for degenerado com certos graus livres de movimento.

A solução sempre é simples, observado o princípio de que o apoio adicional deve fornecer as componentes necessárias para transformar a carga dada em carga "permitida" ao estaqueamento.

Como caso típico trataremos do estaqueamento com estacas paralelas e com bloco enterrado,

conforme a fig. 37. A carga dada será decomposta, no plano horizontal de aplicação do empuxo, numa componente vertical recebida pelas estacas e numa horizontal transformada em empuxo. Vê-se que a posição da linha de aplicação de V depende da altura h do empuxo reativo. Convém fazer

o cálculo para dois valores extremos de h , devido à incerteza da determinação desta altura. O momento R_a de torção do estaqueamento será inteiramente recebido pelo empuxo. Para facilitar tal efeito, é conveniente evitar uma forma circular do bloco. Naturalmente, deve ser estudada a resistência do terreno a êsses efeitos horizontais, e o efeito eventualmente prejudicial do deslocamento necessário para provocar as reações do terreno.

Na fig. 38 está representado um cavalete plano carregado por força vertical V e momento M . Para receber o momento, temos os

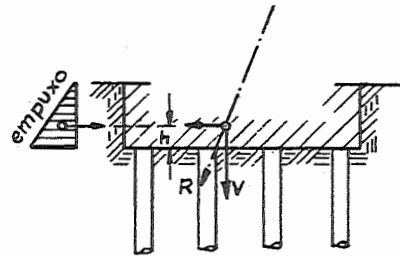


Fig. 37 - Terreno como apoio adicional

seguintes elementos à disposição: a rigidez das estacas contra giro e contra deslocamento horizontal, e a reação do terreno lateral ao bloco. A distribuição do momento sobre êsses 3 elementos far-se-á proporcionalmente às respectivas contribuições para a rigidez contra o giro. Em muitos casos predomina o efeito do empuxo, resultando $E = M/h$. Basta, portanto, calcular tal estaqueamento para a força vertical V e uma força horizontal $H = E$. Naturalmente o efeito do giro obtido aqui também deve ser estudado.

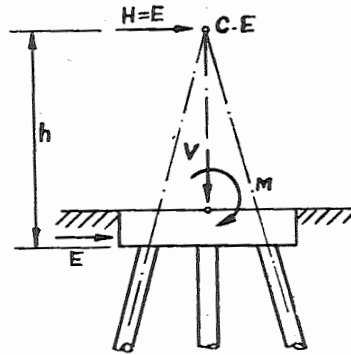


Fig.38-Cavalete carregado com momento

Em lugar do terreno, o papel de apoio adicional também pode ser desempenhado por elementos estruturais, como vigamentos, etc. Nesses casos, o deslocamento obtido é mais controlável e geralmente sem efeito prejudicial.

5.5.2. Sistemas hiperestáticos

Sempre que um estaqueamento não degenerado for ligado a uma outra estrutura resultará um sistema hiperestático. Todavia,

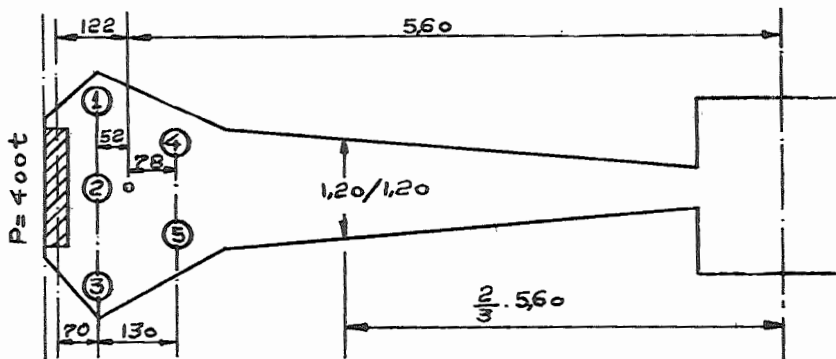


Fig. 39 - Fundação sobre estacas com "vigá-alavanca"

estaqueamentos degenerados podem fazer parte de tal sistema.

Por exemplo, a fig. 39 representa o caso característico da fundação dum pilar de edifício situado na margem do terreno. O efeito da excentricidade do carregamento é recebido pela "viga-alavanca", ligada à outra extremidade do bloco vizinho. Normalmente, calculam-se as cargas nas estacas como se tivesse a viga apóio articulado no centro do estaqueamento:

$$N = \frac{1}{5} \cdot 400 \cdot \frac{5,60 + 1,22}{5,60} = 89 \text{ t.}$$

Para calcular o sistema composto de bloco e viga, confor-

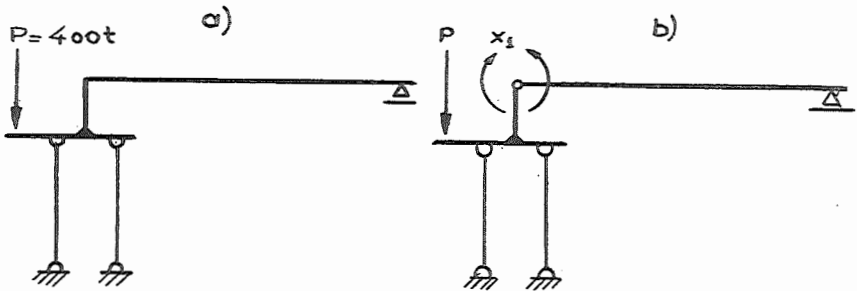


Fig.40 - Sistema composto de bloco e viga

me fig. 40, adotamos como valor hiperestático o momento de engastamento da viga no bloco. Num cálculo aproximado, convém introduzir a seção da viga num terço do vão e calcular como se fosse $J = \text{cte}$. Tal processo seria certo para uma projeção horizontal triangular da viga (altura = cte.). Adotaremos valores numéricos para ter uma idéia do efeito do engastamento.

- Estacas de concreto armado, $\phi = 0,5 \text{ m}$, comprimento = 10 m.
- Viga de concreto armado com a seção 1,20/1,20 m, no terço do vão.

$$\text{Viga: } J = \frac{1,2 \times 1,2^3}{12} = 0,173 \text{ m}^4.$$

No estaqueamento temos:

$$s = \frac{EF}{l} = \frac{0,196}{10} E = 0,0196E$$

$$S_{cc} = s(3 \times 0,52^2 + 2 \times 0,78^2) = 2,03s = 0,040 E$$

Giros elásticos no ponto de aplicação de X_1 :

$$\delta_{10} = \frac{400 \times 1,22}{S_{cc}} = \frac{400 \times 1,22}{0,04E} = \frac{12\ 300}{E}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{S_{cc}} + \frac{l}{3EJ} = \frac{1}{0,04E} + \frac{10}{3 \times 0,173E} = \frac{41,4}{E}$$

$$X_1 = \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{12\ 300}{41,4} = 296 \text{ tm}$$

Solicitação nas estacas:

$$R_x = 400 + \frac{296}{5,6} = 453 \text{ t}$$

$$R_c = 400 \times 1,22 - 296 = 192 \text{ tm}$$

$$N_1 = \frac{453}{5} + \frac{192}{2,03} \times 0,52 = 90,6 + 49,3 = 139,9 \text{ t}$$

2
3

$$N_4 = \frac{453}{5} - \frac{192}{2,03} \times 0,78 = 90,6 - 74,0 = 16,6 \text{ t}$$

Este resultado difere muito do cálculo aproximado, que forneceu $N = 89 \text{ t}$ em tôdas as estacas. Naturalmente esta diferença cresce com o diâmetro das estacas e diminui quando crescem o comprimento das estacas e a seção da viga.

A diferença sensível entre o cálculo elástico exato e o cálculo usual da prática pode provocar duas reações mentais no leitor crítico:

1ª possibilidade de reagir: Deve ser abandonado o costume de projetar blocos na forma da fig. 39, porque praticamente só trabalham as estacas da fila externa. Os inúmeros estaqueamentos assim projetados só resistiram graças aos nossos grandes coeficientes de segurança, e as estacas da fila interna são praticamente inúteis.

2ª possibilidade de reagir: O cálculo elástico "exato" não serve. O problema deve ser atacado sob o ponto de vista da capacidade. Sob a ação de uma carga crescente, começa a haver escoamento na fila externa, atingindo-se finalmente a distribuição uniforme da carga sobre as estacas. Assim fornecerá o cálculo aproximado a base

certa do projeto.

Ao nosso ver, a segunda opinião merece mais confiança,mas não queremos negar que uma disposição de tôdas as estacas numa só fila, como se mostra na fig. 41, é estaticamente mais clara. Muitas vêzes, porém, tal disposição não é possível por falta de espaço, além de ser bem anti-econômico um bloco comprido sôbre 5 ou mais estacas, por causa dos fortes momentos fletores.

A decepção que tivemos com o cálculo elástico do exemplo da figura 39 não deve formar em nós a idéia de que tal cálculo jamais terá valor. Se, por exemplo, um bloco de estacas for apóio duma estrutura engastada (arco ou pórtico), um

cálculo elástico do conjunto fornece os esforços solicitantes na seção do engastamento. Mesmo quando a intuição indicar que o bloco pode ser considerado como "rígido" em relação à estrutura em questão, convém verificar êste fato por um cálculo aproximado. Naturalmente, se o próprio arco ou pórtico for projetado com base num cálculo plástico, então um cálculo elástico do conjunto não tem mais sentido.

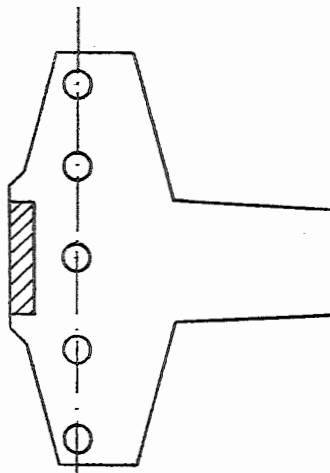


Fig.41-Estacas numa só fila

6. EXEMPLOS NUMERICOS

1º Exemplo

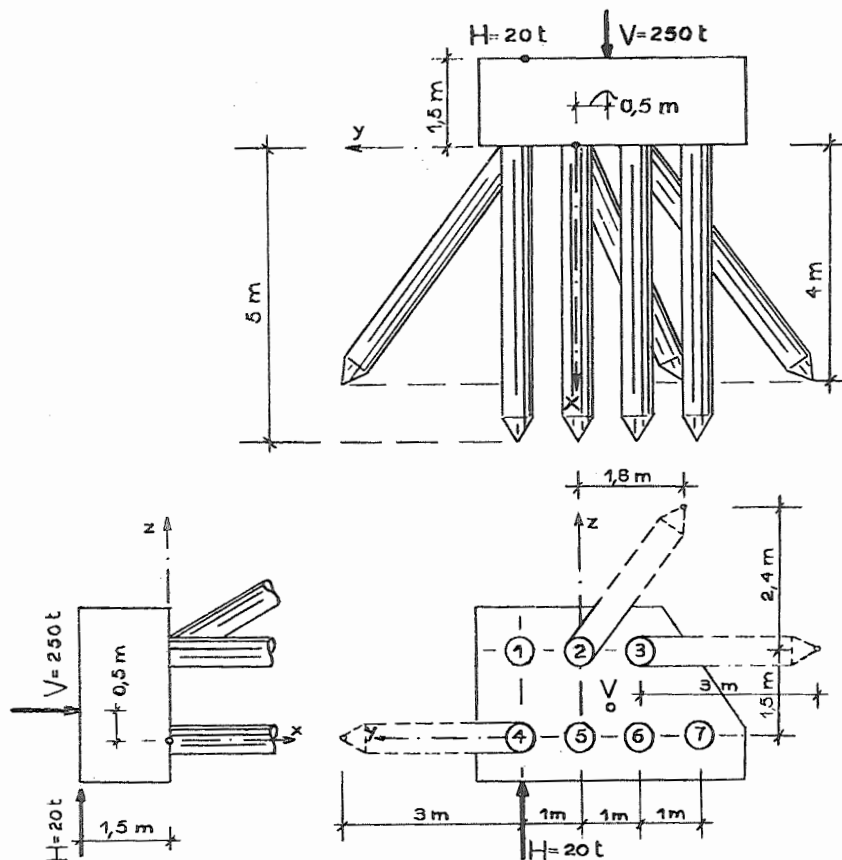


Fig.42 - Dados do 1º Exemplo

A disposição das estacas foi escolhida sob o ponto de vista de obter números simples, o que facilitaria a percepção do andamento de cálculo. Todas as estacas são supostas da mesma rigidez $s = 1$, e do mesmo comprimento = 5 m.

Vetores das estacas									
Estaca	coordenadas			Componentes do vetor da estaca					
	x m	y m	z m	P _x	P _y	P _z	P _a m	P _b m	P _c m
1	0	+1	+1,5	1,00	0	0	0	+1,5	-1,0
2	0	0	+1,5	0,80	-0,36	+0,48	+0,54	+1,2	0
3	0	-1	+1,5	0,80	-0,60	0	+0,90	+1,2	+0,8
4	0	+1	0	0,80	+0,60	0	0	0	-0,8
5	0	0	0	1,00	0	0	0	0	0
6	0	-1	0	1,00	0	0	0	0	+1,0
7	0	-2	0	1,00	0	0	0	0	+2,0

Cálculo dos coeficientes de rigidez

$$\begin{aligned}
 S_{xx} &= 4 \times 1,0^2 + 3 \times 0,8^2 &= + 5,92 \\
 S_{xy} &= -0,8 \times 0,36 &= - 0,288 \\
 S_{xz} &= +0,8 \times 0,48 &= + 0,384 \\
 S_{xa} &= 0,8(0,54 + 0,90) &= + 1,152 \text{ m} \\
 S_{xb} &= 1,0 \times 1,5 + 2 \times 0,8 \times 1,2 &= + 3,42 \text{ "} \\
 S_{xc} &= +1,0 \times 2,0 &= + 2,00 \text{ "} \\
 S_{yy} &= 0,36^2 + 2 \times 0,6^2 &= + 0,8496 \\
 S_{yz} &= -0,36 \times 0,48 &= - 0,1728 \\
 S_{ya} &= -0,36 \times 0,54 - 0,60 \times 0,90 &= - 0,7344 \text{ m} \\
 S_{yb} &= -(0,36 + 0,60) \times 1,2 &= - 1,152 \text{ "} \\
 S_{yc} &= -0,6 \times 0,8 \times 2 &= - 0,96 \text{ "} \\
 S_{zz} &= 0,48^2 &= + 0,2304 \\
 S_{za} &= +0,48 \times 0,54 &= + 0,2592 \text{ m} \\
 S_{zb} &= +0,48 \times 1,2 &= + 0,576 \text{ "} \\
 S_{zc} &= 0 \\
 S_{aa} &= 0,54^2 + 0,9^2 &= + 1,1016 \text{ m}^2 \\
 S_{ab} &= (0,54 + 0,9) \times 1,2 &= + 1,728 \text{ "} \\
 S_{ac} &= +0,9 \times 0,8 &= + 0,72 \text{ "} \\
 S_{bb} &= +1,5^2 + 2 \times 1,2^2 &= + 5,13 \text{ "} \\
 S_{bc} &= -1,5 \times 1,0 + 1,2 \times 0,8 &= - 0,54 \text{ "} \\
 S_{cc} &= 2(1,0^2 + 0,8^2) + 2,0^2 &= + 7,28 \text{ "}
 \end{aligned}$$

Matriz S de rigidez do estaqueamento

	x	y	z	a	b	c
x	+ 5,92	-0,288	+ 0,384	+ 1,152	+ 3,42	+ 2
y	- 0,288	+0,8496	- 0,1728	- 0,7344	- 1,152	- 0,96
z	+ 0,384	-0,1728	+ 0,2304	+ 0,2592	+ 0,576	0
a	+ 1,152	-0,7344	+ 0,2592	+ 1,1016	+ 1,728	+ 0,72
b	+ 3,42	-1,152	+ 0,576	+ 1,728	+ 5,13	- 0,54
c	+ 2	-0,96	0	+ 0,72	- 0,54	+ 7,28

Como controle, temos:

$$S_{xx} + S_{yy} + S_{zz} = + 5,92 + 0,8496 + 0,2304 = 7,0000 = \sum s$$

$$S_{xa} + S_{yb} + S_{zc} = + 1,152 - 1,152 = 0$$

As componentes da carga \vec{R} são:

$$R_x = + 250 \text{ t} \qquad R_a = + 20 \times 1 \qquad = + 20 \text{ tm}$$

$$R_y = 0 \qquad R_b = + 20 \times 1,5 + 250 \times 0,5 = + 155 \text{ ''}$$

$$R_z = + 20 \text{ t} \qquad R_c = + 250 \times 0,5 \qquad = + 125 \text{ ''}$$

A tabela seguinte (elim. seg. GRAUSS) foi calculada com mais decimais, suprimidas na redação da tabela.

Solução das equações de equilíbrio pela eliminação seq. GAUSS.

valores auxiliares	eq. N ^o	x	y	z	a	b	c	Σ	2 ^a mem.
$m_{xx} = 1/5,9200 = + 0,1689$	x)	+ 5,9200	- 0,2880	+ 0,3840	+ 1,1520	+ 3,4200	+ 2,0000	+ 12,5880	+ 250,00 = K ₁
$m_{xy} = + 0,2880$ $m_{xx} = + 0,0486$	y)		+ 0,8496	- 0,1728	- 0,7344	- 1,1520	- 0,9600	- 2,4576	0 = K ₂
$m_{yy} = 1/0,8356 = + 1,1968$	x)m _{xy} Σ = \bar{y})		- 0,0140	+ 0,0187	+ 0,0560	+ 0,1664	+ 0,0973	+ 0,6124	+ 12,16 = K' ₂
	z)		+ 0,8356	- 0,1541	- 0,6784	- 0,9856	- 0,8627	- 1,8452	+ 12,16 = K ₃
$m_{xz} = - 0,3840$ $m_{xx} = - 0,0649$	x)m _{xz}			+ 0,2304	+ 0,2592	+ 0,5760	0,0000	+ 1,2768	+ 20,00 = K' ₃
$m_{yz} = + 0,1541$ $m_{yy} = + 0,1844$	y)m _{xz} Σ = \bar{z})			- 0,0249	- 0,0747	- 0,2218	- 0,1297	- 0,8165	- 16,22 = K' ₃
$m_{zz} = 1/0,1771 = + 5,6476$	z)m _{xz} Σ = \bar{z})			- 0,0284	- 0,1251	- 0,1818	- 0,1591	- 0,3403	+ 2,24 = K' ₃
	a)			+ 0,1771	+ 0,0594	+ 0,1724	- 0,2888	+ 0,1199	+ 6,03 = K' ₃
$m_{xa} = - 1,1520$ $m_{xx} = - 0,1946$	x)m _{xa}				+ 1,1016	+ 1,7280	+ 0,7200	+ 4,2264	+ 20,00 = K' _a
$m_{ya} = + 0,6784$ $m_{yy} = + 0,8118$	y)m _{xa} Σ = \bar{a})				- 0,2242	- 0,6655	- 0,3892	- 2,4496	- 48,65 = K' _a
$m_{za} = - 0,0594$ $m_{zz} = - 0,3352$	z)m _{xa} Σ = \bar{a})				- 0,5507	- 0,8002	- 0,7004	- 1,4980	+ 9,87 = K' _a
$m_{ea} = 1/0,3068 = + 3,2593$	Σ = \bar{a})				- 0,0199	- 0,0578	+ 0,0968	- 0,0402	- 2,02 = K' _a
	b)				+ 0,3068	+ 0,2045	- 0,2727	+ 0,2386	- 20,80 = K' _a
$m_{xb} = - 3,4200$ $m_{xx} = - 0,5777$	x)m _{xb}					+ 5,1300	- 0,5400	+ 9,1620	+ 155,00 = K' _b
$m_{yb} = + 0,9856$ $m_{yy} = + 1,1796$	y)m _{xb} Σ = \bar{b})					- 1,9757	- 1,1554	- 7,2721	- 144,43 = K' _b
$m_{zb} = - 0,1724$ $m_{zz} = - 0,9735$	z)m _{xb} Σ = \bar{b})					- 1,1626	- 1,0176	- 2,1765	+ 14,35 = K' _b
$m_{ab} = - 0,2045$ $m_{aa} = - 0,6667$	a)m _{xb} Σ = \bar{b})					- 0,1678	+ 0,2811	- 0,1166	- 5,87 = K' _b
$m_{bb} = 1/1,6875 = + 0,5926$	b)m _{xb} Σ = \bar{b})					- 0,1364	+ 0,1818	- 0,1591	+ 13,86 = K' _b
	c)					+ 1,6875	- 2,2500	- 0,5625	+ 32,92 = K' _b
$m_{xc} = - 2,0000$ $m_{xx} = - 0,3378$	x)m _{xc}						+ 7,2800	+ 8,5000	+ 125,00 = K' _c
$m_{yc} = + 0,8627$ $m_{yy} = + 1,0324$	y)m _{xc} Σ = \bar{c})						- 0,6757	- 4,2527	- 84,46 = K' _c
$m_{zc} = + 0,2889$ $m_{zz} = + 1,6313$	z)m _{xc} Σ = \bar{c})						- 0,8907	- 1,9051	+ 12,56 = K' _c
$m_{ac} = + 0,2727$ $m_{aa} = + 0,8889$	a)m _{xc} Σ = \bar{c})						- 0,4712	+ 0,1957	+ 9,83 = K' _c
$m_{bc} = + 2,2500$ $m_{bb} = + 1,3333$	b)m _{xc} Σ = \bar{c})						- 0,2424	+ 0,2121	- 18,48 = K' _c
$m_{cc} = 1/2,0000 = + 0,5000$	c)m _{xc} Σ = \bar{c})						- 3,0000	- 0,7500	+ 43,89 = K' _c
							+ 2,0000	- 2,0000	+ 88,33 = K' _c

1.º Exemplo

Cálculo das forças nas estacas conf. equ. (13a)

estaca	p_x^v	p_y^v	p_z^v	p_a^v	p_b^v	p_c^v	total = N
1	- 1,20	0	0	0	+117,59	- 44,17	+ 72,2 t
2	- 0,96	- 35,11	+ 27,29	- 43,62	+ 94,07	0	+ 41,7 "
3	- 0,96	- 58,52	0	- 72,70	+ 94,07	+ 35,34	- 2,8 "
4	- 0,96	+ 58,52	0	0	0	- 35,34	+ 22,2 "
5	- 1,20	0	0	0	0	0	- 1,2 "
6	- 1,20	0	0	0	0	+ 44,17	+ 43,0 "
7	- 1,20	0	0	0	0	+ 88,34	+ 87,1 "

Quando houver vários casos de carga, em vez do cálculo de v e N, determina-se a matriz recíproca partindo dos valores auxiliares da eliminação (quanto a essas fórmulas, vide, por exemplo, LUETKENS, Methoden der Rahmenstatik, Berlin 1948, p. 67).

$$\begin{aligned}
 \beta_{cc} &= m_{cc} && = + 0,5000 \\
 \beta_{bc} &= \beta_{cc} m_{bc} && = + 0,6667 \\
 \beta_{ac} &= \beta_{cc} m_{ac} + \beta_{bc} m_{ab} && = 0 \\
 \beta_{zc} &= \beta_{cc} m_{zc} + \beta_{bc} m_{zb} + \beta_{ac} m_{za} && = + 0,1667 \\
 \beta_{yc} &= \beta_{cc} m_{yc} + \beta_{bc} m_{yb} + \beta_{ac} m_{ya} + \beta_{zc} m_{yz} && = + 1,3333 \\
 \beta_{xc} &= \beta_{cc} m_{xc} + \beta_{bc} m_{xb} + \beta_{ac} m_{xa} + \beta_{zc} m_{xz} + \beta_{yc} m_{xy} && = - 0,5000 \\
 \beta_{bb} &= \beta_{bc} m_{bc} + m_{bb} && = + 1,4815 \\
 \beta_{ab} &= \beta_{bc} m_{ac} + \beta_{bb} m_{ab} && = - 0,3951 \\
 \beta_{zb} &= \beta_{bc} m_{zc} + \beta_{bb} m_{zb} + \beta_{ab} m_{za} && = - 0,2222 \\
 \beta_{yb} &= \beta_{bc} m_{yc} + \beta_{bb} m_{yb} + \beta_{ab} m_{ya} + \beta_{zb} m_{yz} && = + 2,0741 \\
 \beta_{xb} &= \beta_{bc} m_{xc} + \beta_{bb} m_{xb} + \beta_{ab} m_{xa} + \beta_{zb} m_{xz} + \beta_{yb} m_{xy} && = - 0,8889 \\
 \beta_{aa} &= \beta_{ac} m_{ac} + \beta_{ab} m_{ab} + m_{aa} && = + 3,5226 \\
 \beta_{za} &= \beta_{ac} m_{zc} + \beta_{ab} m_{zb} + \beta_{aa} m_{za} && = - 0,7963 \\
 \beta_{ya} &= \beta_{ac} m_{yc} + \beta_{ab} m_{yb} + \beta_{aa} m_{ya} + \beta_{za} m_{yz} && = + 2,2469 \\
 \beta_{xa} &= \beta_{ac} m_{xc} + \beta_{ab} m_{xb} + \beta_{aa} m_{xa} + \beta_{za} m_{xz} + \beta_{ya} m_{xy} && = - 0,2963
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{zz} &= \beta_{zc}^m zc + \beta_{zb}^m zb + \beta_{za}^m za + m_{zz} &= +6,4028 \\ \beta_{yz} &= \beta_{zc}^m yc + \beta_{zb}^m yb + \beta_{za}^m ya + \beta_{zz}^m yz &= +0,4444 \\ \beta_{xz} &= \beta_{zc}^m xc + \beta_{zb}^m xb + \beta_{za}^m xa + \beta_{zz}^m xz + \beta_{yz}^m xy &= -0,1667 \\ \beta_{yy} &= \beta_{yc}^m yc + \beta_{yb}^m yb + \beta_{ya}^m ya + \beta_{yz}^m yz + m_{yy} &= +6,9259 \\ \beta_{xy} &= \beta_{yc}^m xc + \beta_{yb}^m xb + \beta_{ya}^m xa + \beta_{yz}^m xz + \beta_{yy}^m xy &= -1,7778 \\ \beta_{xx} &= \beta_{xc}^m xc + \beta_{xb}^m xb + \beta_{xa}^m xa + \beta_{xz}^m xz + \beta_{xy}^m xy + m_{xx} &= +0,8333 \end{aligned}$$

Matriz recíproca S^{-1} de rigidez

	x	y	z	a	b	c
x	+ 0,8333	- 1,7778	- 0,1667	- 0,2963	- 0,8889	- 0,5000
y	- 1,7778	+ 6,9259	+ 0,4444	+ 2,2469	+ 2,0741	+ 1,3333
z	- 0,1667	+ 0,4444	+ 6,4028	- 0,7963	- 0,2222	+ 0,1667
a	- 0,2963	+ 2,2469	- 0,7963	+ 3,5226	- 0,3951	0
b	- 0,8889	+ 2,0741	- 0,2222	- 0,3951	+ 1,4815	+ 0,6667
c	- 0,5000	+ 1,3333	+ 0,1667	0	+ 0,6667	+ 0,5000

Multiplicando esta matriz pelos vetores das estacas resultam os vetores de influência, por exemplo, para a estaca 1:

$$f_{x1} = \beta_{xx}^p x1 + \beta_{yx}^p y1 + \beta_{zx}^p z1 + \beta_{ax}^p a1 + \beta_{bx}^p b1 + \beta_{cx}^p c1$$

$$f_{y1} = \beta_{xy}^p x1 + \beta_{yy}^p y1 + \dots$$

•

•

$$f_{c1} = \beta_{xc}^p x1 + \beta_{yc}^p y1 + \beta_{zc}^p z1 + \beta_{ac}^p a1 + \dots$$

Resultam os seguintes valores:

Componentes dos vetores de influência

esta- -ca	f_x	f_y	f_z	f_a	f_b	f_c
1	0,0000	0,0000	- 0,6667	- 0,8889	+ 0,6667	0,0000
2	0,0000	0,0000	+ 2,0833	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,0000	0,0000	- 1,2500	+ 1,1111	0,0000	0,0000
4	0,0000	+ 1,6667	0,0000	+ 1,1111	0,0000	0,0000
5	+ 0,8333	- 1,7778	- 0,1667	- 0,2963	- 0,8889	- 0,5000
6	+ 0,3333	- 0,4444	0,0000	- 0,2963	- 0,2222	0,0000
7	- 0,1667	+ 0,8889	+ 0,1667	- 0,2963	+ 0,4444	+ 0,5000

As forças internas resultam como $N_i = \vec{R} \times \vec{f}_i$, por exemplo, na esta-
-ta 7, para a carga dada

$$N_7 = 250(-0,1667) + 0 + 20 \times 0,1667 + 20(-0,2963) + 155 \times 0,4444 + 125 \times 0,5 = + 87, \text{ It .}$$

Nêste caso geral não tem valor prático a determinação das dire-
-ções principais do deslocamento, do giro, dos eixos centrais e
- eixos elásticos. Para as direções principais do deslocamento e as
- direções dos eixos centrais, resultariam os seguintes cossenos di-
-retores:

$$\begin{aligned} q_{xx} &= + 0,99594 & q_{xy} &= - 0,05840 & q_{xz} &= + 0,06847 \\ q_{yx} &= + 0,07219 & q_{yy} &= + 0,97274 & q_{yz} &= - 0,22037 \\ q_{zx} &= - 0,05373 & q_{zy} &= + 0,22442 & q_{zz} &= + 0,97301 \end{aligned}$$

Os coeficientes principais da matriz transformada seriam:

$$\begin{aligned} S'_{xx} &= + 5,93908 \\ S'_{yy} &= + 0,84373 \\ S'_{zz} &= + 0,16477, \quad S'_{xy} = S'_{xz} = S'_{yz} = 0 \end{aligned}$$

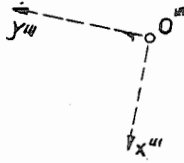
2º Exemplo

Tôdas as estacas

$$\alpha = 15^\circ$$

equ. (2):

$$\begin{aligned} \cos \beta_5 &= \sin 15^\circ \cos 45^\circ \\ &= 0,1830 \end{aligned}$$



$$H_2 = 15 \text{ t}$$

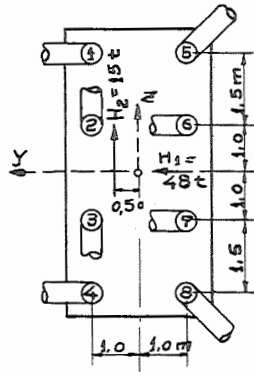
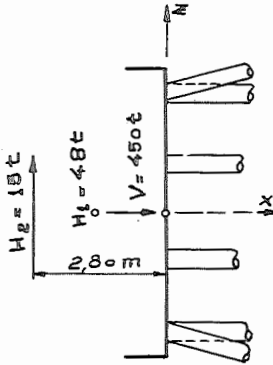
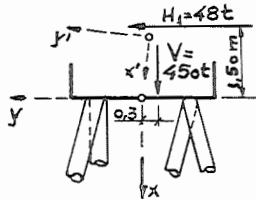


Fig.43 - Dados do 2º Exemplo

1. Componentes das estacas

Estaca	x = 0		P _x	P _y	P _z	P _a	P _b	P _c
	y	z						
	m	m				m	m	m
1	+1,0	+2,5	+0,9659	+0,2588	+0	-0,6470	+2,415	-0,9659
2	+1,0	+1,0	"	0	+0,2588	+0,2588	+0,966	- "
3	+1,0	-1,0	"	0	-0,2588	-0,2588	-0,966	- "
4	+1,0	-2,5	"	+0,2588	0	+0,6470	-2,415	- "
5	-1,0	+2,5	"	-0,1830	+0,1830	+0,2745	+2,415	+ "
6	-1,0	+1,0	"	+0,2588	0	-0,2588	+0,966	+ "
7	-1,0	-1,0	"	+0,2588	0	+0,2588	-0,966	+ "
8	-1,0	-2,5	"	-0,1830	-0,1830	-0,2745	-2,415	+ "

2. Coeficientes de rigidez

$$S_{xx} = S_{cc} = 8 \cos^2 15^\circ = 7,464$$

$$S_{xy} = 2 \times 0,9659(2 \times 0,2588 - 0,1830) = + 0,6464$$

$$S_{xz} = S_{xa} = S_{xb} = S_{xc} = S_{yz} = S_{ya} = S_{yb} = S_{zc} = 0$$

$$S_{yy} = 2 \times 0,1830^2 + 4 \times 0,2588^2 = + 0,3349$$

$$S_{yc} = -2 \times 0,9659 \times 0,1830 = - 0,3536$$

$$S_{zz} = 2(0,2588^2 + 0,1830^2) = + 0,2010$$

$$S_{za} = 2(0,2588^2 + 0,1830 \times 0,2745) = + 0,2345$$

$$S_{zb} = 2(0,2588 \times 0,966 + 0,1830 \times 2,415) = + 1,3839$$

$$S_{aa} = 2(0,6470^2 + 0,2745^2) + 4 \times 0,2588^2 = + 1,2560$$

$$S_{ab} = -2 \times 2,415(0,6470 - 0,2745) = - 1,7992$$

$$S_{bb} = 4(2,415^2 + 0,966^2) = +27,06$$

3. Cargas no plano de simetria

carga:

$$R_x = + 450 \text{ t}$$

$$R_y = + 48 \text{ "}$$

$$R_c = 450 \times 0,3 - 48 \times 1,5 = + 63 \text{ tm}$$

matriz $S_{x,y,c} =$

	x	y	c
x	+ 7,464	+ 0,6464	0
y	+ 0,6464	+ 0,3349	- 0,3536
c	0	- 0,3536	+ 7,464

Novo sistema das coordenadas:

$$\text{equ. (41): } \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2 \times 0,6464}{7,464 - 0,335} = 0,18135 \dots \quad \varphi = 5,14^\circ$$

$$\operatorname{sen} \varphi = 0,0896$$

$$\operatorname{cos} \varphi = 0,9960$$

$$\text{equ. (42): } x_0 = \frac{-0,354 \times 7,464}{7,464 \times 0,335 - 0,6464^2} = -1,267 \text{ m}$$

$$y_0 = \frac{-0,354 \times 0,6464}{7,464 \times 0,335 - 0,6464^2} = -0,110 \text{ m}$$

$$\text{equ. (37): } S'_{xx} = \frac{7,464 + 0,335}{2} + \sqrt{\left(\frac{7,464 - 0,335}{2}\right)^2 + 0,6464^2}$$

$$S'_{yy}$$

$$S'_{xx} = 7,522$$

$$S'_{yy} = 0,2768$$

$$\text{equ. (40): } S'_{cc} = 7,464(1 + 0,110^2) + 0,3349 \times 1,267^2 -$$

$$- 2 \times 1,267(0,3536 + 0,6464 \times 0,110) = 7,016$$

$$R'_x = 450 \operatorname{cos} \varphi + 48 \operatorname{sen} \varphi = 452 \text{ t}$$

$$R'_y = -450 \operatorname{sen} \varphi + 48 \operatorname{cos} \varphi = 7,49 \text{ n}$$

$$R'_c = 450(0,30 - 0,110) - 48(1,50 - 1,267) = 74,4 \text{ tm}$$

$$\text{equ. (43): } v'_x = \frac{452}{7,522} = 60,2 \quad v'_y = \frac{7,49}{0,2768} = 27,1 \quad v'_c = \frac{74,4}{7,016} = 10,61$$

$$\text{equ. (44): } v_x = 60,2 \operatorname{cos} \varphi - 27,1 \operatorname{sen} \varphi - 10,61 \times 0,110 = 56,3$$

$$v_y = 60,2 \operatorname{sen} \varphi + 27,1 \operatorname{cos} \varphi + 10,61 \times 1,267 = 45,8$$

$$v_c = 10,61$$

Contrôle:

$$7,464 \times 56,3 + 0,6464 \times 45,8 = -450 \text{ t} = R_x$$

$$0,6464 \times 56,3 + 0,3349 \times 45,8 - 0,3536 \times 10,61 = 48 \text{ t} = R_y$$

$$-0,3536 \times 45,8 + 7,464 \times 10,61 = 63 \text{ tm} = R_z$$

Naturalmente poder-se-iam obter os valores v_x , v_y , v_c também por solução direta das 3 equações correspondentes à matriz $S_{x,y,c}$.

4. Cargas num plano normal ao plano de simetria

carga $R_z = 15 \text{ t}$

$R_a = 15 \times 0,5 = + 7,5 \text{ tm}$ matriz

$R_b = 15 \times 2,8 = + 42 \text{ "}$ $S_{z,a,b} =$

z	a	b	
+ 0,2010	+ 0,2345	+1,3839	z
+ 0,2345	+ 1,2560	-1,799	a
+ 1,3839	- 1,7992	+27,06	b

Novo sistema das coordenadas:

$$x_o = - \frac{1,3839}{0,2010} = - 6,89 \text{ m} \quad y_o = \frac{0,2345}{0,2010} = + 1,167 \text{ m}$$

equ. (49): $S''_{zz} = S_{zz} = 0,201$

$$S''_{aa} = 1,256 - 1,167 \times 0,2345 = 0,9825$$

$$S''_{bb} = 27,06 - 6,89 \times 1,3839 = 17,53$$

$$S''_{ab} = - 1,7992 - \frac{0,2345 \times 1,3839}{0,2010} = - 3,414$$

equ. (50): $\text{tg } 2\psi = \frac{2 \times 3,41}{17,53 - 0,98} = 0,4127 \dots \psi = 11,21^\circ,$

$$\text{sen } \psi = 0,1944$$

$$\text{cos } \psi = 0,9809$$

$$S'''_{aa} = \frac{17,53 + 0,98}{2} + \sqrt{\left(\frac{17,53 - 0,98}{2}\right)^2 + 3,414^2}$$

$$S'''_{aa} = 0,3058$$

$$S'''_{bb} = 18,204$$

Coordenadas do ponto de aplicação de $H_2 = 15 \text{ t}$:

$$x_H''' = (6,89 - 2,80) \text{sen } \psi - (1,167 - 0,50) \text{cos } \psi = + 3,879 \text{ m}$$

$$y_H''' = -(6,89 - 2,80) \text{cos } \psi + (1,167 - 0,50) \text{sen } \psi = - 1,449 \text{ "}$$

Carga no novo sistema:

$$R_z''' = R_z = + 15 \text{ t}$$

$$R_a''' = - 1,449 \times 15 = - 21,73 \text{ tm}$$

$$R_b''' = - 3,879 \times 15 = - 58,18 \text{ "}$$

Movimento elástico no novo sistema:

$$v_z''' = \frac{15}{0,2010} = + 71,6; \quad v_a''' = - \frac{21,73}{0,3058} = - 71,1; \quad v_b''' = - \frac{58,18}{18,204} = - 3,20$$

Coordenadas da velha origem no novo sistema:

$$x_o''' = 6,89 \cos \psi - 1,167 \operatorname{sen} \psi = 6,53 \text{ m}$$

$$y_o''' = 6,89 \operatorname{sen} \psi + 1,167 \cos \psi = 2,48 \text{ "}$$

Movimento elástico no velho sistema:

$$v_z = 71,6 + 2,48 \times 71,1 + 6,53 \times 3,20 = + 272$$

$$v_a = -71,1 \cos \psi + 3,20 \operatorname{sen} \psi = - 69,0$$

$$v_b = -71,1 \operatorname{sen} \psi - 3,20 \cos \psi = - 16,96$$

Observação: É interessante observar que o sinal negativo em v_a indica um giro anti-horário, apesar de H_2 agir no sentido horário em relação ao eixo x. Intervém de fato a ação de H_2 em relação ao eixo elástico x''' .

$$\text{Contrôle: } 0,2010 \times 272 - 0,2345 \times 69,0 - 1,3839 \times 16,96 = 15 = R_z$$

$$0,2345 \times 272 - 1,2560 \times 69,0 + 1,7992 \times 16,96 = 7,5 = R_a$$

$$1,3839 \times 272 + 1,7992 \times 69,0 - 27,06 \times 16,96 = 42 = R_b$$

A solução direta das 3 equações correspondentes a $S_{z,a,b}$ seria naturalmente neste caso bem mais simples.

5. Fôrças normais nas estacas

Estaca	56,3 p _x t	45,8 p _y t	272 p _z t	-69,0 p _a t	-16,96 p _b t	10,61 p _c t	soma = N t
1	+ 54,4	+ 11,9	0	+ 44,7	- 40,9	- 10,2	+59,9
2	+ 54,4	0	+ 70,4	- 17,9	- 16,4	- 10,2	+80,3
3	+ 54,4	0	- 70,4	+ 17,9	+ 16,4	- 10,2	+ 8,1
4	+ 54,4	+ 11,9	0	- 44,7	+ 40,9	- 10,2	+52,3
5	+ 54,4	- 8,4	+ 49,8	- 18,9	- 40,9	+ 10,2	+46,2
6	+ 54,4	+ 11,9	0	+ 17,9	- 16,4	+ 10,2	+78,0
7	+ 54,4	+ 11,9	0	- 17,9	+ 16,4	+ 10,2	+75,0
8	+ 54,4	- 8,4	- 49,8	+ 18,9	+ 40,9	+ 10,2	+66,2
coluna	1	2	3	4	5	6	

A soma das colunas 3, 4 e 5 representa o efeito de $H_2 = 15 \text{ t}$. Os efeitos de $V = 450 \text{ t}$ e de $H_1 = 48 \text{ t}$ representados juntos pelas colunas 1, 2 e 6 não podem ser separadas neste cálculo. Para casos de carga variável, recomenda-se a determinação da matriz recíproca

ou dos vetores de influência.

3º Exemplo

Será calculado um trecho de 2,40 m de largura. Neste trecho há

1	"	1	grupo I (nº 1 e 3)
1	"	2	
1	"	3	grupo II (nº 2 e 4)
2	"	4	
			$s_I = 2, \alpha_I = 20^\circ$
			$s_{II} = 3, \alpha_{II} = 0$

C.E. na interseção das linhas de gravidade. Altura do C.E. :

$$\frac{1,00}{\operatorname{tg} 20^\circ} = 2,75 \text{ m}$$

Carga para 2,40 m largura

$$V = 60 \times 2,4 = 144 \text{ t (aplic. no C.E.)}$$

$$H = 10 \times 2,4 = 24 \text{ "}$$

$$M = \pm 10 \times 0,75 \times 2,4 = \pm 18 \text{ tm}$$

$$\begin{aligned} \text{raios das estacas 1: } & 0,60 \cos 20^\circ \\ & = 0,563 \text{ m} \end{aligned}$$

$$J = 2 \times 0,563^2 + 1,60^2 + 2 \times 0,80^2 = 4,47$$

Grupo I (equ. (58) com $s = 1$)

$$N_1 = \frac{1}{2} \frac{-144 \times 0 + 24 \times 1 \pm 18}{\operatorname{sen} 20^\circ} \frac{1}{4,47} \quad (-0,563)$$

$$= 35,1 \mp 2,3 = + 32,8 \text{ até } + 37,4 \text{ t}$$

$$N_3 = 35,1 \mp 2,3 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"}$$

Grupo II

$$N_2 = \frac{1}{3} \frac{144 \operatorname{sen} 20^\circ - 24 \cos 20^\circ \pm 18}{\operatorname{sen} 20^\circ} \frac{1}{4,47} \quad (-1,60)$$

$$= 26,0 \pm 6,4 \quad = + 19,6 \text{ até } + 32,4 \text{ t}$$

$$N_4 = 26,0 \pm \frac{18}{4,47} \cdot 0,80 = 26,0 \pm 3,2 \quad + 22,8 \quad \text{"} \quad + 29,2 \quad \text{"}$$

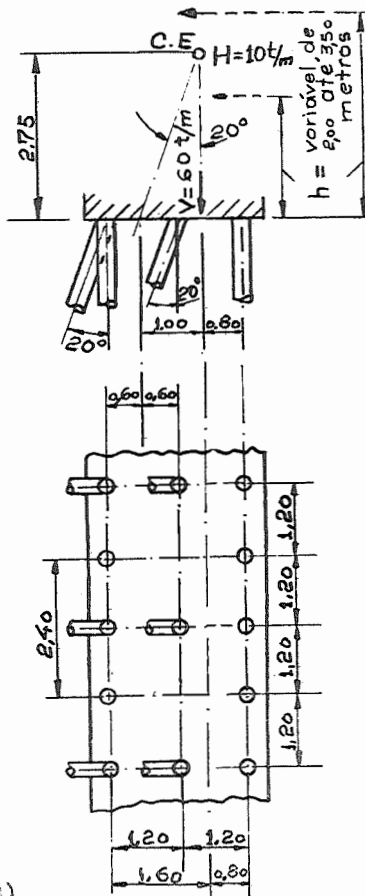


Fig. 44 - 3º Exemplo

$$S_{xx} = 6 + 8 \cos^2 15^\circ + 6 \cos^2 12^\circ = 6 + 7,4641 + 5,7406 = 19,20$$

$$S_{yy} = 8 \sin^2 15^\circ = 0,5359$$

$$S_{yc} = -4(1,4 + 1,0) \sin 15^\circ \cos 15^\circ = -9,6 \times 0,25 = -2,40$$

$$S_{cc} = 6 \times 1,4^2 + 4 \times 1,4^2 \cos^2 15 + 4 \times 1,0^2 \cos^2 15 = +22,8$$

$$S_{aa} = 4 \sin^2 15^\circ (1,4^2 + 4,2^2) = +5,26$$

$$S_{zz} = 6 \sin^2 12^\circ = 0,2594$$

$$S_{zb} = 2 \sin 12^\circ \cos 12^\circ (0,7 + 2,1 + 3,5) = 0,2034 \times 6,3 = 2,56$$

$$S_{bb} = 4 \times 2,8^2 + 4 \cos^2 15^\circ (1,4^2 + 4,2^2) + 2 \cos^2 12^\circ (0,7^2 + 2,1^2 + 3,5^2) = 31,4 + 73,2 + 32,8 = 137,2$$

1ª C.E. conf. (42a): $x'_0 = +2,40/0,5359 = +4,48 \text{ m}$

conf. (40a): $S'_{cc} = 22,8 - 2,40^2/0,5359 = 12,04$

2ª C.E. $x''_0 = +2,56/0,2594 = +9,88 \text{ m}$

$$S''_{bb} = 137,2 - 2,56^2/0,2594 = 111,9$$

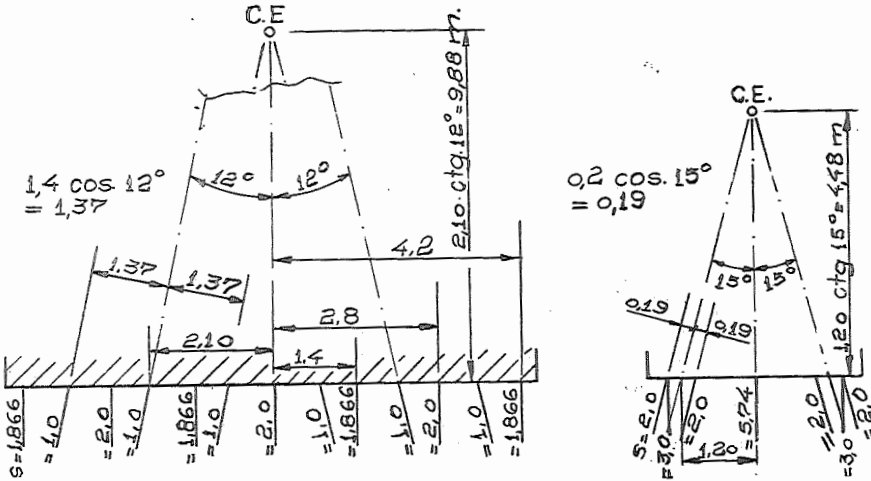


Fig. 46a - Posição dos C.E.

A disposição simples do estaqueamento permite obter êsses resultados também de uma maneira mais direta. A fig. mostra o estaqueamento projetado sôbre os planos x/y e y/z. Em cada traço representante duma estaca dêsses estaqueamentos planos é inscrita a rigidez que é igual à soma das estacas aplicadas nesta reta multiplicado pelo \cos^2 do ângulo que forma a estaca com o respectivo plano.

$$S_{bb}^i = 2 \left[1,866(4,2^2 + 1,4^2) + 2 \times 1,0 \times 1,37^2 + 2,0 \times 2,8^2 \right] = 111,9$$

$$S_{cc}^i = 2 \left[3,0 \times 1,4^2 + 2 \times 2,0 \times 0,19^2 \right] = 12,04$$

a) efeito de $V = 1600$ t (excêntrico)

$$R_x = 1600 \text{ t}, \quad R_b = 0,3 \times 1600 = - 480 \text{ tm},$$

$$R_c = + 0,15 \times 1600 = + 240 \text{ tm}$$

N_1	$= \frac{1600}{19,20} \cos 15^\circ$	$- \frac{480}{111,9} \times 4,2 \cos 15^\circ$	$+ \frac{240}{12,04} \times 0,19$	$= 67,0 \text{ t}$
N_2	$= 80,6$	$- 17,4$	$- 3,8$	$= 59,4 \text{ ''}$
N_{19}	$= \text{''}$	$+ \text{''}$	$+ 3,3$	$= 131,3 \text{ ''}$
N_{20}	$= \text{''}$	$+ \text{''}$	$- 3,8$	$= 94,2 \text{ ''}$
N_3	$= \frac{1600}{19,2} \cos 12^\circ$	$- \frac{480}{111,9} \times 1,37$		$= 75,7 \text{ ''}$
N_{18}	$= 81,6$	$+ 5,9$		$= 37,5 \text{ ''}$
N_4	$= \frac{1600}{19,2}$	$- \frac{480}{111,9} \times 2,8$	$- \frac{240}{12,04} \times 1,4$	$= 43,4 \text{ ''}$
N_5	$= 83,3$	$- 12,0$	$+ 27,9$	$= 99,2 \text{ ''}$
N_{16}	$= \text{''}$	$+ \text{''}$	$- \text{''}$	$= 67,4 \text{ ''}$
N_{17}	$= \text{''}$	$+ \text{''}$	$+ \text{''}$	$= 123,2 \text{ ''}$

As estacas restantes têm forças normais menores.

b) efeito de $H_1 = 40$ t (excêntrico)

$$R_y^i = 40 \text{ t}, \quad R_c = 0 \dots \text{a pequena excentricidade de } 0,02 \text{ m}$$

será desprezada

$$R_a = + 40 \times 0,40 = 16 \text{ tm}$$

N_1	$= + \frac{40}{0,5359} \text{ sen } 15^\circ$	$- \frac{16}{5,26} \times 4,2 \text{ sen } 15^\circ$		$= + 16,0 \text{ t}$
N_2	$= - 19,3$	$+ 3,3$		$= - 16,0 \text{ ''}$
N_{19}	$= + \text{''}$	$+ \text{''}$		$= + 22,6 \text{ ''}$

$$N_{20} = - 19,3 \quad - \quad 3,3 \quad = - 22,6 \text{ t}$$

as estacas 7, 8, 13, 14 têm força menor, as restantes força nula.

c) efeito de $H_2 = 35 \text{ t}$

$$R'_z = 35 \text{ t} \quad R'_b = - 35(9,88 - 7,00) = -101,5 \text{ tm}$$

$$N_3 = + \frac{35}{0,2594} \text{ sen } 12^\circ - \frac{101,5}{111,9} \times 1,37 = + 26,9 \text{ t}$$

$$N_9 = + \quad 28,1 \quad + \quad 1,2 \quad = + 29,3 \text{ "}$$

$$N_{12} = - \quad \text{"} \quad - \quad \text{"} \quad = - 29,3 \text{ "}$$

$$N_{18} = - \quad \text{"} \quad + \quad \text{"} \quad = - 26,9 \text{ "}$$

$$N_1 = - \frac{101,5}{111,9} \times 4,2 \text{ cos } 15^\circ = - 3,7 \text{ "}$$

$$N_2 = - \quad 3,7 \quad = - 3,7 \text{ "}$$

$$N_{19} = + \quad \text{"} \quad = + 3,7 \text{ "}$$

$$N_{20} = + \quad \text{"} \quad = + 3,7 \text{ "}$$

Os valores extremos são encontrados por superposição dos 3 efeitos.

5º Exemplo

O estaqueamento é simétrico ao plano x/y. Pela introdução das estacas equivalentes temos de considerar na tabela só 18 estacas em vez de 32. De fato usaremos a tabela só para obter os coeficientes $S_{xc}, S_{yc}, S_{cc}, S_{zb}, S_{aa}, S_{ab}, S_{bb}$ de rigidez. Os coeficientes $S_{xx}, S_{yy}, S_{xy}, S_{zz}$ são obtidos com mais facilidade pela tabela trigonométrica no fim do livro, sem usar as estacas equivalentes. O projeto foi escolhido de forma a obter $S_{xy} = 0$. Pela escolha da origem torna-se também $S_{za} = 0$ porque o plano x/z é plano de gravidade de todas as estacas com $p_z \neq 0$.

Esta -ca	s		x = 0		P _x	P _y	P _z	P _a	P _b	P _c	s P _x P _c	s P _y P _c	s P _c ²	s P _z P _t	s P _a ²	s P _a P _b	s P _b ²
	-dez	y(m)	z(m)														
A(2)	1,4	+3,0	+2,05	+1,000	0	0	0	+2,050	-3,00	-4,20	0	+12,60	0	0	0	+5,88	
B	3,2	-2,0	+1,55	+1,000	0	0	0	+1,550	+2,00	+6,40	0	+12,80	0	0	0	+7,68	
C(7)	1,4	-7,0	+1,05	+1,000	0	0	0	+1,050	+7,00	+9,80	0	+68,60	0	0	0	+1,54	
D(8)	1,25	+4,0	+1,2	+0,961	0	+0,276	+1,102	+1,154	-3,85	-4,62	0	+18,52	+0,40	+1,52	+1,59	+1,66	
E	2,5	0	+1,0	+0,961	0	+0,276	0	+0,961	0	0	0	0	+0,66	0	0	+2,31	
F(12)	1,25	-4,0	+0,8	+0,961	0	+0,276	-1,102	+0,770	+3,85	+4,62	0	+18,52	+0,27	+1,52	-1,06	+0,74	
G(14)	1,4	+3,0	0	+0,989	-0,148	0	0	0	-2,97	-4,11	+0,62	+12,35	0	0	0	0	
H	3,2	-2,0	0	+0,989	-0,148	0	0	0	+1,98	+6,27	-0,94	+12,54	0	0	0	0	
I(19)	1,4	-7,0	0	+0,989	-0,148	0	0	0	+6,92	+9,58	-1,43	+67,05	0	0	0	0	
J(21)	1,25	+4,0	-1,2	+0,961	0	-0,276	-1,102	-1,154	-3,85	-4,62	0	+18,52	+0,40	+1,52	+1,59	+1,66	
K	2,5	0	-1,0	+0,961	0	-0,276	0	-0,961	0	0	0	0	+0,66	0	0	+2,31	
L(25)	1,25	-4,0	-0,8	+0,961	0	-0,276	+1,102	-0,770	+3,85	+4,62	0	+18,52	+0,27	+1,52	-1,06	+0,74	
M(27)	1,4	+3,0	-2,05	+1,000	0	0	0	-2,050	-3,00	-4,20	0	+12,60	0	0	0	+5,88	
N	3,2	-2,0	-1,55	+1,000	0	0	0	-1,550	+2,00	+6,40	0	+12,80	0	0	0	+7,68	
O(32)	1,4	-7,0	-1,05	+1,000	0	0	0	-1,050	+7,00	+9,80	0	+68,60	0	0	0	+1,54	
P(1)	1,111	+5,0	+2,25	+0,974	+0,225	0	-0,506	+2,192	-4,87	-5,27	-1,22	+26,35	0	+0,28	-1,23	+5,34	
Q	1,778	+5,0	0	+0,974	+0,225	0	0	0	-4,87	-8,43	-1,95	+42,17	0	0	0	0	
R(26)	1,111	+5,0	-2,25	+0,974	+0,225	0	+0,506	-2,192	-4,87	-5,27	-1,22	+26,35	0	+0,28	-1,23	+5,34	
Σ =											+16,77	-6,14	+448,89	+2,66	+6,64	-1,40	+50,30
=											S _{xc}	S _{yc}	S _{cc}	S _{zb}	S _{aa}	S _{ab}	S _{bb}

	x	y	c		z	a	b
x	+ 30,91	0	+ 16,77	z	+ 0,76	0	+ 2,66
y	0	+ 0,33	- 6,14	a	0	+ 6,64	- 1,40
c	+ 16,77	- 6,14	+ 448,89	b	+ 2,66	- 1,40	+50,30

Estudaremos só o efeito da carga horizontal $H = 50$ t paralela ao eixo z. As forças nas estacas assim obtidas deverão ser superpostas às forças resultantes das outras componentes da carga total. O respectivo cálculo seria bem fácil porque x, y, z são direções principais.

Temos:

$$R_x = R_y = 0$$

$$R_z = + 50 \text{ t}$$

$$R_a = + 50 \times 5 = + 250 \text{ tm}$$

$$R_b = + 50 \times 2 = + 100 \text{ tm}$$

$$R_c = 0$$

Resolveremos diretamente as 3 equações z), a), b) sem transformação, usando o método de eliminação seg. GAUSS.

Valores auxiliares m	equação	v_z	v_a	v_b	Σ	2º membro
$m_{zz} = \frac{1}{0,76} = + 1,316$	z)	+ 0,76	0	+ 2,66	+ 3,42	+ 50,00
$m_{za} = 0$	a)	0	+ 6,64	- 1,40	+ 5,24	+ 250,00
	z) m_{za}		0	0	0	0
$m_{aa} = \frac{1}{6,64} = + 0,151$	a)		+ 6,64	- 1,40	+ 5,24	+ 250,00
$m_{zb} = -2,66 \times 1,316 = -3,501$	b)	+ 2,66	- 1,40	+50,30	+ 51,56	+ 100,00
$m_{ab} = +1,40 \times 0,151 = +0,211$	z) m_{zb}			- 9,31	- 11,97	- 175,05
	a) m_{ab}			- 0,29	+ 1,11	+ 52,75
$m_{bb} = \frac{1}{40,70} = + 0,0246$	b)			+40,70	+ 40,70	- 22,30

$$v_b = - 22,30 \times 0,0246 = - 0,55$$

$$v_a = 250 \times 0,151 - 0,55 \times 0,211 = 37,6$$

$$v_z = 50 \times 1,316 - 0,55(-3,501) + 37,6 \times 0 = 67,7$$

Nas fórmulas para as forças nas estacas equivalentes aparece como fator a rigidez s. Substituindo s por 1 resulta a força

na respectiva estaca real.

$$\begin{aligned}
 N_1 &= 0 && - 0,506 \times 37,6 + 2,192 \times (-0,55) = - 20,2 \text{ t} \\
 N_{26} &= 0 && + 0,506 \times 37,6 - 2,192 \times (-0,55) = + 20,2 \text{ " } \\
 N_2 &= 0 && 0 + 2,050 \times (-0,55) = - 1,1 \text{ " } \\
 N_7 &= 0 && 0 + 1,050 \times (-0,55) = - 0,6 \text{ " } \\
 N_{27} &= 0 && 0 - 2,050 \times (-0,55) = + 1,1 \text{ " } \\
 N_{32} &= 0 && 0 - 1,050 \times (-0,55) = + 0,6 \text{ " } \\
 N_8 &= + 0,276 \times 67,7 + 1,102 \times 37,6 + 1,154 \times (-0,55) = + 59,5 \text{ " } \\
 N_{12} &= + 0,276 \times 67,7 - 1,102 \times 37,6 + 0,770 \times (-0,55) = - 23,1 \text{ " } \\
 N_{21} &= - 0,276 \times 67,7 - 1,102 \times 37,6 + 1,154 \times (-0,55) = - 59,5 \text{ " } \\
 N_{25} &= - 0,276 \times 67,7 - 1,102 \times 37,6 + 0,770 \times (-0,55) = + 23,1 \text{ " } \\
 N_{14} &= 0 && 0 && 0 && = 0 \text{ " } \\
 N_{19} &= 0 && 0 && 0 && = 0 \text{ " }
 \end{aligned}$$

As forças normais nas estacas restantes são menores nos seus valores absolutos.

6º Exemplo

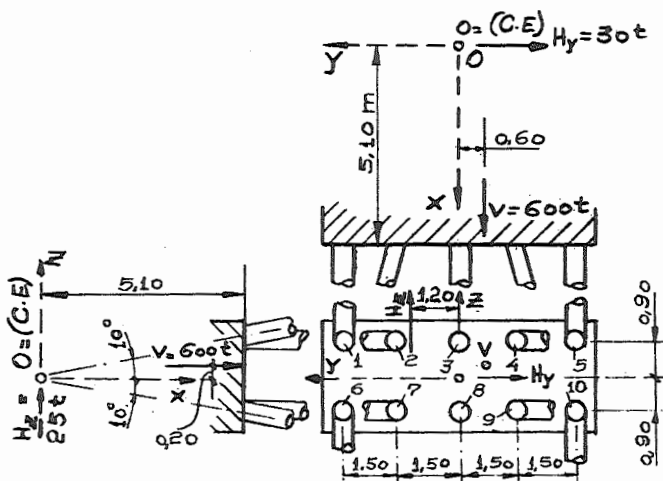


Fig. 47 - Dados do 6º Exemplo

Estaca	comprim. m	α	rigidez $n = \frac{16}{l}$	coordenadas			componentes dos vetores das estacas					
				x m	y m	z m	P_x	P_y	P_z	P_a	P_b	P_c
1	11,2	10°	1,43	+ 5,10	+3,00	+0,90	+0,985	0	+0,174	+ 0,521	0	-2,954
2	12,8	15°	1,25	"	+1,50	+0,90	+0,966	+ 0,259	0	- 0,234	+0,869	-0,129
3	15,2	0°	1,05	"	0	+0,90	+1,000	0	0	0	+0,900	0
4	13,0	15°	0,89	"	-1,50	+0,90	+0,966	- 0,259	0	+ 0,234	+0,869	+0,129
5	15,7	10°	1,02	"	-3,00	+0,90	+0,985	0	+0,174	- 0,521	0	+2,954
6	17,0	10°	0,94	"	+3,00	-0,90	+0,985	0	+0,174	- 0,521	0	-2,954
7	13,6	15°	1,18	"	+1,50	-0,90	+0,966	+ 0,259	0	+ 0,234	-0,869	-0,129
8	16,5	0°	0,97	"	0	-0,90	+1,000	0	0	0	-0,900	0
9	19,5	15°	0,82	"	-1,50	-0,90	+0,966	- 0,259	0	- 0,234	-0,869	+0,129
10	20,5	10°	0,78	"	-3,00	-0,90	+0,985	0	-0,174	+ 0,521	0	+2,954

6º Exemplo

Escolhemos a origem num dos centros elásticos do estaqueamento simplificado para facilitar o cálculo. A rigidez s das estacas é inversamente proporcional ao comprimento. Para obter valores s em torno de 1, formamos $s = 16/\ell$, sendo 16 m a média aritmética dos comprimentos.

Coefficientes da rigidez

$$\begin{aligned}
 S_{xx} &= 0,985^2(1,43 + 1,02 + 0,94 + 0,78) + \\
 &+ 0,966^2(1,25 + 0,89 + 1,18 + 0,82) + 1,000^2(1,05 + 0,97) = + 9,93 \\
 S_{xy} &= 0,966 \times 0,259(1,25 - 0,89 + 1,18 - 0,82) = + 0,18 \\
 S_{xz} &= 0,985 \times 0,1736(1,43 + 1,02 - 0,94 - 0,78) = + 0,12 \\
 S_{xa} &= 0,985 \times 0,521(1,43 - 1,02 - 0,94 + 0,78) = + 0,13 \\
 S_{xb} &= 0,966 \times 0,869(1,25 + 0,89 - 1,18 - 0,82) + \\
 &+ 0,900 \times 1,000(1,05 - 0,97) = + 0,19 \\
 S_{xc} &= 0,985 \times 2,954(-1,43 + 1,02 - 0,94 + 0,78) + \\
 &+ 0,966 \times 0,129(-1,25 + 0,89 - 1,18 + 0,82) = - 1,75 \\
 S_{yy} &= 0,259^2(1,25 + 0,89 + 1,18 + 0,82) = + 0,28 \\
 S_{yz} &= S_{zb} = 0 \\
 S_{ya} &= 0,259 \times 0,234(-1,25 - 0,89 + 1,18 + 0,82) = - 0,01 \\
 S_{yb} &= 0,259 \times 0,869(1,25 - 0,89 - 1,18 + 0,82) = 0 \\
 S_{yc} &= 0,259 \times 0,129(-1,25 - 0,89 - 1,18 - 0,82) = - 0,14 \\
 S_{zz} &= 0,1736^2(1,43 + 1,02 + 0,94 + 0,78) = + 0,13 \\
 S_{za} &= 0,1736 \times 0,521(1,43 - 1,02 + 0,94 - 0,78) = + 0,05 \\
 S_{zc} &= 0,1736 \times 2,954(-1,43 + 1,02 + 0,94 - 0,78) = - 0,13 \\
 S_{aa} &= 0,521^2(1,43 + 1,02 + 0,94 + 0,78) + \\
 &+ 0,234^2(1,25 + 0,89 + 1,18 + 0,82) = + 1,36 \\
 S_{ab} &= 0,234 \times 0,869(-1,25 + 0,89 - 1,18 + 0,82) = - 0,15 \\
 S_{ac} &= 0,521 \times 2,954(-1,43 - 1,02 + 0,94 + 0,78) + \\
 &+ 0,234 \times 0,129(+ 1,25 + 0,89 - 1,18 - 0,82) = - 1,12
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{bb} &= 0,869^2(1,25 + 0,89 + 1,18 + 0,82) + \\
 &+ 0,900^2(1,05 + 0,97) &= + 4,77 \\
 S_{bc} &= 0,869 \times 0,129(-1,25 + 0,89 + 1,18 - 0,82) &= 0 \\
 S_{cc} &= 2,954^2(1,43 + 1,02 + 0,94 + 0,78) + \\
 &+ 0,129^2(1,25 + 0,89 + 1,18 + 0,82) &= + 36,48
 \end{aligned}$$

Carga:

$$\begin{aligned}
 R_x &= + 600 \text{ t} \\
 R_y &= - 30 \text{ " } \\
 R_z &= + 25 \text{ " } \\
 R_a &= + 25 \times 1,20 = + 30 \text{ tm} \\
 R_b &= + 600 \times 0,20 = + 120 \text{ " } \\
 R_c &= + 600 \times 0,60 = + 360 \text{ " }
 \end{aligned}$$

Matriz:

	x	y	z	a	b	c	R
x	+ 0,93	+ 0,18	+ 0,12	+ 0,13	- 0,19	- 1,75	+ 600
y	+ 0,18	+ 0,28	0	- 0,01	0	- 0,14	- 30
z	+ 0,12	0	+ 0,13	+ 0,05	0	- 0,13	+ 25
a	+ 0,13	- 0,01	+ 0,05	+ 1,36	- 0,15	- 1,12	+ 30
b	+ 0,19	0	0	- 0,15	+ 4,77	0	+ 120
c	- 1,75	- 0,14	- 0,13	- 1,12	0	+ 36,48	+ 360

Iteração:

	*	- 0,018	- 0,012	- 0,013	- 0,019	+ 0,176
- 0,643	*	0	+ 0,036	0	+ 0,500	
- 0,923	0	*	- 0,385	0	+ 1,000	
- 0,096	+ 0,007	- 0,037	*	+ 0,110	+ 0,824	
- 0,040	0	0	+ 0,031	*	0	
+ 0,048	+ 0,004	+ 0,004	+ 0,031	0	*	
$v_g^{(1)}$	+ 60,4	- 107,1	+ 192,3	+ 22,1	+ 25,2	+ 9,8

	+ 1,9	- 38,8	- 55,7	- 5,8	- 2,4	+ 2,9
	- 2,3	0	0	- 0,7	0	- 0,4
	- 0,3	+ 0,8	- 8,5	- 7,1	0	+ 0,8
	- 0,5	0	0	+ 2,8	+ 0,7	+ 0,7
	+ 1,7	+ 5,0	+ 9,9	+ 8,2	0	0
$\Delta_g^{(1)}$	+ 0,5	+ 33,0	+ 54,3	+ 2,6	- 1,7	+ 4,0
	+ 0,6	- 0,3	- 0,5	- 0,0	- 0,0	+ 0,0
	+ 0,7	0	0	- 0,2	0	- 0,1
	+ 0,0	- 0,1	+ 1,0	+ 2,0	0	- 0,2
	+ 0,0	0	0	- 0,2	- 0,1	- 0,1
	+ 0,7	+ 2,0	+ 4,0	+ 3,3	0	0
$\Delta_g^{(2)}$	+ 2,0	+ 1,6	+ 4,5	+ 4,9	- 0,1	- 0,4
	- 0,0	- 1,3	- 1,8	- 0,2	- 0,1	+ 0,1
	- 0,1	0	0	+ 0,0	0	+ 0,0
	- 0,1	+ 0,2	- 1,9	- 0,2	0	+ 0,0
	+ 0,0	0	0	- 0,0	+ 0,2	+ 0,2
	- 0,1	- 0,2	- 0,4	- 0,3	0	0
$\Delta_g^{(3)}$	- 0,3	- 1,3	- 4,1	- 0,7	+ 0,1	+ 0,3
	+ 0,0	+ 0,2	+ 0,3	+ 0,0	+ 0,0	- 0,0
	+ 0,0	0	0	- 0,0	0	- 0,0
	+ 0,0	- 0,0	+ 0,3	+ 0,2	0	- 0,0
	- 0,0	0	0	+ 0,0	- 0,0	- 0,0
	+ 0,1	+ 0,2	+ 0,3	+ 0,2	0	0
$\Delta_g^{(4)}$	+ 0,1	+ 0,4	+ 0,9	+ 0,4	0,0	0,0
	0,0	- 0,1	- 0,1	0,0	0,0	0,0
	0,0	0	0	0,0	0	0,0
	0,0	0,0	- 0,1	0,0	0	0,0
	0,0	0	0	0	0,0	0,0
	0,0	0	0	0	0	0
$\Delta_g^{(5)}$	0,0	- 0,1	- 0,2	0,0	0,0	0,0
	+ 62,7	- 139,5	+ 139,1	+ 24,1	+ 23,5	+ 13,8
v_g	= v_x	= v_y	= v_z	= v_a	= v_b	= v_c

Fôrças nas estacas

Estaca	$v_{x'x}$	$v_{y'y}$	$v_{z'z}$	$v_{a'a}$	$v_{b'b}$	$v_{c'c}$	$\sum v_{g'g}$	$N = s \sum$	N aprox. ($s = 1$)
1	+ 61,8	0	+ 24,2	+ 12,6	0	- 40,8	+ 57,8	+ 82,7	(+ 80,3)
2	+ 60,6	- 36,1	0	- 5,6	+ 20,4	- 1,8	+ 37,5	+ 46,9	(+ 47,5)
3	+ 62,7	0	0	0	+ 21,2	0	+ 83,9	+ 88,1	(+ 85,6)
4	+ 60,6	+ 36,1	0	+ 5,6	+ 20,4	+ 1,8	+124,5	+110,8	(+117,9)
5	+ 61,8	0	+ 24,2	- 12,6	0	+ 40,8	+114,2	+116,5	(+114,5)
6	+ 61,8	0	- 24,2	- 12,6	0	- 40,8	- 15,8	- 14,9	(- 15,5)
7	+ 60,6	- 36,1	0	+ 5,6	- 20,4	- 1,8	+ 7,9	+ 9,3	(+ 13,5)
8	+ 62,7	0	0	0	- 21,2	0	+ 41,5	+ 40,3	(+ 39,2)
9	+ 60,6	+ 36,1	0	- 5,6	- 20,4	+ 1,8	+ 72,5	+ 59,5	(+ 62,3)
10	+ 61,8	0	- 24,2	+ 12,6	0	+ 40,8	+ 91,0	+ 71,0	(+ 67,6)

Na última coluna são representados os valores das fôrças normais resultantes de um cálculo com $s = 1$ em todas as estacas. Note-se a pequena influência da variação de s , apesar de termos variações de comprimentos das estacas entre 11,2 e 20,5 m. O engenheiro projetista deve contentar-se, normalmente, com os valores aproximados obtidos com a hipótese de $s =$ constante.

7. O PROJETO DO ESTAQUEAMENTO

7.1. Generalidades

A solução ótima dum projeto de estaqueamento depende de considerações de:

- a) Resistência
- b) Economia.

A estética não intervém porque o estaqueamento não é visível normalmente. Este fato torna mais racional o problema de achar a melhor solução.

Quanto à resistência, é de notar que a ruptura do estaqueamento pode ser provocada por resistência insuficiente do bloco, das estacas ou do solo. Não trataremos aqui dos casos de solo fraco nas pontas, em que o estudo da resistência do estaqueamento é problema de mecânica dos solos.

Na consideração da economia, além do próprio consumo de material, intervém como fator importante a possibilidade de uma execução simples. Por exemplo, toda regularidade na disposição do estaqueamento simplifica o movimento da máquina cravadora, inclinações além dum certo limite encarecem sensivelmente a execução, etc.

Os dados básicos do projeto apresentam-se na seguinte forma:

1. Valor e posição da carga.
2. Dados sobre o bloco.
 - a) Dados geométricos, como cotas do tópo do bloco, impostas, por exemplo, pelo piso do sub-solo, cotas da base do bloco, impostas, por exemplo, pelo nível d'água, e espaço disponível.
 - b) Dados sobre a resistência do material do bloco.
 - c) Preço dos materiais do bloco.
3. Dados sobre o solo e as estacas a serem usadas:
 - a) Dados geométricos, como diâmetro, distância mínima entre eixos, espaço disponível, inclinação máxima, profundidade da camada resistente, etc.
 - b) Carga admissível à compressão e à tração.
 - c) Preço das estacas.

O problema consiste em escolher, dentre as disposições do estaqueamento resistentes às cargas dadas, a mais econômica. Infelizmente não podemos atacar este problema na sua forma mais geral. O motivo é a complexidade do assunto, como logo perceberemos.

As dificuldades surgem principalmente nos dados "Valor e posição da carga". Normalmente a "carga" é dada por uma tabela que contém os valores resultantes do cálculo da superestrutura. No caso de um galpão industrial, por exemplo, achamos na tabela as componentes de \vec{R} referidas a uma certa origem - por ex., "pé da coluna" - resultantes dos seguintes casos de carregamento: pêso próprio, sobrecarga, vento da esquerda, da direita, choque lateral e frenagem na ponte rolante, e outros. O pêso do bloco, que depende naturalmente da solução adotada, deve ser acrescentado à carga morta. Não há possibilidade de fazer uma combinação crítica desses valores porque, para cada estaca, uma outra combinação pode ser crítica. Naturalmente há também casos simples - por ex., fundação dum muro de arrimo - com só 2 ou 3 casos a combinar.

Matematicamente falando, a carga \vec{R} é dada se, para toda posição dum vetor semi-unitário \vec{r} , fôr conhecido o valor R , de forma que $\vec{R} = R \vec{r}$, isto é, deve ser dada a função $R = f(\vec{r})$, que é uma função das 5 variáveis que definem \vec{r} . A condição de resistência exige que a carga admissível, definida da mesma maneira, $\vec{R}_A = R_A \vec{r}$, seja maior que a carga dada em todo o espaço 5-dimensional. Usando a capacidade em vez da carga admissível, pode dar-se definição análoga da resistência.

No que concerne ao bloco de concreto armado, um tratamento sistemático do mínimo custo também seria muito difícil. Convém em todos os casos, adotar dimensões do bloco tais que o efeito de cisalhamento possa ser recebido apenas pelo concreto. Dimensões menores são anti-econômicas devido ao número grande de barras dobradas que se tornam necessárias. Às vezes um bloco bem pesado conduz à solução menos dispendiosa porque o pêso do bloco reduz a variação da carga. Se esta variação já fôr de inficis pequena, pode ser aconselhável o princípio contrário, ou seja a redução da

parte morta da carga, por exemplo por um bloco vasado (caixa), ou por outras disposições construtivas.

Vista a complicação do assunto, só estudaremos sistemáticamente os casos mais simples possíveis. Tal estudo permitirá certas conclusões de caráter um pouco mais geral. Sempre ficará como último critério a elaboração de vários projetos paralelos, obtendo-se o mais interessante deles por uma comparação do custo.

7.2. Cavalete

Se a "carga" consistir em forças cujas resultantes sejam coplanares e passem sempre pelo mesmo ponto O, a disposição indicada do estaqueamento é um cavalete plano com O como ponto de interseção dos eixos das estacas.

Para se ter uma idéia das possibilidades de receber cargas por cavaletes, são indicadas na figura 48 as zonas admissíveis para 3 tipos particulares de cavalete. Supõe-se que tôdas as estacas tenham carga admissível à compressão $A = 50t$, à tração $A' = -20t$. Tôda força cujo vetor aplicado em O for contido na zona hachurada, será admissível como carga.

Os primeiros dois cavaletes são isostáticos e a obtenção gráfica da zona admissível é explicada pela própria figura. No terceiro caso, esta zona foi obtida por um cálculo segundo a equação (60), e julgamos que não é necessário explicá-lo aqui detalhadamente. Para cada parte contínua do limite da zona, é responsável uma estaca. Nos pontos de descontinuidade do limite entra em ação outra estaca.

No caso de se usar como critério de resistência a capacidade, em vez da carga admissível, podem obter-se figuras análogas. No caso de cavaletes isostáticos, tais figuras teriam o mesmo aspecto, mas nos cavaletes hiperestáticos não. No que se segue, limitar-nos-emos ao cálculo com a carga admissível, sendo este o método mais usual por enquanto.

Imaginemos aplicada no ponto O a carga \vec{R} em tôdas as posições possíveis. Pela extremidade deste vetor é dada a "zona de carga". O cavalete tem dimensões suficientes quando for a zona de

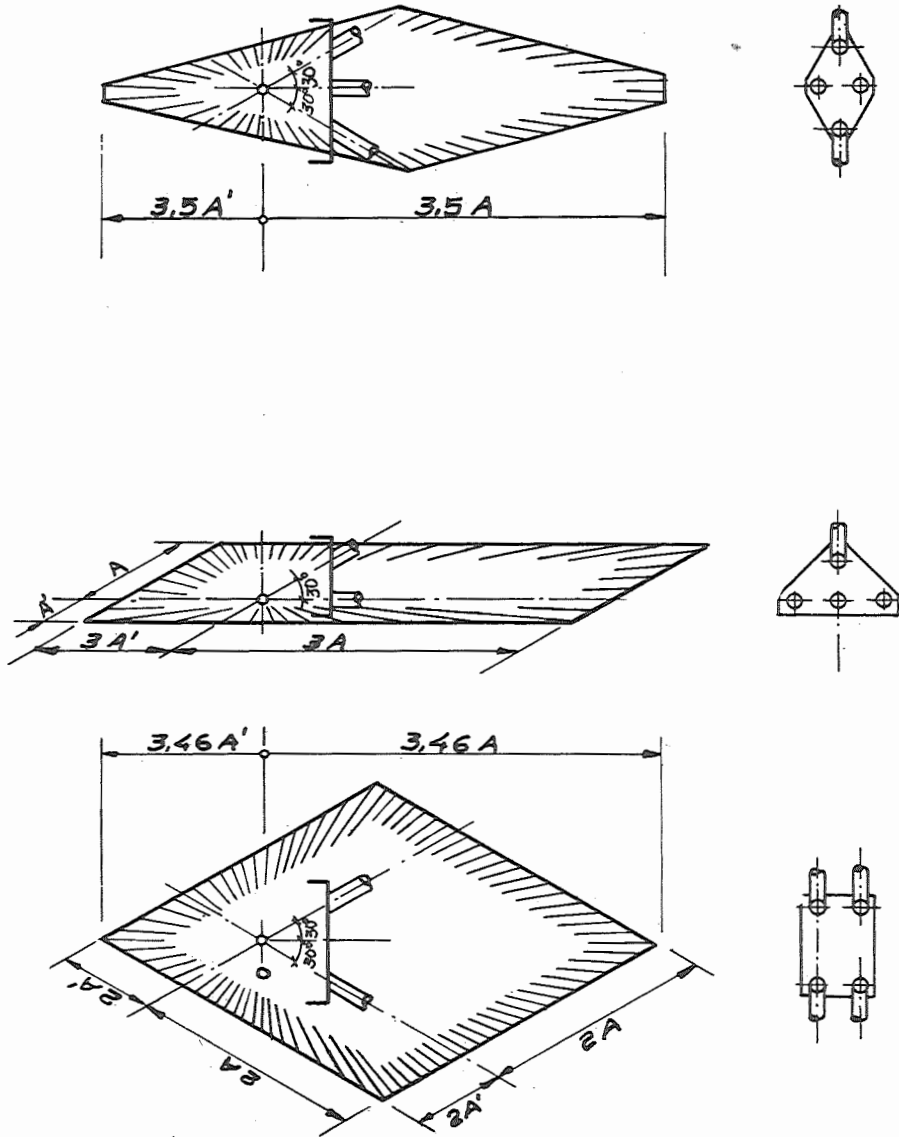


Fig.48 - Zonas admissíveis do cavalete

carga inteiramente contida na zona admissível do cavalete.

A forma mais simples da zona duma carga variável é triangular, e resulta de uma carga morta vertical $V = \text{constante}$ e duma fôrça horizontal que varia entre $\pm H$. Estudaremos êste caso sistematicamente porque é êle encontrado com frequência na prática (pilar de ponte, por exemplo).

A comparação do aspecto da zona de carga com as zonas admissíveis conforme a figura 48 ensina que só as posições extremas da resultante devem ser consideradas. Se os vértices E do triângulo da carga estiverem contidos na zona admissível, todo o triângulo estará. Anotaremos com φ o ângulo extremo que forma a resultante com a vertical, de forma que

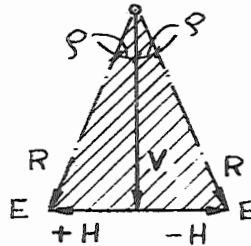


Fig.49-Zona triangular da carga

$$\text{tg } \varphi = H/V$$

Para carga simétrica, naturalmente um cavalete simétrico será a solução indicada. Estudaremos as duas possibilidades mostradas na figura 50. Começamos com a pesquisa da inclinação ótima das estacas no cavalete isostático. Temos, conforme a equação (56a):

$$N_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{V}{\cos \alpha} + \frac{H}{\sin \alpha} \right) = \frac{V}{2} \left(\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{\text{tg } \varphi}{\sin \alpha} \right)$$

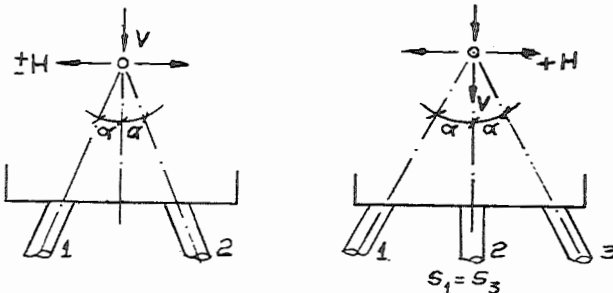


Fig.50 - Dois tipos de cavalete simétrico

Como indicador do custo do estaqueamento usaremos a soma das cargas admissíveis individuais das estacas $\sum A$, que é, no caso presente, igual (ou maior) à soma dos valores $N_{m\acute{a}x.}$; portanto:

$$\sum A = \sum N_{m\acute{a}x.} = N_{1m\acute{a}x.} + N_{2m\acute{a}x.} = V \left(\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{sen} \alpha} \right)$$

Formando

$$\frac{d}{d\alpha} \sum A = V \left(\frac{-\operatorname{sen} \alpha}{\cos^2 \alpha} - \operatorname{tg} \varphi \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} \right)$$

e fazendo igual a zero esta expressão, resulta:

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \varphi} \quad \dots \dots \dots (105)$$

O sinal da segunda derivada no intervalo interessante $0 < \alpha < 45^\circ$ indica que se trata de mínimo. A equação (105) fornece, portanto, a inclinação das estacas que conduz à mínima soma das forças normais nas estacas.

A relação $V/\sum A$ poderia ser chamada de "rendimento" do estaqueamento. Usaremos o recíproco do rendimento sob o nome de "multiplicador de dimensionamento" m . Seria mais lógico, porém menos prático referir m a R em vez de A . Conhecendo m para um estaqueamento qualquer, o número necessário de estacas, caracterizadas pela carga individual admissível A , é dado por:

$$n = \frac{mV}{A}$$

No cavalete simples temos:

$$m = \frac{\sum A}{V} = (1 + \operatorname{tg} \varphi / \operatorname{tg} \alpha) / \cos \alpha \quad \dots \dots (106)$$

Este valor é mínimo para α conforme (105).

Para resolver de maneira análoga o cavalete hiperestático da fig. 50, temos de formar, segundo (60), o valor auxiliar

$$\lambda = \frac{s_2}{2s_1}$$

e as forças normais serão

$$N_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{V \cos \alpha}{\lambda + \cos^2 \alpha} + \frac{H}{\operatorname{sen} \alpha} \right) = \frac{V}{2} \left(\frac{\cos \alpha}{\lambda + \cos^2 \alpha} + \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{sen} \alpha} \right)$$

$$N_2 = \frac{\lambda \cdot V}{\lambda + \cos^2 \alpha}$$

No problema em questão temos os dois parâmetros α e λ a serem convenientemente escolhidos. Pode-se mostrar que a procura de uma "inclinação ótima" não tem sentido real. O respectivo multiplicador m diminui aumentando α até 90° , o que significa que as estacas laterais deveriam ser horizontais, o que não é possível. Por este motivo, consideramos dada a inclinação máxima alcançável pelo tipo da estaca a ser usada sem aumento considerável do custo. Para este valor fixo de α , procuramos a relação ótima entre a rigidez das estacas.

A respeito desta relação λ , convém observar que geralmente todas as estacas empregadas no mesmo cavalete terão a mesma rigidez, mas o que chamamos de "estaca 1, 2, 3" na figura 50 serão na realidade filas de várias estacas colocadas no mesmo plano, de modo que os valores s_1, s_2, s_3 serão proporcionais aos números das estacas da fila respectiva.

As cargas individuais admissíveis $A_1 = A_3, A_2$ serão sem dúvida proporcionais a $s_1 = s_3, s_2$, de forma que

$$\frac{s_2}{2s_1} = \lambda = \frac{A_2}{2A_1}$$

O multiplicador de dimensionamento é definido por

$$m = \frac{\sum A}{V} \dots \dots \dots (107)$$

No caso precedente (cavalete isostático), confundiu-se esta expressão com $\sum N_{\text{máx.}}/V$, mas no cavalete hiperestático o valor limite $N_{\text{máx.}} = A$ será atingido ou nas estacas extremas ou na central

Temos, portanto:

$$m = \frac{\sum A}{V} = \frac{2A_1 + A_2}{V};$$

substituindo λ , resulta:

$$m = \frac{1 + \lambda}{V} 2A_1 \quad \text{ou}$$

$$m = \frac{1 + \lambda}{V} A_2 \text{ segundo o caso.}$$

Praticamente intervém só a primeira forma de m . Temos com $A_1 = N_{1\text{máx.}}$:

$$m = (1 + \lambda) \left(\frac{\cos \alpha}{\lambda + \cos^2 \alpha} + \frac{\text{tg } \varphi}{\text{sen } \alpha} \right)$$

Derivando em relação a λ , obtém-se para um α dado a distribuição ótima da rigidez entre s_1 e s_2 expressa por:

$$\lambda_m = (\text{tg } \alpha \sqrt{\frac{\text{tg } \alpha}{\text{tg } \varphi}} - 1) \cos^2 \alpha \dots \dots \dots (108)$$

Introduzindo λ_m na expressão de m , obtém-se:

$$m = (1 + 2 \sqrt{\text{tg } \alpha \text{ tg } \varphi} + \text{tg } \alpha \text{ tg } \varphi) \cos \alpha \dots (109)$$

As equações (106) e (109) são representadas na figura 51, onde se vê que quase sempre o cavalete simples é o mais econômico. Só para inclinações muito pequenas da resultante e inclinações relativamente fortes das estacas, o fator m abaixa um pouco, colocando parte das estacas na posição central. Em vez do valor λ , indica-se na figura diretamente a parte em % das estacas a serem colocadas no meio.

Para mostrar a aplicação do diagrama, imaginemos o seguinte exemplo: Na fundação dum pilar de ponte age uma carga vertical $V = 1\,150$ t, e uma horizontal $H = 40$ t na direção longitudinal. Forças transversais serão desprezadas. Dimensionar o estaqueamento com estacas de carga admissível $A = 80$ t, com inclinação máxima $\alpha = 6^\circ$, e comparar com $\alpha = 24^\circ$.

$$\text{Temos: } \varphi = \text{arctg } 40/1150 = 2,0^\circ$$

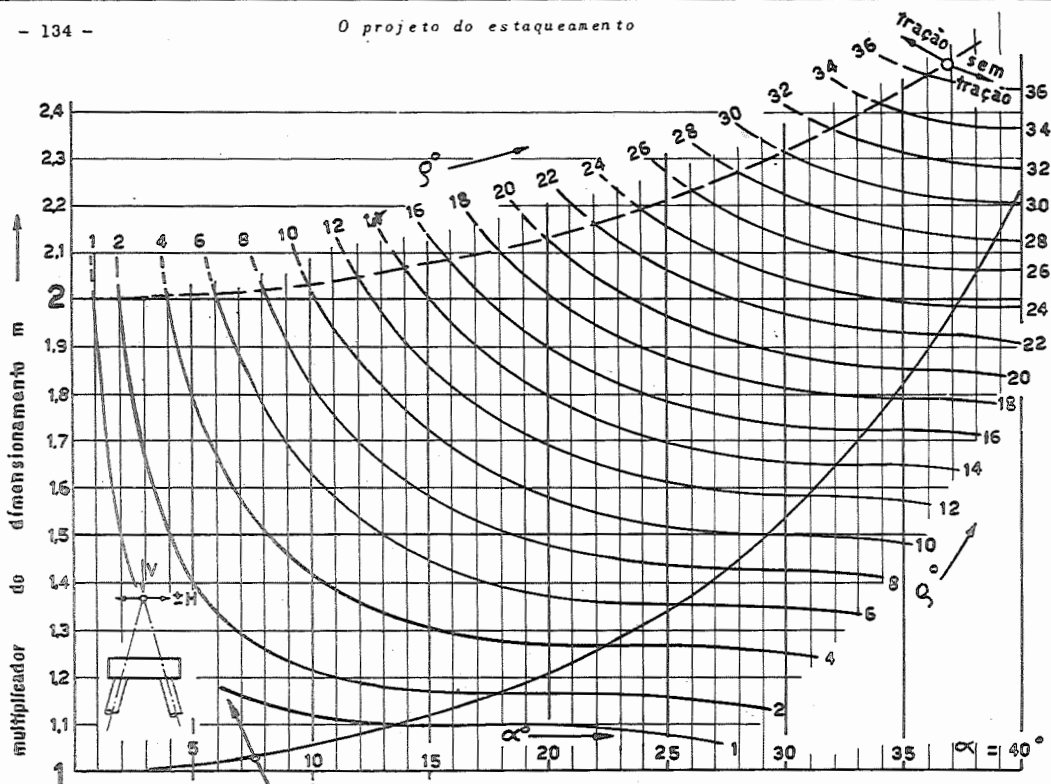
Para $\varphi = 2^\circ$ e $\alpha = 6^\circ$, o diagrama indica $m = 1,35$ na zona de cavalete simples. Precisa-se de

$$n = \frac{1,35 \times 1150}{80} = 19,5 \approx 20 \text{ estacas}$$

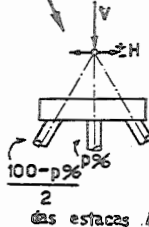
Para $\varphi = 2^\circ$, $\alpha = 24^\circ$, caímos na zona de cavalete hiperestático, sendo $m = 1,16$; portanto:

$$n = \frac{1,16 \times 1150}{80} = 16,7 \text{ estacas} \approx 17 \text{ estacas,}$$

das quais 32% estão no meio (diagrama de baixo):



$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{H}{V}$$



Número necessário das estacas

$$n = \frac{m \cdot V}{A} \quad (A = \text{carga individual admissível})$$

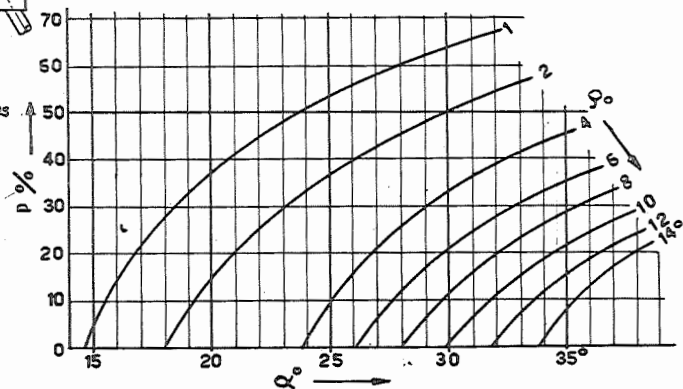


Fig. 51-Dimensionamento de cavaletes

no meio: $0,32 \times 16,7 = 5,3 \approx 5$ estacas

num lado: $0,34 \times 16,7 = 5,7 \approx 6$ "

outro lado: 6 "

total	17 estacas
-------	------------

A economia obtida por aumento de α é de 3 estacas. Nas inclinações mais fortes da resultante, um aumento de α tem mais efeito.

No cavalete teórico, os eixos das estacas encontram-se na altura da aplicação de H. Praticamente deslocam-se as estacas de maneira que o centro elástico fique na altura necessária para po-

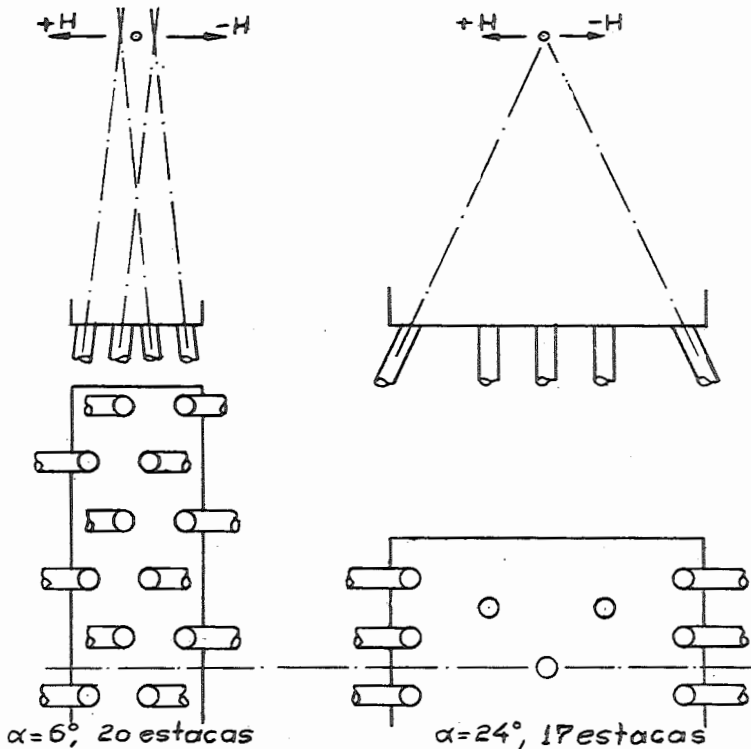


Fig. 52 - Resultado do Exemplo

der receber também eventuais momentos não previstos no cálculo, como indica a figura 52.

A finalidade principal do diagrama da fig. 51 é ilustrar o efeito da variação dos parâmetros (α e λ), dos quais depende o cavalete. Para o próprio dimensionamento existe um método aproximado bem mais simples. O fato de ser aproximado não constitui defeito grave porque sempre é recomendável verificar um estaqueamento escolhido por determinação das forças normais.

Queremos abranger com a fórmula aproximada o caso já mais geral de um cavalete espacial com uma força vertical V e duas forças horizontais H_y , H_z . As inclinações respectivas das estacas são α_y, α_z . Então o número necessário das estacas é:

$$n \approx \frac{1}{A} \left(\frac{V}{\cos \alpha} + \frac{H_y}{\cos \alpha_y} + \frac{H_z}{\cos \alpha_z} \right) \dots \dots \dots (110)$$

Para α no denominador de V , toma-se o ângulo menor. A fórmula é exata para o cavalete plano simples, aproximada para os outros casos.

No exemplo tratado anteriormente resultaria:

$$\alpha = 6^\circ$$

$$n = \left(\frac{1150}{\cos 6^\circ} + \frac{40}{\sin 6^\circ} \right) : 80 = 19,5 = 20 \text{ estacas}$$

$$\alpha = 24^\circ$$

$$n = \left(\frac{1150}{\cos 24^\circ} + \frac{40}{\sin 24^\circ} \right) : 80 = 17,0 \text{ estacas.}$$

Até agora temos falado do cavalete simétrico. Se o triângulo da zona de carga for inclinado (caso de empuxo!), poder-se-ia aplicar os mesmos métodos, prevendo um cavalete simétrico em relação ao eixo de simetria da zona de carga. Muitas vezes isto não é possível por causa da inclinação média da resultante. Se esta inclinação for maior que o valor α alcançável pelas estacas, necessariamente haverá tração nelas. Se o tipo da estaca ou do solo não permitir tal tração, o único remédio consistirá em aumentar V por um bloco pesado.

7.3. Carregamento dado por forças e momentos

Nêste § queremos elaborar algumas sugestões a respeito do

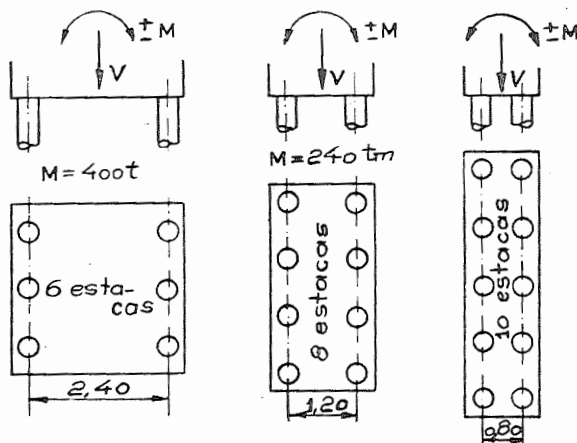


Fig. 53 - Estaqueamentos equivalentes

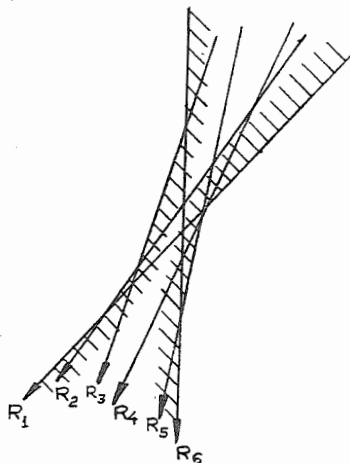
projeto dum estaqueamento carregado por forças e momentos, sem pretendermos fazer um estudo sistemático.

Procuraremos mostrar em primeiro lugar que o problema de mínimo custo não pode ser aqui resolvido sem a consideração do custo do bloco. Por exemplo, os 3 estaqueamentos representados na fig. 53 resistem, com $N_{\text{máx.}} = 100 t$, ao mesmo carregamento de $V = 400 t$, $M = 240 tm$. Só uma consideração do custo do bloco e das estacas pode indicar a solução mais econômica. Assim, por exemplo, se o solo resistente for muito profundo (estacas compridas), a primeira solução tem mais vantagem apesar da solicitação forte do bloco.

Supomos que tôdas as posições da resultante da carga estejam contidas num plano. Então a solução adequada é um estaqueamento simétrico em relação a este plano. Imaginemos indicada no plano de carregamento toda posição possível da resultante por um traço. A parte do plano coberta por traços será chamada de "faixa de carregamento" (hachurada na fig. 54). Esta representação gráfica das posições de R é prática em vários casos, apesar de não ser

muito lógica por falta da indicação da intensidade de R.

O número mínimo de estacas com que temos de contar seriam as estacas dum cavalete projetado para o caso fictício de tódas as cargas R serem aplicadas no mesmo ponto. Este número será na realidade aumentado pelo efeito dos momentos. Este efeito é expresso na fig. 54 pela largura da "faixa de carregamento". Se tivermos uma faixa com um ponto de largura nula, recairemos no caso de cavalete.



Chegamos à conclusão de *Fig.54-Faixa de carregamento* que o aumento provocado pelo efeito dos momentos será mínimo se colocarmos o centro elástico do estaqueamento no meio da parte mais estreita da faixa de carga.

Se tódas as forças componentes de R estiverem contidas em 2 planos verticais, normais entre si, convém desenhar a faixa de carga em duas projeções e escolher convenientemente os 2 centros elásticos.

A disposição das estacas de tal maneira a obter um certo centro elástico é fácil quando se seguem as disposições simples indicadas no capítulo referente aos estaqueamentos planos.

Geralmente convém colocar as estacas que não passam pelo

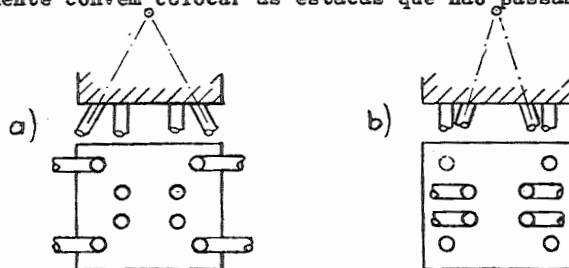


Fig. 55 - Comparação da distribuição das estacas

centro elástico com o maior braço possível. Por exemplo, entre os dois estaqueamentos representados na fig. 55, a disposição b) é mais resistente aos momentos por causa do maior braço das estacas externas.

7.4. Estaqueamento sem tração

Muitas vezes o tipo da estaca ou do solo não permite forças normais de tração. Já falamos duma das condições para evitar tração: as estacas devem ter inclinação maior que a da resultante da carga.

Um dos casos que permite um critério certo para evitar tração é o estaqueamento composto só de estacas verticais e carregado apenas por forças verticais. A "faixa de carga" ocupa um espaço cilíndrico. Aplica-se análogamente a teoria do núcleo das seções como numa barra prismática carregada por uma força excêntrica. A "seção" da barra análoga é aqui descontínua e composta pelas estacas. Não desenvolveremos esta teoria elementar porque não há muita aplicação. Só queremos mencionar o fato de que, numa disposição das estacas no perímetro dum polígono, todo o polígono é ao mesmo tempo o núcleo.

Outro caso que pode ser tratado sistematicamente é o estaqueamento plano com estacas aplicadas só em 3 retas. A posição dos pontos de influência, que são os pontos de interseção dos eixos, em relação à faixa de carga, já indica se há ou não tração. Segundo a fórmula (59), as forças normais resultam pelos momentos da carga em relação aos pontos de influência.

Na figura 56, em todo o ponto de influência, indica uma flecha o sentido dum eventual momento correspondente à compressão da respectiva estaca. Em consequência, toda faixa de carga que ocupa apenas a parte não hachurada do plano só produz compressão nas estacas. Naturalmente o sentido das resultantes deve ser sempre o mesmo - de cima para baixo.

Observação: a fig. 57 resolve também o problema análogo de suspender por 3 fios um corpo móvel num plano e de carregamento variável. Os fios só aguentam tração, não compressão. Geralmente.

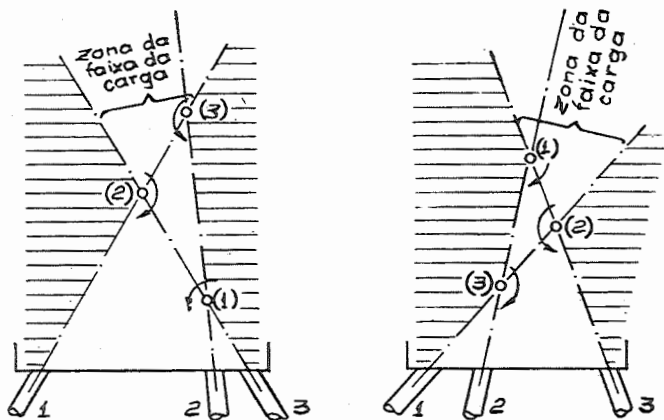


Fig. 56 - Estaqueamentos sem tração

estudos de modelo de estaqueamento podem ser efetuados com mais facilidade por fios se houver só forças normais de mesmo sentido.

Para projetar estaqueamento plano sem tração escolhem-se 3 pontos na margem da faixa dada e obtêm-se os eixos das estacas unindo os pontos. Por escolha conveniente desses pontos, as dimensões do bloco devem ser mantidas em limites razoáveis.

TABELA TRIGONOMÉTRICA

α°	tg α	sen α	cos α	sen α . cos α	sen ² α	2sen ² α	4sen ² α	6sen ² α	8sen ² α	cos ² α	2cos ² α	4cos ² α	6cos ² α	8cos ² α
4 4½	0,0699 0,0787	0,0698 0,0785	0,9976 0,9969	0,0696 0,0782	0,0049 0,0062	0,0097 0,0123	0,0195 0,0246	0,0292 0,0369	0,0389 0,0492	0,9951 0,9938	1,9903 1,9877	3,9805 3,9754	5,9708 5,9631	7,9611 7,9508
5	0,0875	0,0872	0,9962	0,0868	0,0076	0,0152	0,0304	0,0456	0,0608	0,9924	1,9848	3,9696	5,9544	7,9392
5½ 6 6½ 7	0,0963 0,1051 0,1139 0,1228	0,0958 0,1045 0,1132 0,1219	0,9954 0,9945 0,9936 0,9925	0,0954 0,1040 0,1125 0,1210	0,0092 0,0109 0,0128 0,0149	0,0184 0,0219 0,0256 0,0297	0,0367 0,0437 0,0513 0,0594	0,0551 0,0656 0,0769 0,0891	0,0735 0,0874 0,1025 0,1188	0,9908 0,9891 0,9872 0,9851	1,9816 1,9781 1,9744 1,9703	3,9633 3,9563 3,9487 3,9406	5,9449 5,9344 5,9231 5,9109	7,9265 7,9126 7,8975 7,8812
7½	0,1317	0,1305	0,9914	0,1294	0,0170	0,0341	0,0681	0,1022	0,1363	0,9830	1,9659	3,9319	5,8978	7,8637
8 8½ 9 9½	0,1405 0,1495 0,1584 0,1673	0,1392 0,1478 0,1564 0,1650	0,9903 0,9890 0,9877 0,9863	0,1378 0,1462 0,1545 0,1628	0,0194 0,0218 0,0245 0,0272	0,0387 0,0437 0,0489 0,0545	0,0775 0,0874 0,0979 0,1090	0,1162 0,1311 0,1468 0,1634	0,1550 0,1748 0,1958 0,2179	0,9806 0,9782 0,9755 0,9728	1,9613 1,9563 1,9511 1,9455	3,9225 3,9126 3,9021 3,8910	5,8838 5,8689 5,8532 5,8366	7,8450 7,8252 7,8042 7,7821
10	0,1763	0,1736	0,9848	0,1710	0,0302	0,0603	0,1206	0,1809	0,2412	0,9698	1,9397	3,8794	5,8191	7,7588
10½ 11 11½ 12	0,1853 0,1944 0,2035 0,2126	0,1822 0,1908 0,1994 0,2079	0,9833 0,9816 0,9799 0,9781	0,1792 0,1873 0,1954 0,2034	0,0332 0,0364 0,0397 0,0432	0,0664 0,0728 0,0795 0,0865	0,1328 0,1456 0,1590 0,1729	0,1993 0,2184 0,2385 0,2594	0,2657 0,2913 0,3180 0,3458	0,9668 0,9636 0,9603 0,9568	1,9336 1,9272 1,9205 1,9135	3,8672 3,8544 3,8410 3,8271	5,8007 5,7816 5,7615 5,7406	7,7343 7,7087 7,6820 7,6542
12½	0,2217	0,2164	0,9763	0,2113	0,0468	0,0937	0,1874	0,2811	0,3748	0,9532	1,9063	3,8126	5,7189	7,6252
13 13½ 14 14½	0,2309 0,2401 0,2493 0,2586	0,2250 0,2334 0,2419 0,2504	0,9744 0,9724 0,9703 0,9681	0,2192 0,2270 0,2347 0,2424	0,0506 0,0545 0,0585 0,0627	0,1012 0,1090 0,1171 0,1254	0,2024 0,2180 0,2341 0,2508	0,3036 0,3270 0,3512 0,3761	0,4048 0,4360 0,4682 0,5015	0,9494 0,9455 0,9415 0,9373	1,8988 1,8910 1,8829 1,8746	3,7976 3,7820 3,7659 3,7492	5,6964 5,6730 5,6488 5,6239	7,5952 7,5640 7,5318 7,4985
15	0,2679	0,2588	0,9659	0,2500	0,0670	0,1340	0,2679	0,4019	0,5359	0,9330	1,8660	3,7321	5,5981	7,4641
16 17 18 19	0,2867 0,3057 0,3249 0,3443	0,2756 0,2924 0,3090 0,3256	0,9613 0,9563 0,9511 0,9455	0,2650 0,2796 0,2939 0,3078	0,0760 0,0855 0,0955 0,1060	0,1520 0,1710 0,1910 0,2120	0,3039 0,3419 0,3820 0,4240	0,4559 0,5129 0,5729 0,6360	0,6078 0,6838 0,7639 0,8487	0,9240 0,9145 0,9045 0,8940	1,8480 1,8290 1,8090 1,7880	3,6961 3,6681 3,6180 3,5760	5,5441 5,4871 5,4271 5,3640	7,3922 7,3162 7,2361 7,1520
20	0,3640	0,3420	0,9397	0,3214	0,1170	0,2340	0,4679	0,7019	0,9358	0,8830	1,7660	3,5321	5,2981	7,0642
22 24 26 28	0,4040 0,4452 0,4877 0,5317	0,3746 0,4067 0,4384 0,4695	0,9272 0,9135 0,8988 0,8829	0,3473 0,3716 0,3940 0,4145	0,1403 0,1654 0,1922 0,2204	0,2807 0,3309 0,3843 0,4408	0,5613 0,6617 0,7687 0,8816	0,8420 0,9926 1,1530 1,3224	1,1226 1,3235 1,5374 1,7632	0,8597 0,8346 0,8078 0,7796	1,7193 1,6691 1,6157 1,5592	3,4387 3,3383 3,2313 3,1184	5,1580 5,0074 4,8470 4,6776	6,8774 6,6765 6,4626 6,2368

Rec. 530/60 - 2B/61
 - 142
 Sem. da P. de ...
 E.F.S.C. - D. ...

TABELA TRIGONOMETRICA

Incli- nação	tg α	sen α	cos α	sen α . cos α	sen ² α	2sen ² α	4sen ² α	6sen ² α	8sen ² α	cos ² α	2cos ² α	4cos ² α	6cos ² α	8cos ² α
15:1	0,0667	0,0665	0,9978	0,0664	0,0044	0,0088	0,0177	0,0265	0,0354	0,9956	1,9912	3,9823	5,9735	7,9646
14:1	0,0714	0,0712	0,9975	0,0711	0,0051	0,0102	0,0203	0,0305	0,0406	0,9949	1,9898	3,9797	5,9695	7,9594
13:1	0,0769	0,0767	0,9971	0,0765	0,0059	0,0118	0,0235	0,0353	0,0471	0,9941	1,9882	3,9765	5,9647	7,9529
12:1	0,0833	0,0830	0,9965	0,0828	0,0069	0,0138	0,0276	0,0414	0,0552	0,9931	1,9862	3,9724	5,9586	7,9448
11:1	0,0909	0,0905	0,9959	0,0902	0,0082	0,0164	0,0328	0,0492	0,0656	0,9918	1,9836	3,9672	5,9508	7,9344
10:1	0,1000	0,0995	0,9950	0,0990	0,0099	0,0198	0,0396	0,0594	0,0792	0,9901	1,9802	3,9604	5,9406	7,9208
9:1	0,1111	0,1104	0,9938	0,1098	0,0122	0,0244	0,0488	0,0732	0,0976	0,9878	1,9756	3,9512	5,9268	7,9024
8:1	0,1250	0,1240	0,9923	0,1231	0,0154	0,0308	0,0615	0,0923	0,1231	0,9846	1,9692	3,9385	5,9077	7,8769
7:1	0,1429	0,1414	0,9899	0,1400	0,0200	0,0400	0,0800	0,1200	0,1600	0,9800	1,9600	3,9200	5,8800	7,8400
6:1	0,1667	0,1644	0,9864	0,1622	0,0270	0,0541	0,1081	0,1622	0,2162	0,9730	1,9459	3,8919	5,8378	7,7838
5:1	0,2000	0,1961	0,9806	0,1923	0,0385	0,0769	0,1538	0,2308	0,3077	0,9615	1,9231	3,8462	5,7692	7,6923
4:1	0,2500	0,2425	0,9701	0,2353	0,0588	0,1176	0,2353	0,3529	0,4706	0,9412	1,8824	3,7647	5,6471	7,5294
10:3	0,3000	0,2873	0,9578	0,2752	0,0826	0,1651	0,3303	0,4954	0,6605	0,9174	1,8348	3,6696	5,5055	7,3394
3:1	0,3333	0,3162	0,9487	0,3000	0,1000	0,2000	0,4000	0,6000	0,8000	0,9000	1,8000	3,6000	5,4000	7,2000
10:4	0,4000	0,3714	0,9285	0,3448	0,1379	0,2759	0,5517	0,8276	1,1034	0,8621	1,7241	3,4482	5,1724	6,8965
7:3	0,4286	0,3939	0,9191	0,3621	0,1552	0,3103	0,6207	0,9310	1,2414	0,8448	1,6896	3,3793	5,0689	6,7586
9:4	0,4444	0,4061	0,9138	0,3711	0,1650	0,3299	0,6598	0,9897	1,3196	0,8351	1,6702	3,3403	5,0103	6,6804
2:1	0,5000	0,4472	0,8944	0,4000	0,2000	0,4000	0,8000	1,2000	1,6000	0,8000	1,6000	3,2000	4,8000	6,4000
3:2	0,6667	0,5547	0,8321	0,4616	0,3077	0,6154	1,2308	1,8462	2,4616	0,6923	1,3847	2,7693	4,1538	5,5386
4:3	0,7500	0,6000	0,8000	0,4800	0,3600	0,7200	1,4400	2,1600	2,8800	0,6400	1,2800	2,5600	3,8400	5,1200
1:1	1,0000	0,7071	0,7071	0,5000	0,5000	1,0000	2,0000	3,0000	4,0000	0,5000	1,0000	2,0000	3,0000	4,0000