UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
LABORATÓRIO DE MÁQUINAS FERRAMENTAS

BIBLIOTECA
CAMPUS

TRIBOLOGIA

IV - ESCOAMENTO LAMINAR

B. de M. Purquerio.
M. Sc. (Tribologia), Ph.D.

SÃO CARLOS
1983

IV - ESCOAMENTO LAMINAR

1 - VISCOSIDADE

1.1 - Definições

Viscosidade é a propriedade de um fluido a qual determina a resistencia a uma força de cisalhamento sob as condições de escoamento laminar. A palavra viscosidade é normal - mente usada como uma contração para coeficiente de viscosidade.

Consideremos um elemento de um sólido submetido a uma tensão de cisalhamento. O elemento se deformará de uma quantidade finita ϕ, conforme mostra a Figura 1.1.

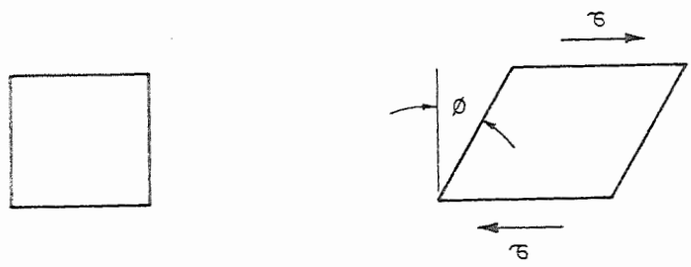


Figura 1.1 - Elemento de um sólido (a) antes e (b) depois da aplicação de uma tensão de cisalhamento

O ângulo ϕ, medido em radianos, é chamado de deformação por cisalhamento. No caso dos sólidos, a lei de Hooke se aplica, ou seja,

$$\phi \alpha \tau \qquad (1.1)$$

Consideremos agora um fluido. Neste caso, uma tensão de cisalhamento poderá ser aplicada ao fluido se ele estiver contido, por exemplo, entre duas placas planas e parale - las, onde uma delas move, em seu próprio plano, relativamente à outra, conforme ilustra a Figura 1.2.

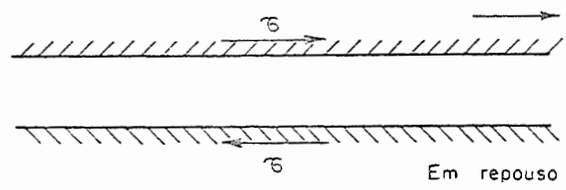


Figura 1.2 - Tensão de cisalhamento aplicada a um fluido entre duas placas planas e paralelas.

A placa superior pode mover sem limitações, ou seja, não existe limite para a quantidade de deformação por cisalhamento a que o fluido possa ser submetido. Porém, a velocidade u de uma das placas relativamente à outra depende da tensão de cisalhamento τ aplicada.

Em outras palavras, a velocidade u é proporcional à razão com que o fluido está sendo deformado, ou seja,

$$u \alpha \frac{d\phi}{dt} \tag{1.2}$$

Portanto, $\frac{d\phi}{dt}$ depende de tensão de cisalhamento τ e, no caso de fluidos newtonianos,

$$\frac{d\phi}{dt} \alpha \tau \tag{1.3}$$

Exemplos de fluidos newtonianos são o ar, água, óleos lubrificantes nas mais variadas formas; e exemplos de fluidos não newtonianos são graxas, tintas gelatinosas, óleos com taxa de deformação muito elevada. Um fluido exibe um escoamento newtoniano quando a tensão de cizalhamento (τ) e a razão de deformação, ou velocidade de deformação ($d\phi/dt$) são diretamente proporcionais, ou seja a viscosidade não varia com a velocidade de deformação.

Um fluido se deforma por cizalhamento sempre que houver um gradiente de velocidade normal à direção do escoamento. Consideremos a Figura 1.3, que mostra um elemento de fluido através do qual a velocidade varia de u para u + du. Consideremos que o elemento é retangular quando o tempo t = 0.

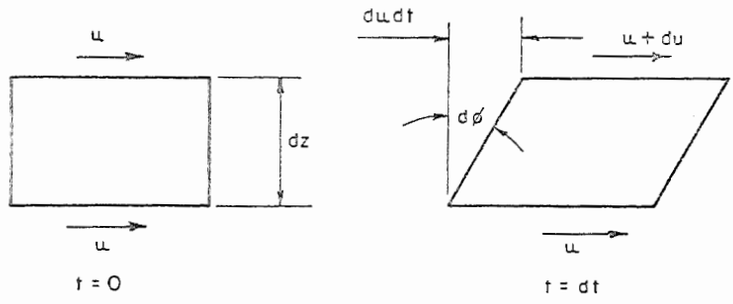


Figura 1.3 - Elemento de fluido deformado por cisalhamento devido ao gradiente de velocidade normal à direção do escoamento.

O aumento da deformação por cisalhamento do elemento no tempo t = dt será,

$$d\phi \text{ (radianos)} = \frac{du\ dt}{dz}$$

Portanto, a razão com que o fluido está sendo deformado será,

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{du}{dz} \qquad (1.4)$$

E, para um fluido newtoniano conforme relações (1.3) e (1.4),

$$\tau \alpha \frac{du}{dz} \quad \text{ou} \quad \tau = \eta \frac{du}{dz} \qquad (1.5)$$

onde η é a constante de proporcionalidade e chamada de coeficiente de viscosidade dinâmica ou simplesmente viscosidade dinâmica. A expressão (1.5) é a lei de Newton para fluidos viscosos ou newtonianos.

O coeficiente de viscosidade dinâmica pode ser obtido da relação (1.5) ou seja,

$$\eta = \tau \frac{dz}{du} \qquad (1.6)$$

e pode agora ser definida como sendo a força tangencial por unidade de área de uma das duas placas paralelas separadas por uma distância unitária quando o espaço entre as placas for preenchido com um fluido e uma das placas mover relativamente a outra, em seu próprio plano, com uma velocidade igual a unidade.

1.2 - Dimensão e Unidades

Fazendo a análise dimensional da relação (1.6),

$$\eta = \tau \frac{dz}{du} \equiv \frac{F}{L^2} \cdot \frac{L}{L/T} = \frac{F.T}{L^2} = \frac{ML}{T^2} \cdot \frac{T}{L^2} = \frac{M}{LT}$$

Portanto, $\eta \equiv \frac{M}{LT}$

A Tabela 1.1 fornece as unidades da viscosidade dinâmica nos vários sistemas. As unidades no sistema internacional (S.I.) são as mais utilizadas.

Sistema	Unidades	Denominação
F.P.S. (pés,lb,s,)	$\frac{lbf.s}{(pé)^2}$	
E.G.S.(cm,g,s)	$\frac{din.s}{cm^2}$ ou $\frac{g}{cm.s}$	Poise (P)
S.I. (N,m,s)	$\frac{N.s}{m^2}$ ou $\frac{kg}{m.s}$	Poiseuille (Pl)

Tabela 1.1 - Unidades da viscosidade dinâmica.

1.3 - Viscosidade Cinemática

A viscosidade cinemática de um fluido é igual ao quociente entre a viscosidade dinâmica (η) e a densidade do fluido (ρ), ou seja,

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \qquad (1.7)$$

As dimensões da viscosidade cinemática são:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \equiv \frac{M}{LT} \cdot \frac{L^3}{M} = \frac{L^2}{T}$$

As unidades da viscosidade cinemática são mostrados na Tabela 1.2 para os vários sistemas.

Sistema	Unidades	Denominação
F.P.S.(pés,lb,s)	$\frac{(\text{pé})^2}{s}$	
C.G.S.(cm,g,s)	$\frac{cm^2}{s}$	Stoke (St)
S.I. (N,m,s)	$\frac{m^2}{s}$	

Tabela 1.2 - Unidades da viscosidade cinemática.

As unidades menores, o centipoise (cP) e o centistoke (cSt)são mais convenientes exceto para líquidos muito viscosos.

1 cP = 0.01 P
1 cSt= 0.01 St

2 - EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE E DO MOVIMENTO

2.1 - Equação da Continuidade

Consideremos um escoamento bidimensional no qual u e v são os componentes da velocidade nas direções x e y respectivamente. Tomemos um volume de controle estacionário, como mostra a Figura 2.1, tendo as dimensões dx, dy e unidade na direção dos z (dw = 1).

Se u for a velocidade através da face AB do elemento de fluido, então vazão em massaatravés de AB será: ρ u dy.

Em geral, a vazão em massa através

da face CD é $\rho u dy + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u)\, dxdy$.

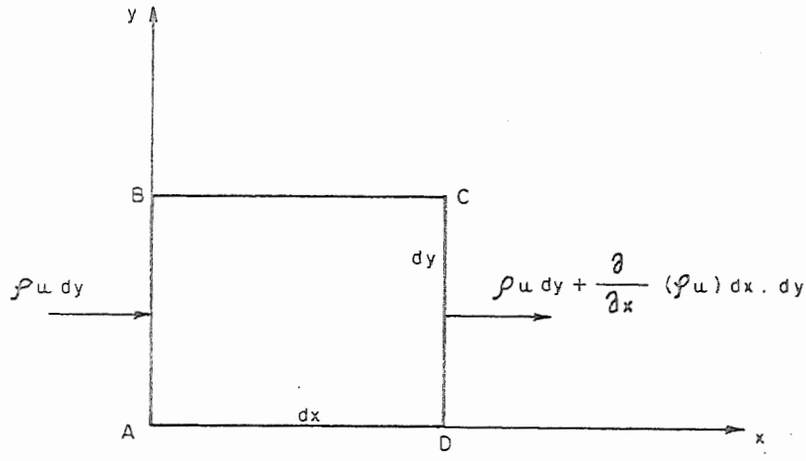


Figura 2.1 - Volume de controle estacionário.

Analogamente, para as faces AD e BC, as vazões em massa são respectivamente, $\rho v dx$ e $\rho v dx + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) dxdy$.

Portanto, a resultante da vazão em massa para dentro do elemento de fluido, será igual a

$$- \frac{\partial}{\partial x} (\rho u)\, dxdy - \frac{\partial}{\partial y} (\rho v)\, dydx$$

A massa inicial do elemento era $\rho dxdy$ quando $t = 0$. O aumento em massa do elemento durante o tempo dt passa a ser $\frac{\partial \rho}{\partial \tau} dxdydt$.

Portanto, para que exista a conservação da massa no elemento de fluido, o aumento em massa do volume de controle durante o tempo dt deve ser igual a resultante da vazão em massa para dentro do elemento durante o tempo dt, ou seja,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydt = - \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u)\, dxdy + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v)\, dxdy \right] dt$$

ou, $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) = 0 \qquad (2.1)$$

Considerando as três dimensões, e que W seja o componente da velocidade na direção z, resulta,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad (2.2)$$

A relação (2.2) é a forma mais geral da equação da continuidade aplicável a um escoamento compressível e não viscoso (laminar).

Para um escoamento viscoso, a densidade é independente do tempo t e a relação (2.2) simplifica-se para

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad (2.3)$$

Por outro lado, para um fluido incompressível a densidade ρ é a mesma em todos os pontos, isto é, ρ é independente de x, y ou z. Assim,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

passa a ser a equação da continuidade para um fluido incompressível em escoamento viscoso.

2.2 - Equação do Movimento

2.2.1 - Aceleração

Através do até agora exposto, pode-se verificar que em um escoamento, a velocidade depende do tempo e do sistema de referência. Analizando o termo u da velocidade, na direção do eixo dos x, temos que,

$$u = f(x, y, z, t)$$

Desta forma, qualquer variação da velocidade u durante o intervalo de tempo dt é expres

so pela relação,

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \qquad (2.5)$$

Se dividimos a relação (2.5) por dt e tomamos o limite quando $dt \to 0$, ou seja o intervalo dt for muito pequeno, teremos:

$$\frac{du}{dt} \to \frac{Du}{Dt} \; ; \; \frac{dx}{dt} \to u \; ; \frac{dy}{dt} \to v \; ; \frac{dz}{dt} \to w$$

Substituindo esses limites em (2.5) resulta:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \qquad (2.6)$$

Essa relação representa a aceleração total do fluido em escoamento, onde

$\frac{Du}{Dt}$ = aceleração total

$\frac{\partial u}{\partial t}$ = aceleração local

$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{du}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$ = aceleração convectiva.

2.2.2 - A equação de Navier-Stokes

A equação do movimento de um fluido relaciona as várias forças que podem atuar no seu escoamento. Ela pode ser descrita através dos termos que a representam, da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix}\text{Termos das}\\ \text{forças de}\\ \text{Inércia}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{Termo das}\\ \text{forças de}\\ \text{Corpo}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{Termos das}\\ \text{forças de}\\ \text{Pressão}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{Termos das}\\ \text{forças vis}\\ \text{cosas}\end{bmatrix}$$

Substituindo os vários termos da equação, esta toma a seguinte forma:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \nabla^2 u \qquad (2.7)$$

ou,

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}}_{\text{Forças de Inércia (massa x aceleração)}} = \underbrace{X}_{\text{Forças de Corpo}} - \underbrace{\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}}_{\text{Forças de Pressão}} +$$

$$+ \underbrace{\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2} + \frac{\partial u^2}{\partial z^2}\right)}_{\text{Forças Viscosas}} \qquad (2.8.a)$$

Analogamente para os demais componentes da velocidade nas direções y e z existem expressões semelhantes à (2.8.a), ou sejam :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y} +$$

$$+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \qquad (2.8.b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} +$$

$$+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \qquad (2.8.c)$$

As equações (7.8) são conhecidas pelo nome de equações de Navier-Stokes. O importante

dessas equações é a compreensão do seu significado físico e o que elas representam como também, a maneira de utilizá-las.

Não existe uma solução analítica geral para as equações de Navier-Stokes. Elas são equações diferenciais parciais de segunda ordem e são não-lineares nos termos relativos à aceleração convectiva. As soluções dependem sobremaneira das simplificações feitas através de suposições.

Exemplificando, consideremos a equação na direção do eixo dos x para um escoamento viscoso sem forças de corpo,

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad (2.9)$$

Essa equação pode ser admensionalizada, dividindo todas as velocidades por uma velocidade característica V e todos os comprimentos por um comprimento característico ℓ. A pressão pode ser admensionalizada dividindo-a por V^2.

Sejam portanto, $u' = \frac{u}{V}$; $v' = \frac{v}{V}$; $w' = \frac{w}{V}$,

$$x' = \frac{x}{\ell} \; ; \; y' = \frac{y}{\ell} \; ; \; z' = \frac{z}{\ell} \; ;$$

e $$p' = \frac{p}{\ell V^2} \qquad (2.10)$$

onde, u', v', w', etc são admensionais.

Substituindo as relações (2.10) em (2.9) resulta:

$$u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'} + w'\cdot\frac{\partial u'}{\partial z'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\nu}{\ell V}\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2}\right) \qquad (2.11)$$

A equação (2.11) torna-se agora mais fácil de ser interpretada. A quantidade $\frac{\nu}{\ell V}$ é o inverso do conhecido número de Reynolds. Se o número de Reynolds $\frac{V\ell}{\nu}$ é pequeno, as forças viscosas tornam-se grandes quando comparadas com os têrmos das forças de inércia e estes últimos podem ser desprezados.

Os números de Reynolds baixos resultam de baixa velocidades, pequenas características dimensionais que definem o sistema ou uma viscosidade alta. Nos problemas de lubrificação o comprimento característico que define o campo de escoamento é pequeno, ou seja, os filmes de fluido. Porém, se as velocidades são altas ou se o lubrificante tem uma viscosidade baixa, o número de Reynolds pode ser ainda bastante elevado para que as forças de inércia sejam desprezadas mesmo para películas finas.

De um modo geral, para números de Reynolds muito baixos as forças de inércia podem ser desprezadas. Com a elevação do número de Reynolds as forças de inércia devem ser levadas em consideração. Com um aumento maior ainda no número de Reynolds, o escoamento torna-se instável, resultando em escoamentos laminares secundários ou condições de escoamento super-laminares como normalmente são chamadas. O contínuo aumento do número de Reynolds leva o escoamento ao chamado regime turbulento.

2.3 - Dedução das Equações de Navier-Stokes

Na dedução das equações do movimento para um fluido viscoso, far-se-á um tratamento bidimensional. Consideremos um elemento de fluido conforme ilustra a Figura 2.2. A tensão superficial a que cada face deste elemento está sujeita pode ser representada através da tensão normal (σ) e da tensão de cisalhamento (τ).

Em adição a estas forças devido à tensão superficial, o elemento de fluido pode estar sujeito ainda às forças de corpo, como por exemplo a gravidade ou forças magnéticas.

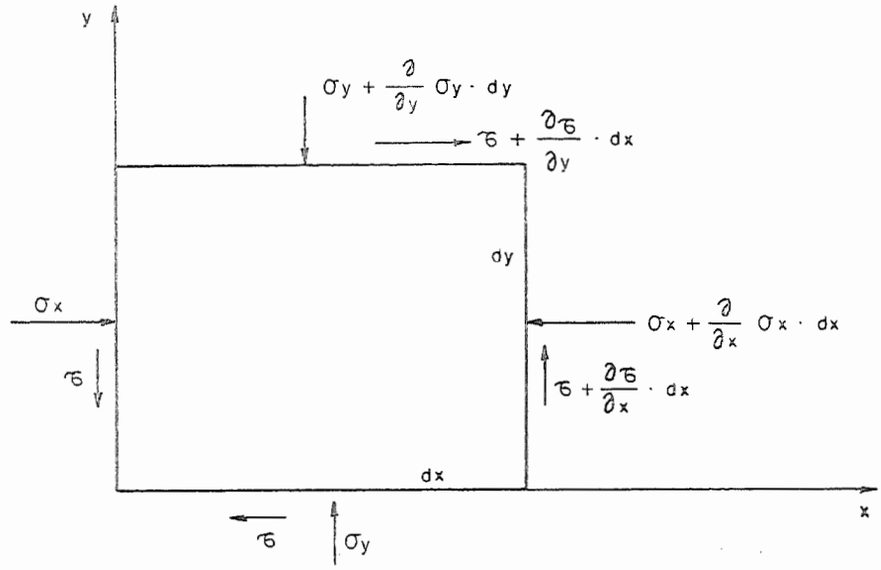


Figura 2.2 - Elemento de fluido sujeito as tensões superficiais σ e τ .

Sejam X e Y os componentes da força de corpo por unidade de massa nas direções x e y, respectivamente.

As equações do movimento para as direções x e y são, respectivamente:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho X - \frac{\partial \sigma x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \qquad (2.12.a)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho Y - \frac{\partial \sigma y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} \qquad (2.12.b)$$

onde $\frac{Du}{Dt}$ e $\frac{Dv}{Dt}$ são as acelerações totais nas direções x e y respectivamente.

Definindo a pressão p como sendo,

$$p = \frac{\sigma x + \sigma y}{2} ,$$

$$\text{resultam,} \quad \sigma x = p + \frac{\sigma x - \sigma y}{2} \qquad (2.13.a)$$

e $$\sigma y = p + \frac{\sigma y - \sigma x}{2} \qquad (2.13.b)$$

Consideremos a tensão de cisalhamento que atua em um plano a 45^{o} ao eixo x, y., do volume unitário de controle conforme mostra a Figura 2.3.

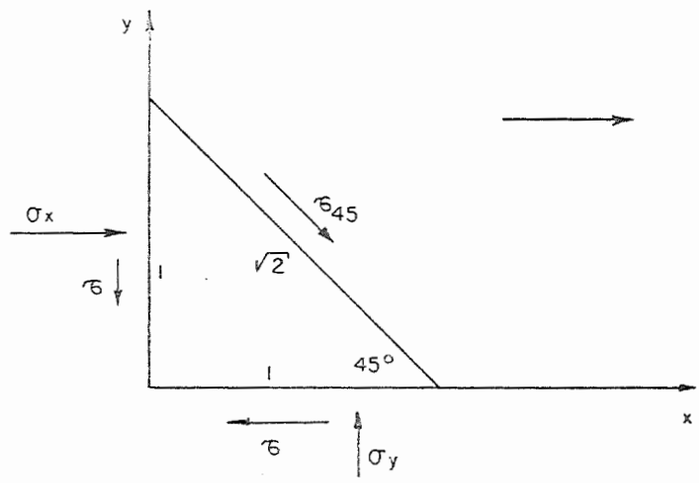


Figura 2.3 - Tensão de cisalhamento atuando em um plano a 45^{o} ao eixo xy.

Pela Figura 2.3, para que haja o equilíbrio das forças que atuam no elemento,

$$1 \cdot \frac{\sigma x}{\sqrt{2}} - 1 \cdot \frac{\sigma y}{\sqrt{2}} = - \sqrt{2} \cdot \tau_{45}$$

ou $$\frac{\sigma x - \sigma y}{2} = - \tau_{45} \qquad (2.14)$$

Substituindo (2.14) em (2.13.a) resulta,

$$\sigma x = p - \tau_{45} \qquad (2.15)$$

e a equação (2.12.a) fica:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{45}}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \qquad (2.16)$$

Analisemos agora a geometria do movimento, considerando o elemento de fluido da Figura 2.4. Em (a), a figura mostra as velocidades do fluido nos quatro cantos A, B, C e D do elemento no tempo t=0 e em (b) é mostrada a distorção que o elemento sofre depois de decorrido um tempo t = dt, ocupando a posição A', B', C' e D'.

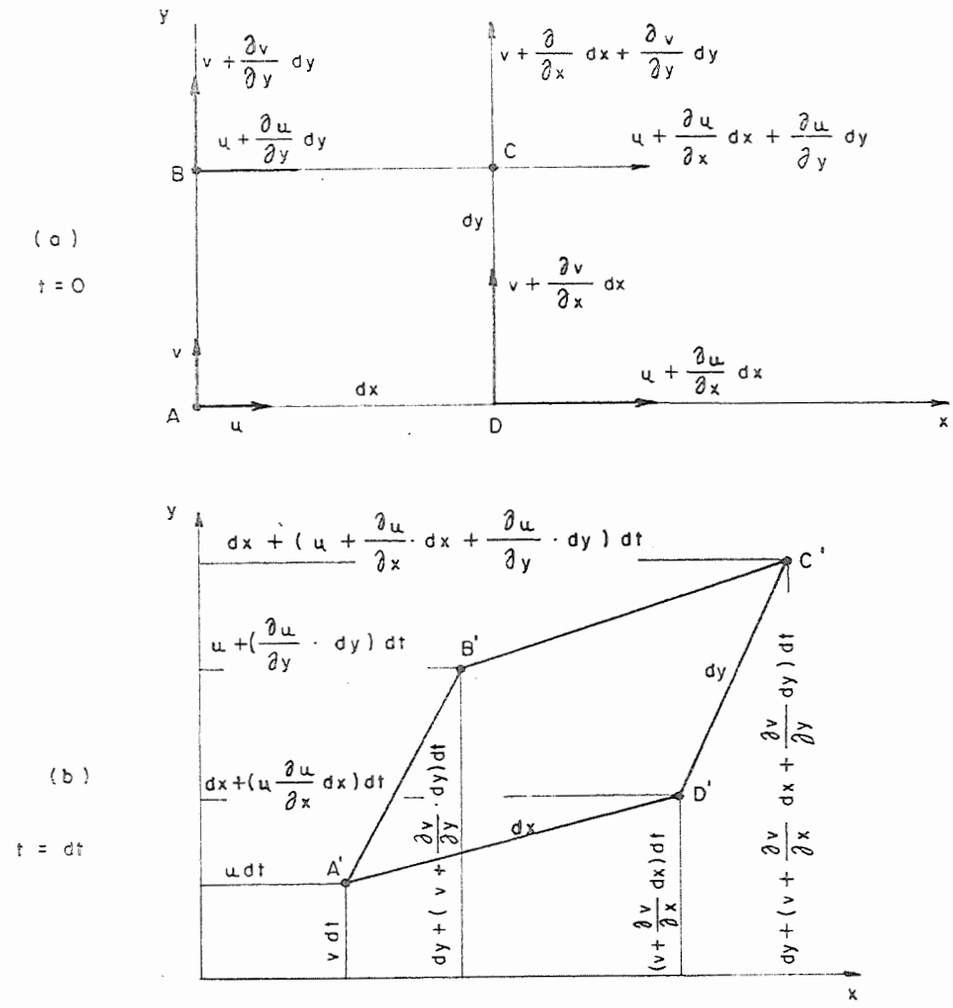


Figura 2.4 - Geometria do Movimento.

A distorção do elemento da Figura 2.4 pode ser atualizada da seguinte forma, como a soma de vários movimentos;

a) Um movimento geral u dt e v dt

b) Uma deformação linear na direção x como mostra a Figura 2.5 (a), onde

$$\text{Deformação} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dt$$

c) Uma deformação linear na direção do eixo y, como mostra a Figura 2.5 (b), onde

$$\text{Deformação} = \frac{\partial v}{\partial y} \cdot dt$$

d) Uma deformação por cisalhamento como mostra a Figura 2.5 (c), onde

$$\text{Deformação} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dt$$

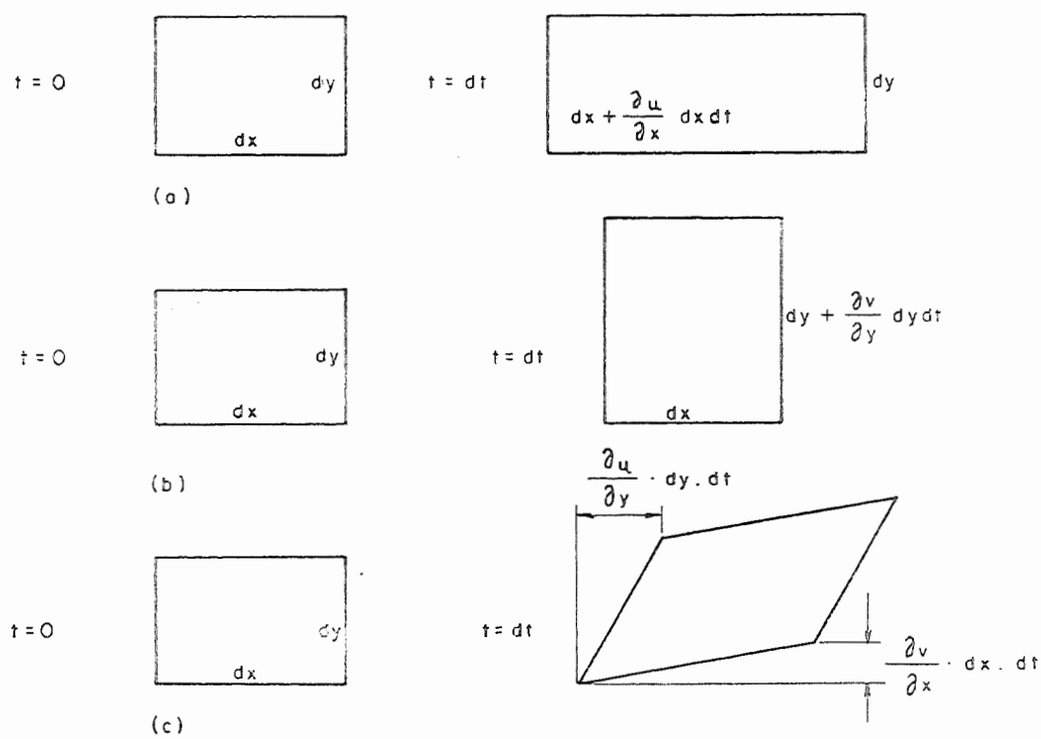


Figura 2.5 - Análise das distorções do elemento de fluido.

Existe um relacionamento entre a tensão e a deformação. É usual assumir que as tensões de cisalhamento são proporcionais aos componentes da deformação. Um fluido que obedece esse relacionamento é

chamado de fluido do newtoniano. Portanto, para o caso em análise,

$$\tau = \eta \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \qquad (2.17)$$

onde η é a viscosidade dinâmica.

Considerando a Figura 2.2 e as relações (2.13), as tensões normais no elemento de fluido podem ser representadas equivalentemente as mostradas na Figura 2.6.

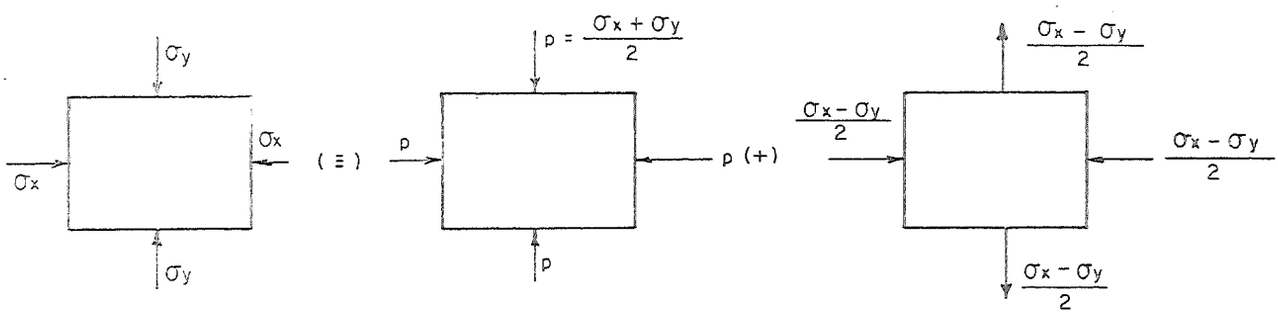


Figura 2.6 - Equivalencia das tensões normais σy e σy.

Supondo que o fluido seja incompressível, a pressão p não contribui em nada para a deformação do elemento de fluido, conforme pode ser visto pela Figura 2.6.

A segunda parte do sistema de tensões da Figura 2.6 é equivalente ao cisalhamento puro em um plano a 45° ao eixo x-y como mostra a Figura 2.7, ou seja, no equilíbrio das forças atuantes,

$$\tau_{45} = 0$$

$$-\sqrt{2} \cdot \tau_{45} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot 1$$

$$-\tau_{45} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$$

$$\text{ou} \quad \sigma_x = p - \tau_{45}$$

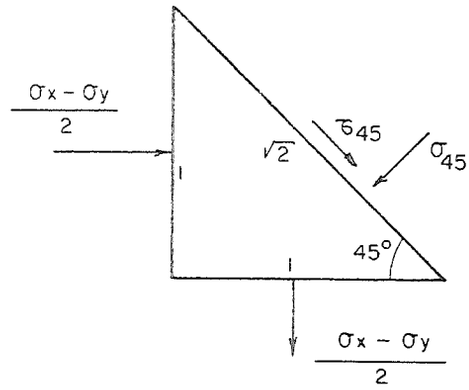


Figura 2.7 - Cisalhamento em um plano a 45° ao eixo x-y

Consideremos agora, a deformação linear na direção do eixo x devido a tensão de cisalhamento no plano inclinado a 45° (τ_{45}). A Figura 2.8 mostra o elemento sob a ação da tensão de cisalhamento a 45°.

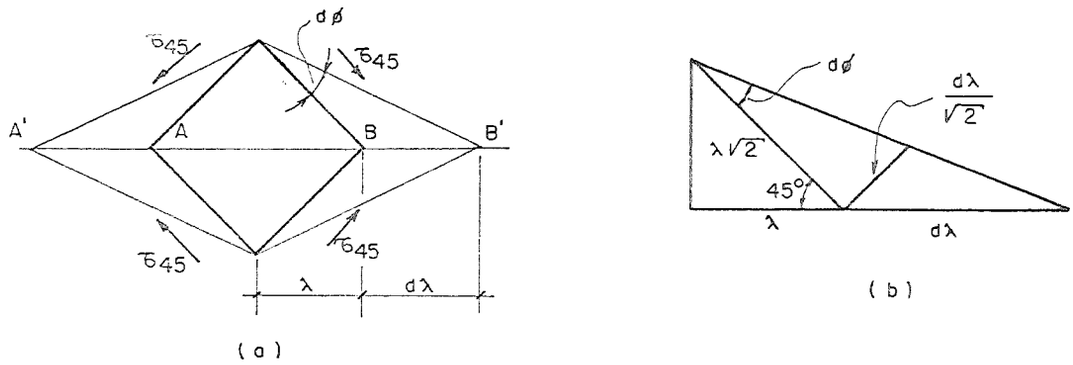


Figura 2.8 - Elemento de fluido sob a ação de cisalhamento puro.

Dessa forma concluimos que:

$$\text{deformação linear} = \frac{d\lambda}{\lambda}$$

e deformação por cisalhamento = $2\,d\phi$

$$= 2\,\frac{d\lambda}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\lambda} = \frac{d\lambda}{\lambda}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dt$$

Analogamente, as contribuições a deformação por cisalhamento devido a deformação linear na direção do eixo y será:

$$- \frac{\partial v}{\partial x} dt$$

Portanto, de acordo com a relação (2.17),

$$\tau_{45} = \eta \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \qquad (2.18)$$

e, a equação (2.16), depois da substituição das relações (2.17) e (2.18), fica:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} \right)$$

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

ou, para o caso de três dimensões,

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \qquad (2.19)$$

Se o fluido for compressível, existirão outras deformações devido a pressão p. Das considerações de simetria, as 3 deformações lineares são iguais a 1/3 da deformação volumétrica, ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial t}$$

Substituindo a equação da continuidade (2.2) na relação acima resulta,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \qquad (2.20)$$

Adicionando a eq. (2.20) à (2.19), fica:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{3} \eta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) +$$

$$+ \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

ou, substituindo o valor da aceleração total $\frac{Du}{Dt}$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{du}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla 2 \, u +$$

$$+ \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \qquad (2.21.a)$$

onde $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Analogamente, para as direções y e z,

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} +$$

$$+ \nu \nabla^2 v + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \qquad (2.21.b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w$$

$$+ \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \qquad (2.21.c)$$

As equações (2.21) são as equações de Navier-Stokes para o Sistema Cartesiano de Coordenadas.

2.4 - Os Outros Sistemas de Coordenadas.

2.4.1 - Coordenadas Cilindricas Polares.

As equações serão apresentadas para um fluido incompressível e na ausencia de forças de corpo.

As coordenadas são: r, ϕ e z tal que,

$$x = r \cos \phi$$
$$y = r \operatorname{sen} \phi$$

a) Equação da Continuidade

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (2.22)$$

b) Equações do Movimento (Navier-Stokes)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} =$$

$$= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \phi} \right) \qquad (2.23.a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{v} =$$

$$= - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \phi} + \nu \left(\nabla^2 v - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{v}{r^2} \right)$$

(2.23.b)

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \phi} + w \frac{\partial w}{\partial z} =$$

$$= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w \qquad (2.24.c)$$

onde, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

2.4.2 - Coordenadas Esféricas Polares.

As equaçoes são para um fluido incom

pressível na ausencia de forças de corpo. As coordenadas são: R, θ e ϕ, tal que,

$$x = R \operatorname{sen}\theta \cos\phi$$
$$y = R \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$$
$$z = R \cos\theta$$

a) Equação da Continuidade

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2 u) + \frac{1}{R\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v\operatorname{sen}\theta) + \frac{1}{R\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial w}{\partial\theta} = 0 \qquad (2.25)$$

b) Equações do Movimento (Navier-Stokes)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial R} + \frac{v}{R}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{w}{R\operatorname{sen}\phi}\cdot\frac{\partial u}{\partial\phi} - \frac{v^2 - w^2}{R} =$$

$$= -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial R} + \nu\left[\nabla^2 u - \frac{2u}{R^2} - \frac{2}{R^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta} - \frac{2v\cot\theta}{R^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{R^2\operatorname{sen}\theta}\cdot\frac{\partial w}{\partial\phi}\right] \qquad (2.26.a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial R} + \frac{v}{R}\cdot\frac{\partial v}{\partial\theta} + \frac{w}{R\operatorname{sen}\theta}\cdot\frac{\partial v}{\partial\phi} + \frac{uv}{R} -$$

$$- \frac{w^2\cot\theta}{R} = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{1}{R}\cdot\frac{\partial p}{\partial\theta} + \nu\left[\nabla^2 v + \frac{2}{R^2}\frac{\partial u}{\partial\theta} - \right.$$

$$\left. - \frac{v}{R^2\operatorname{sen}^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{R^2\operatorname{sen}^2\theta}\cdot\frac{\partial w}{\partial\phi}\right] \qquad (2.26.b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial R} + \frac{v}{R}\frac{\partial w}{\partial\theta} + \frac{w}{R\operatorname{sen}\theta}\cdot\frac{\partial w}{\partial\phi} + \frac{wu}{R} +$$

$$+ \frac{v\,w\cot\theta}{R} = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{1}{R\operatorname{sen}\phi}\cdot\frac{\partial p}{\partial\phi} + \nu\left[\nabla^2 w - \right.$$

$$\left. - \frac{w}{R^2\operatorname{sen}\theta} + \frac{2}{R^2\operatorname{sen}\theta}\cdot\frac{\partial u}{\partial\phi} + \frac{2\cos\theta}{R^2\operatorname{sen}^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial\phi}\right] \qquad (2.26.c)$$

$$\text{onde, } \nabla^2 = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2\,\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\,\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) +$$

$$+ \frac{1}{R^2\,\text{sen}^2\theta}\cdot\frac{2}{\partial\phi^2}$$

3 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

Existem vários escoamentos simples nos quais as forças de inércia são nulas. As soluções se aplicam até o número de Reynolds para o qual o escoamento torna-se instável e consequentemente turbulento.

Exemplo 1 - Escoamento entre duas placas paralelas.

Consideremos o escoamento de um fluido entre duas placas planas e paralelas separadas por uma distância h, conforme mostra a Figura 3.1. Uma das placas move em relação a outra com uma velocidade U e esta última permanece estacionária. A origem das coordenadas x - z localiza-se na placa estacionária e é suposto existir um gradiente de pressão dp/dx na direção x.

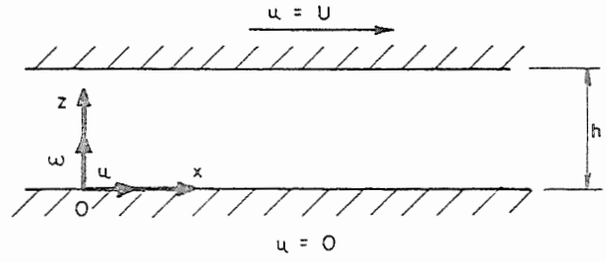


Figura 3.1 - Escoamento de um fluido entre duas placas planas e paralelas.

Condições:

a) Não existe nenhum gradiente de pressão nas direções y e z.

b) As forças de corpo são nulas.

c) O escoamento é viscoso (laminar).

d) O fluido é incompressível.

Pelos dados do problema, $v = w = 0$, ou seja as velocidades nos eixos y e z são nulas.

Portanto, $u = f(z)$, somente.

Considerando as condições estabelecidas para o problema, as equações de Navier-Stokes para coordenadas cartesianas - equações (2.21), se reduzem a.

$$0 = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

a qual, não é uma equação diferencial parcial.

Portanto, $\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{dp}{dx}$ onde $\eta = \rho\nu$

Integrando essa equação duas vezes, obtemos,

$$\frac{du}{dz} = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot z + A$$

$$u = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot \frac{z^2}{2} + A_z + B$$

As constantes A e B podem ser determinadas através das condições de contorno, ou sejam,

para $u = 0$, $z = 0$

para $u = U$, $z = h$

Aplicando as condições de contorno resultam,

$$B = 0$$

e

$$U = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot \frac{h^2}{2} + Ah$$

ou

$$A = \frac{U}{h} - \frac{1}{\eta} \cdot \frac{dp}{dx} \frac{h}{2}$$

Portanto, a velocidade do escoamento resulta,

$$u = -\frac{1}{2\eta} \cdot \frac{dp}{dx} \left(zh - z^2 \right) + \frac{Uz}{h}$$

Analizemos a distribuição da velocidade para dois casos:

a) para $\frac{dp}{dx} = 0$; $u = \frac{Uz}{h}$

Como pode ser visto pela Figura 3.2(a), o perfil da distribuição de velocidade do escoamento é linear e é chamado de Escoamento de Couette.

b) para $U = 0$; $u = -\frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} zh - z^2$

Neste caso, o perfil de velocidade do escoamento tem uma distribuição parabólica e recebe o nome de Escoamento de Poiseuille. A Figura 3.2 (b) ilustra esse escoamento.

(a) Escoamento de Couette

(b) Escoamento de Poiseuille.

Figura 3.2 - Distribuição da velocidade nos escoamentos de (a) Couette e (b) Poiseuille.

A vazão volumétrica por unidade de comprimento na direção y, para o caso de duas placas paralelas é definida pela relação.

$$Q = \int_0^h u\,dz$$

Substituindo, nesta relação a velocidade u pela sua equação e integrando, resulta:

$$Q = -\frac{1}{2\eta} \cdot \frac{dp}{dx} \int_0^h (zh - z^2)\,dz + \frac{U}{h} \int_0^h z\,dz$$

$$Q = -\frac{1}{2\eta} \cdot \frac{dp}{dx} \left[z^2 \frac{h}{2} - \frac{z^3}{3} \right]_0^h + \frac{U}{h} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^h$$

$$Q = -\frac{h^3}{12\eta}\frac{dp}{dx} + \frac{Uh}{2}$$

Poiseuille Couette

A vazão volumétrica por unidade de comprimento contém ambas as vazões devido aos escoamentos de Couette e Poiseuille.

Exemplo 2 - Escoamento em um tubo circular.

Consideremos agora, o escoamento no interior de um tubo de seção circular com raio a, conforme esquematizado na Figura 3.3. Assumiremos que o fluido é incompressível, o escoamento seja laminar e não exista a atuação de forças de corpo.

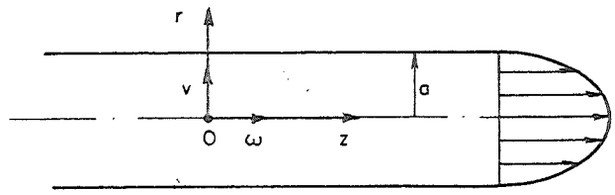


Figura 3.3 - Escoamento em um tubo circular.

Pelo problema, u = v = 0; w = f (r) somente e p = f (z) somente.

Neste exemplo, as equações do movimento em coordenadas cilindricas polares - equações (2.23), se reduzem a,

$$0 = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial r}\right)$$

ou, $$\frac{dw^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{dw}{dr} = \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dz}$$

Multiplicando por r,

$$r\frac{d_w^2}{dr^2} + \frac{d_w}{dr} = \frac{r}{\eta}\frac{dp}{dz}$$

Integrando,

$$\frac{dw}{dr} = \frac{r^2}{2\eta} \frac{dp}{dz} + A$$

ou, $$\frac{dw}{dr} = \frac{r}{2\eta} \frac{dp}{dz} + \frac{A}{r}$$

Integrando,

$$w = \frac{r^2}{4\eta} \frac{dp}{dz} + A\ell_n r + B$$

As constantes A e B podem ser determinadas através das condições de contorno e das considerações de simetria, ou sejam,

$$w = 0 \quad ; \quad r = a$$

$$\frac{dw}{dr} = 0 \; ; \quad v = 0 \; (r=0)$$

Portanto, $A = 0$

$$B = -\frac{a^2}{4\eta} \cdot \frac{dp}{dz} \; ;$$

e, $$w = -\frac{1}{4\eta} \frac{dp}{dz} (a^2 - r^2)$$

ou seja, a distribuição da velocidade é parabólica.

A vazão volumétrica pode ser calculada pela relação,

$$Q = 2\pi \int_o^a w r dr$$

$$Q = -\frac{\pi}{2\eta} \cdot \frac{dp}{dz} \int_o^a (a^2 r - r^3) dr$$

$$Q = -\frac{\pi}{4\eta} \cdot \frac{dp}{dz} \left[\frac{a^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_o^a$$

$$Q = -\frac{\pi a^4}{8\eta} \cdot \frac{dp}{dz}$$

A velocidade média do escoamento é dado por,

$$V = \frac{Q}{\pi a^2}$$

ou, $$V = \frac{-a^2}{8\eta} \cdot \frac{dp}{dz}$$

Se d for o diâmetro do tubo, resulta.

$$V = -\frac{d^2}{32\eta} \cdot \frac{dp}{dz}$$

Se existe uma diferença de pressão no escoamento ou seja, a pressão cai de um valor p_1 para um valor p_2 no comprimento ℓ, então.

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{p_1 - p_2}{\ell}$$

ou, $$p_1 - p_2 = \frac{32\eta\ell V}{d^2}$$

A máxima velocidade do escoamento ocorre na linha de centro do tubo, ou seja, para v = 0.

Portanto, $$U_{máx} = \frac{-a^2}{4\eta} \cdot \frac{dp}{dz}$$

Ou $U_{máx} = 2\ V$, a velocidade máxima é igual a duas vezes a velocidade média do escoamento.

Exemplo 3 - Escoamento de um fluido viscoso em uma placa vertical com superfície livre.

Consideremos uma película de fluido viscoso com espessura h se escoando por uma placa vertical, conforme mostra a Figura 3.4. A película de fluido apresenta uma das superfícies livre. Assumiremos que o escoamento é laminar e o fluido seja incompressível. A origem das coordenadas localiza-se na placa vertical.

No escoamento deste exemplo não existe um gradiente de pressão devido a presença da superfície livre. Portanto,

$$v = w = 0$$

e $$u = f(z) \text{ somente.}$$

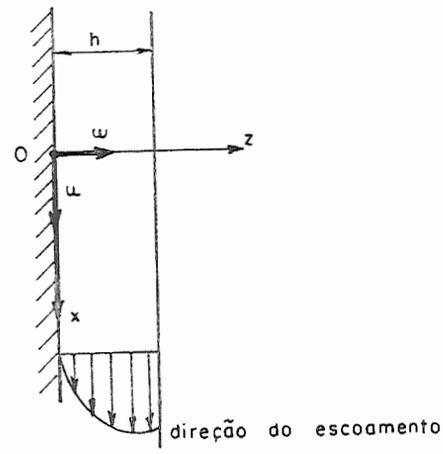


Figura 3.4 - Escoamento em uma placa vertical.

As equações de Navier-Stokes em coordenadas cartezianas - equações (2.21), se reduzem a,

$$0 = g + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

onde g é a força da gravidade (força de corpo/unidade de massa)

Essa equação pode ser escrita,

$$\frac{d^2u}{dz^2} = - \frac{g}{\nu}$$

Integrando duas vezes,

$$\frac{du}{dz} = - \frac{gz}{\nu} + A$$

$$u = - \frac{gz^2}{2\nu} + Az + B$$

As constantes A e B são determinadas pelas condições de contorno e pela suposição de que não haja movimento do ar na superfície livre, a tensão de cisalhamento (τ) nessa superfície será nula.

Ou seja,

$$u = 0 \quad \text{para} \quad z = 0$$

$$\tau = \frac{du}{dz} = 0 \quad \text{para } z = h$$

Portanto, $A = g \frac{h}{\nu}$

$$B = 0 \ ,$$

e, $$u = \frac{g}{\nu} \left(zh - \frac{z^2}{2}\right)$$

A vazão volumétrica por unidade de profundidade na direção y é fornecida pela relação,

$$Q = \int_0^h u dz$$

Substituindo, a velocidade do escoamento nesta relação,

$$Q = \frac{g}{\nu} \int_0^h \left(zh - \frac{z^2}{2}\right) dz = \frac{g}{\nu} \left[z^2 \frac{h}{2} - \frac{z^3}{6}\right]_0^h$$

$$Q = \frac{gh^3}{3\nu}$$

4 - VISCOSIMETROS

Existem três tipos principais de viscosimetros:

a) Viscosimetro de Capilar
b) Viscosimetro Rotativo
c) Esfera em Queda Livre

4.1 - Viscosimetro Capilar

O princípio de funcionamento dos viscosimetros capilares pode ser estudado através da análise do escoamento de um fluido em um tubo capilar

de comprimento (e) e diâmetro (d) sujeito a pressão de uma coluna de fluido de altura constante, (h) conforme mostra o esquema da Figura 4.1.

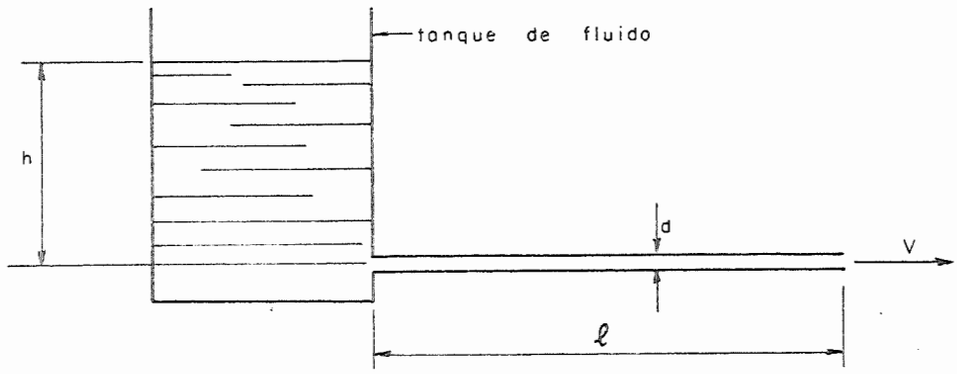


Figura 4.1 - Escoamento de um fluido em um tubo capilar
A altura h é mantida constante.

Como visto anteriormente (Exemplo 2), para um escoamento a queda de pressão entre dois pontos do tubo capilar distanciados do valor ℓ será,

$$p_1 - p_2 = \frac{32 \eta V \ell}{d^2}$$

onde, η = a viscosidade dinâmica do fluido
V = a velocidade média
ℓ = a distância considerada no capilar
d = o diâmetro do capilar
p_1, p_2 = as respectivas pressões nos pontos separados pela distancia ℓ.

Podemos escrever a seguinte equação para o sistema considerado, na forma de energia,

Energia Potencial = Pressão + Energia cinética/unidade de volume.

ou, $$\rho g h = \frac{32 \eta V \ell}{d^2} + \text{E.C./unid. volume} \qquad (4.1)$$

Pode-se demonstrar EC/unid.volume =

$= \rho V^2$ (Benoulli).

Substituindo em (4.1), resulta,

$$h = \frac{32\,\eta \ell V}{\rho g d^2} + \frac{V^2}{g}$$

ou,
$$\eta = \left(h - \frac{V^2}{g} \right) \frac{\rho g\, d^2}{32\, \ell V}$$

$$\eta = \frac{\rho g\, d^2\, h}{32\, \ell V} - \frac{\rho V d^2}{32 \ell}$$

$$\eta = \frac{A}{V} - BV \qquad (4.2)$$

onde $A = \frac{\rho g\, d^2 h}{32\ell}$ e $B = \frac{\rho d^2}{32\ell}$

A relação (4.2) expressa a viscosidade dinâmica em função da velocidade média (V), porém a viscosidade dinâmica pode ser expressa em termos da vazão volumétrica (Q), ou seja,

$$\eta = \frac{C}{Q} - DQ \qquad (4.3)$$

pois $Q \alpha V$ (C e D são constantes).

Se t for o tempo para a descarga de um volume fixado, então t será proporcional a Q, ou seja,

$$t \alpha \frac{1}{Q}$$

Portanto, a relação (4.3) pode ser escrita em termos do tempo t, ou seja.

$$\eta = Et - \frac{F}{t} \qquad (4.4)$$

As constantes E e F podem ser obtidas através do conhecimento preciso das dimensões (ℓ) e (d) do capilar, mas preferivelmente elas podem ser obtidas pela calibração usando um fluido de viscosidade conhecida. Normalmente o termo da energia cinética é pequeno e

pode-se assumir que,

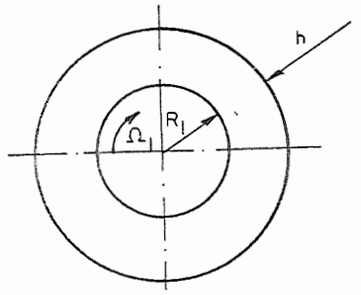
$$\eta = Et \qquad (4.5)$$

Na prática, em um viscosimetro de capilar, o tempo considerado para a descarga de um volume fixado é medido sob condições de coluna variável, porém, como a coluna de pressão varia entre limites conhecidos, as equações acima continuam válidas.

4.2 - Viscosimetros Rotacionais

4.2.1 - Viscosimetro de cilindros rotativos

Nesse viscosimetro, a viscosidade é determinada pela medida do momento exercido ou no cilindro interno ou no externo, para o caso de cilindros concentricos, onde o cilindro interno gira, conforme mostra a Figura 4.2.



R_1 = raio do cilindro interno

h = folga entre os cilindros

$h << R_1$

Ω_1 = rotação angular do cilindro interno

Figura 4.2 - Viscosimetro rotativo cilindrico.

Como nesse tipo de viscosimetro, a folga (h) é muito menor do que o raio do cilindro interno (R_1) o escoamento pode ser tratado da mesma forma que o escoamento de Couette entre duas placas paralelas. Nesse caso a distribuição de velocidade é linear cujo gradiente é,

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\Omega_1 R_1}{h}$$

A tensão de cisalhamento (τ) no cilindro interno será,

$$\tau = \eta \frac{\partial v}{\partial r} = \eta \frac{\Omega_1 R_1}{h}$$

E o momento (T) no cilindro interno será,

$$T = \text{tensão x área x distância} = \tau \times A \times R_1$$

$$T = \eta \frac{\Omega_1 R_1}{h} \cdot 2 \pi R_1 \ell \cdot R_1$$

ou,
$$T = \frac{2\eta\Omega_1 \pi R_1^3 \ell}{h} \qquad (4.6)$$

A vantagem do viscosimetro rotacional sobre o de capilar é que no primeiro o efeito da variação da taxa de cisalhamento sobre a viscosidade pode ser determinada.

4.2.2 - Viscosimetro de cone rotativo.

Nesse viscosimetro, a viscosidade é determinada pela medida do momento exercido no cone ou no disco, onde o cone gira, conforme ilustra a Figura 4.3.

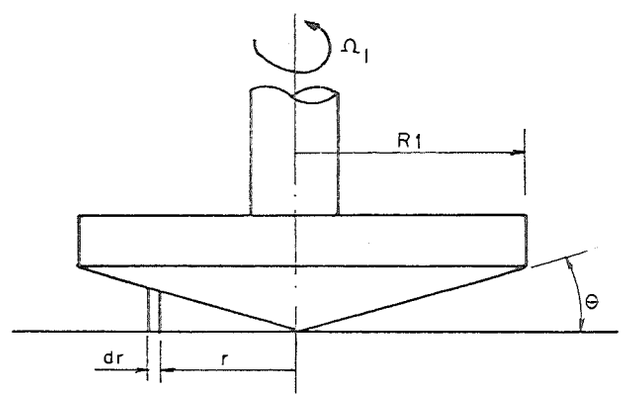


Figura 4.3 - Esquema de um viscosimetro cônico.

O ângulo θ de inclinação do cone é bem pequeno de forma que

$$h = r\theta$$

onde, h = espessura do filme de fluido no raio r
r = raio genérico do cone.

O gradiente da velocidade através do filme é

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\Omega_1 r}{r\theta} = \frac{\Omega_1}{\theta} \quad , \text{ ou seja,}$$

a velocidade independe de r.

A tensão de cisalhamento (τ) tanto no cone como no disco, é constante e vale

$$\tau = \eta \frac{\Omega_1}{\theta}$$

A força de cisalhamento (τdA) em um anel elementar de fluido no raio r será

$$\tau dA = \eta \frac{\Omega_1}{\theta} \cdot 2\pi r dr$$

O momento (dT) nesse anel elementar é dado por

$$dT = \tau . dA . r = \frac{2\pi\eta\Omega_1}{\theta} r^2 dr$$

E o momento total T será:

$$T = \frac{2\pi\eta\Omega_1}{\theta} \int_0^{R_1} r^2 \, dr$$

ou,

$$T = \frac{2\pi\eta\Omega_1}{\theta} \cdot \frac{R_1^3}{3} \qquad (4.7)$$

4.3 - Esfera em Queda Livre

Quando uma esfera é deixada cair em queda livre no interior de um fluido ela rapidamente adquire uma velocidade terminal constante v. A resultante das forças que atuam na esfera é então nula.

As forças que atuam na esfera em queda livre são:

a) Força da gravidade (FG)

$$FG = \frac{\sigma \pi d^3}{6} g$$

onde, σ = densidade da esfera
d = diâmetro da esfera
g = aceleração da gravidade

b) Empuxo (E), ou o pêso do fluido deslocado

$$E = \frac{\rho \pi d^3}{6} g$$

onde, ρ = densidade do fluido

c) Arrasto Viscoso (A)

Se o número de Reynolds é pequeno, i e, $\frac{vd}{\nu} < 2$, o arrasto viscoso para a esfera, dado pela lei de Stokes, é,

$$A = 3\pi\eta vd$$

Portanto, no equilíbrio das forças,

Arrasto viscoso = Força da gravidade - Empuxo

ou, $$3\pi\eta vd = \frac{\pi d^3}{6} g \quad (\sigma - \rho)$$

ou, $$\nu = \frac{d^2 g}{18v} \left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) \qquad (4.8)$$

onde $$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

A viscosidade cinemática de um fluido pode portanto ser obtida através da medida da velocidade terminal v e utilização da relação (4.8).

5 - LEITURA COMPLEMENTAR

CAMERON, A. - The Principles of Lubrication. London. Longmans. 1966

CAMERON, A. - Basic Lubrication Theory. Ellis Horwood Limited. 1976.

SHAMES, I.H. - Fluid Mechanics. McGraw-Hill. 1976

B.S. 188:1957 - British Standard Methods for the Determinations of the Viscosity of Liquids in C.G.S. Units.

6 - EXERCÍCIOS PROPOSTOS

6.1 - Um fluido viscoso está contido entre duas placas planas e paralelas separadas por uma distância h. Uma das placas move no seu próprio plano com uma velocidade 3U e a outra na direção oposta com velocidade U. Se o escoamento na direção do movimento da placa com velocidade maior for Uh/2 por unidade de largura, mostre que o gradiente de pressão é $\frac{6\eta U}{h^2}$.

6.2 - Um fluido viscoso escoa paralelamente ao eixo do espaço anular entre dois cilindros coaxiais de raios R_1 e R_2. Mostre que a vazão volumétrica vale

$$Q = \frac{\pi R_1^4}{8\eta} \cdot \frac{dp}{dz} \left[\left(\frac{R_2}{R_1} \right)^4 - 1 - \frac{(R_2^2/R_1^2 - 1)^2}{\ell n \frac{R_2}{R_1}} \right]$$

6.3 - Dois líquidos imiscíveis de viscosidades η_1 e η_2 se escoam juntos sobre uma placa vertical em duas camadas distintas de espessura h_1 e h_2. Quais são as condições de contorno que determinam a distribuição de velocidade? Se $\eta_2 = 2\eta_1$, $\rho_1 = \rho_2$ e $h_1 = h_2$, determine a relação entre as vazões volumétricas dos dois líquidos. Resposta: $Q_2/Q_1 = 2$.

6.4 - Um escoamento laminar ocorre ao longo de um tubo de raio a e inclinado de um ângulo em relação a horizontal. Mostre que a distribuição de velocidade é dada pela relação

$$W = - \frac{1}{4\eta} \left(\frac{dp}{dz} - \rho g \operatorname{sen}\alpha \right) (a^2 - r^2)$$

e determine a relação que fornece a velocidade média mostrando que a pressão será constante ao longo do tubo quando $\alpha = \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{8\eta W}{\rho g a^2} \right)$.

6.5 - Um fluido viscoso está contido entre duas placas planas e paralelas separadas por uma distância h onde uma delas é estacionária e a outra move em

seu próprio plano com uma velocidade U. Existe um gradiente de pressão dp/dx na direção do movimento. Mostre que a dis - tribuição da velocidade pode ser expressa na forma

$$\frac{u}{U} = \lambda(\xi - \xi^2) + \xi$$

onde $\xi = \frac{z}{h}$, $\lambda = 6\,\frac{V_m}{U}$ e V_m é a velocidade média devida somente ao gradiente de pressão.

Encontre os valores para λ correspondentes para:

a) o escoamento de Couette
b) o escoamento de Poiseuille
c) um escoamento no qual a vazão volumétrica é nula
d) uma tensão de cisalhamento nula na placa estacionária.
e) uma tensão de cisalhamento nula na placa em movimento.

Respostas: 0, 00, -3, -1 e 1.

6.6 - Um viscosimetro consiste de um recipiente cilindrico com um tubo capilar no centro de sua base. O capilar tem 15 mm de diâmetro e 1 cm de comprimento e a área transversal do vaso é de 17.24 cm^2. Durante um teste o nível de líquido acima do tubo é reduzido de 9.25 cm para 6.35 cm. Se a duração do teste é de 400s determinar a viscosidade cinemática do óleo. Despre zar a energia cinética de descarga.