UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ELETRICIDADE

ANÁLISE VETORIAL

Ruy Alberto C. Altafim

SÃO CARLOS — 1985
Publicação 013/85

INTRODUÇÃO

No intuito de facilitar o ensino das leis e a resolução dos problemas em eletromagnetismo, estamos apresentando esta apostila de "Análise Vetorial". O conhecimento de Análise Vetorial é de extrema importância, nesta disciplina, haja vista que a maioria das grandezas são vetoriais e que a escolha adequada de um sistema de coordenadas, em um problema, traz enormes simplificações em sua resolução.

Aqui abordaremos essencialmente três sistemas de coordenadas: o Cartesiano; o Cilíndrico e o Esférico. Além de procurar fazer uma recordação de Geometria Analítica.

o Autor

1. Definições

1.1. Escalar

O termo escalar se refere a uma quantidade cujo valor pode ser representado apenas por um número real. Muitas grandezas físicas são escalares, a exemplo da massa, da temperatura e do potencial elétrico.

1.2. Vetor

Outras tantas grandezas físicas possuem tanto magnitude quanto direção, tais como, a força, a velocidade e a aceleração. Para representar essas grandezas são utilizados vetores, que são entidades matemáticas possuidoras de módulo, direção e sentido. Uma definição mais precisa dos vetores e dada pela referência (4).

> "Vetor determinado por um segmento orientado AB é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a AB"

Essa definição é bastante abrangente, sendo válida inclusive para espaços n - dimensionais. Aqui, entretanto, trabalharemos apenas com o espaço tridimensional.

1.3. Campo escalar.

Campo escalar é simplesmente uma função escalar de posição no espaço, isto é, uma função que associa a cada ponto do espaço um escalar. Por exemplo, a pressão barométrica de cada ponto da superfície terrestre constitui-se num campo escalar, isto porque a pressão é uma grandeza escalar. Um outro campo escalar extritamente matemático é a função $f = x + y + z$, que associa a cada ponto do espaço (x,y,z) um escalar igual a soma de suas três coordenadas.

1.4. Campo Vetorial

O campo vetorial também é uma função de posição, apenas diferenciando da anterior no aspecto de associar a cada ponto do espaço um vetor. Um exemplo simples é o vetor posição $\vec{R} = x\,\vec{ax} + y\,\vec{ay} + y\,z\,\vec{az}$, que indica a posição do ponto(x,y,z) com relação à origem do sistema de coordenadas. Outro exemplo desse tipo de campo é o campo elétrico. Veja se você consegue mostrar - porque!

1.5. Superfície equipotencial

Os campos escalares são algumas vezes denominados campos equipotenciais e o lugar geométrico dos pontos, onde o campo escalar possui valor constante, é denominado superfície equipotencial ou linha equipotencial.

1.6. Linhas de fluxo de campo

Nas regiões onde o campo vetorial é contínuo, nós podemos definir linhas, cujos pontos sejam todos tangentes ao campo vetorial. Essas linhas são denominadas linhas de fluxo de campo.

Para podermos encontrar a equação diferencial dessas linhas, devemos determinar uma relação entre o vetor diferencial de deslocamento apoiado sobre a linha e as correspondente componentes do campo vetorial.

Em qualquer curva traçada no espaço (x,y,z) podemos definir para todos os seus pontos um vetor diferencial de deslocamento igual a

$$\vec{dl} = dx\,\vec{ax} + dy\,\vec{ay} + dz\,\vec{az} \qquad (1.1)$$

que é tangente à curva no ponto considerado, como mostra a figura 1.

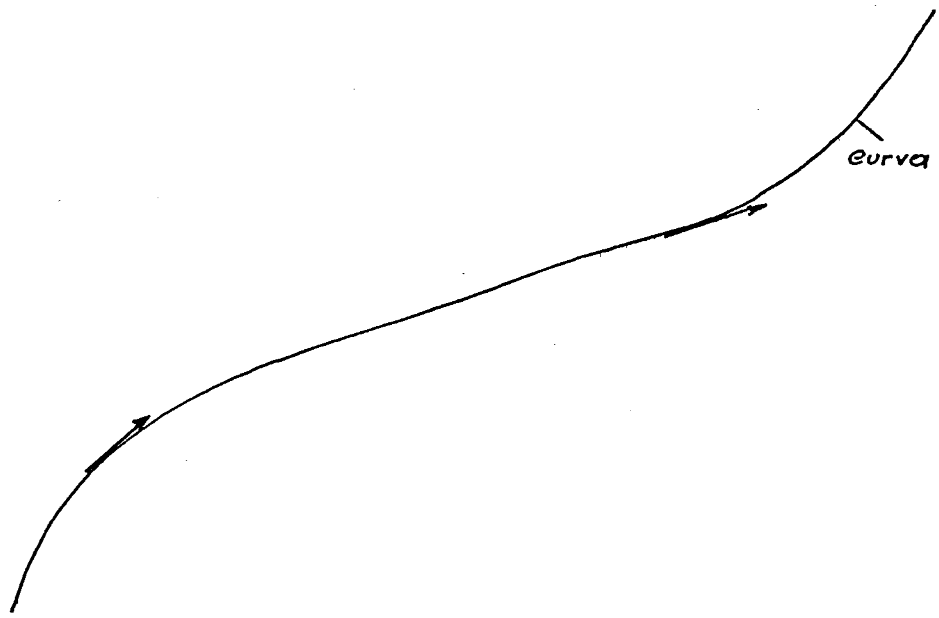


Figura 1 - Vetor diferencial de deslocamento.

Fazendo agora um campo vetorial Genérico ser representado por:

$$\vec{V} = Vx\ \vec{ax} + Vy\ \vec{ay} + Vz\ \vec{az} \tag{1.2}$$

teremos que $\vec{V}$ será tangente a $\vec{dl}$ quando seus versores forem iguais. Portanto.

$$\vec{dl}/|\vec{dl}| = \vec{V}/|\vec{V}| \quad \text{ou}$$

$$dx/|\vec{dl}|\ .\vec{ax} + dy/|\vec{dl}|\ \vec{ay} + dz/|\vec{dl}|\ \vec{az} =$$

$$= Vx/|\vec{V}|\ \vec{ax} + Vy/|\vec{V}|\ \vec{ay} + Vz/|\vec{V}|\ \vec{az}.$$

ou

$$dx/|\vec{dl}| = Vx/|\vec{V}| \quad ; \quad dy/|\vec{dl}| = Vy/|\vec{V}| \quad ; \quad dz/|\vec{dl}| = Vz/|\vec{V}|$$

ainda

$$Vx/dx = Vy/dy = Vz/dz = |\vec{V}|/|\vec{dl}| = K \tag{1.3}$$

A equação 1.3 é denominada equação diferencial das linhas de fluxo.

Como exemplo simples da determinação das linhas de fluxo consideraremos o fluxo radial de corrente entre dois cilindros coaxiais como ilustrado na figura 2.

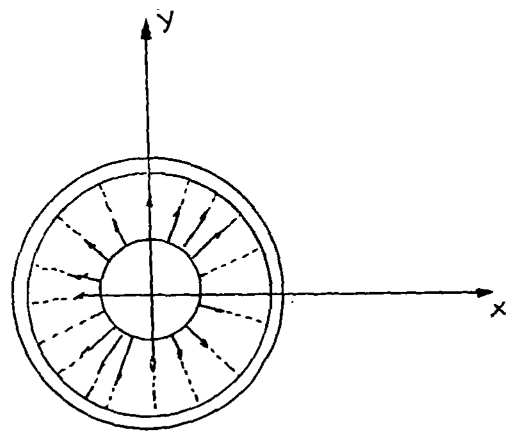


Figura 2 - Linhas de fluxo entre dois cilindros coaxiais.

A densidade de corrente é dada por.

$$\vec{J} = \frac{I}{2\pi r} \cdot \vec{ar} = \frac{I}{2\pi}\left[\frac{x\ \vec{ax}}{r^2} + \frac{y\ \vec{ay}}{r^2}\right] \qquad (1.4)$$

Baseados na equação (1.3) temos que a equação diferencial das linhas de fluxo é.

$$\frac{dx}{Jx} = \frac{dy}{Jy} \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \qquad (1.5)$$

Fazendo uma integração temos.

$$\ln y = \ln x + \ln c = \ln xc$$

$$y = cx \qquad (1.6)$$

onde c é uma constante de integração.

2. Operações com vetores.

2.1. Adição e Subtração de Vetores

Consideramos dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ como ilustrado na figura 3. O vetor $\vec{A}$ representa o deslocamento de um ponto móvel caminhando do ponto 1 ao ponto 2. O vetor $\vec{B}$ representa um deslocamento do ponto 2 ao ponto 3. A soma será o equivalente do deslocamento do ponto 1 ao ponto 3.

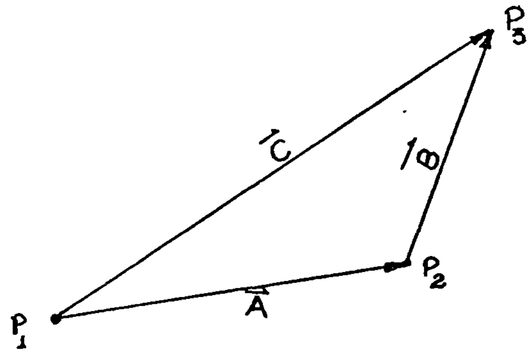


Figura 3- Adição de Vetores

Um vetor $\vec{A}$ pode ser representado como sendo a diferença entre dois Pontos, ou seja.

$$\vec{A} = P_2 - P_1 \qquad (2.1)$$

Nessa nova notação a adição de dois vetores pode ser efetuada como abaixo.

$$\vec{A} + \vec{B} = (P_2 - P_1) + (P_3 - P_2) = P_3 - P_1 = \vec{C} \qquad (2.1)$$

2.1.2. Propriedades da Adição

P.1 $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

P.2 $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$

P.3 $\vec{A} + \vec{0} = \vec{A}$

P.4 $\vec{A} + (\overrightarrow{-A}) = \vec{0}$

Como exercício e usando a notação(2.1) prove todas essas propriedades.

2.2. Diferença de Vetores

Dado dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, o vetor $\vec{C} = \vec{A} + (-\vec{B})$, chama-se diferença de $\vec{A}$ e $\vec{B}$ e se indica por $\vec{A} - \vec{B}$.

Na figura 4 encontra-se representado essa diferença.

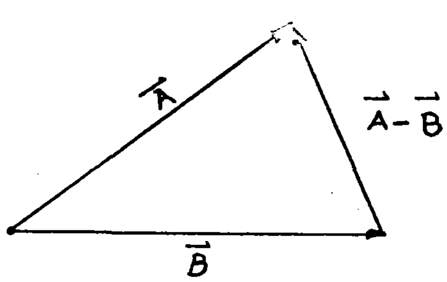


Figura 4 - Diferença entre dois vetores.

2.3. Operações com vetores

2.3.1. Bases Ortogonais

Uma base ortogonal é uma base formada por vetores unitários dois a dois ortogonais. Os versores apoiados nos eixos x,y, z do sistema de coordena da cartesiano constituem uma base ortogonal.

2.3.2. Versor de um vetor não nulo $\vec{A}$.

Chamamos versor de um vetor não nulo $\vec{A}$ o vetor unitário de mesma direção e sentido que $\vec{A}$ e podemos determiná-lo dividindo o vetor $\vec{A}$ por seu módulo, assim

$$\vec{a} = \vec{A}/ |\vec{A}| \qquad (2.2.)$$

Quando o vetor $\vec{A}$ for expresso em coordenadas cartesianas . $\vec{A} = Ax\ \vec{ax} + Ay\ \vec{ay} + Az\ \vec{az}$, temos que seu versor será dado por.

$$\vec{a} = \vec{A}/ \left[A_x^2 + A_y^2 + A_z^2\right]^{1/2} \qquad (2.3.)$$

2.3.3. Produto de um número real por um vetor.

Chamamos produto de um número real a $\neq$ o por um vetor $\vec{A} \neq$ o o vetor $\vec{c}$ definido da seguinte maneira.

1) $\vec{C} = a\ \vec{A}$

2) direção de $\vec{c}$ igual à direção $\vec{A}$.

3) Sentido de $\vec{c}$ igual ao de $\vec{A}$ quando a for maior que zero e contrário ao de $\vec{A}$ se a for menor que zero.

Propriedades:

P_1 - $a(b\,\vec{A}) = (ab)\,\vec{A}$

P_2 - $a(\vec{A}+\vec{B}) = a\vec{A} + a\vec{B}$

P_3 - $(a+b)\vec{A} = a\vec{A} + b\vec{A}$

P_4 - $1.\vec{A} = \vec{A}$

2.3.4. Produto escalar

Fixando uma base ortogonal $(\vec{ax}, \vec{ay}, \vec{az})$, chamamaos de produto escalar dos vetores,

$\vec{A} = Ax\ \vec{ax} + Ay\ \vec{ay} + Az\ \vec{az}$

$\vec{B} = Bx\ \vec{ax} + By\ \vec{ay} + Bz\ \vec{az}$

escritos nessa base, ao número real:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AxBx + AyBy + AzBz \qquad (2.5)$$

Esta definição é independente da base ortogonal fixada.

Talvez a mais comum das aplicações do produto escalar seja no cálculo do trabalho, através da integral de linha abaixo.

$$\text{Trabalho} = \int \vec{F} \cdot \vec{dl} \qquad (2.6)$$

Um outro exemplo de utilização é no cálculo do fluxo que atravessa uma dada superfície, através da integral de superfície abaixo.

$$\emptyset = \int_S \vec{A} \cdot \vec{ds} \qquad (2.7)$$

2.3.4.1 Propriedades do produto escalar.

$Q_1)$ $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$ (comutativa)

$Q_2)$ $a(\vec{A}.\vec{B}) = (a\vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A}.(a\vec{B})$

$Q_3)$ $\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$. (distributiva)

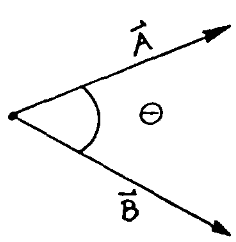
$Q_4)$ $\vec{A}.\vec{A} \geqslant 0$; $\vec{A}.\vec{A} = 0 \Leftrightarrow A = 0$

$Q_5)$ $\vec{A}.\vec{A} = |\vec{A}|^2$

$Q_6)$. $\vec{A}.\vec{B} = 0$ se e somente se $\vec{A}$ e $\vec{B}$ são ortogonais.

$Q_7)$ se $\vec{A} \neq 0$ e $\vec{B} \neq 0$ então, sendo θ o ângulo entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$, como mostrado na figura 5, temos.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| . \cos(\theta) \qquad (2.8)$$



θ é o menor ângulo entre os dois vetores.

Figura 5 - Vetor $\vec{A}$ e $\vec{B}$

2.3.4.2. Projeção de um vetor $\vec{A}$ na direção do versor $\vec{b}$

Seja um versor $\vec{b}$ e um vetor $\vec{A}$ qualquer, como mostra a figura 6, definimos: Projeção do vetor $\vec{A}$ na direção do versor $\vec{b}$ o vetor $\vec{B}$, que pode ser escrito como sendo $\vec{B} = \alpha \vec{b}$, onde α é um escalar qualquer.

O vetor $\vec{A}$ pode ser escrito como sendo:

$$\vec{A} = \vec{B} + \vec{C}$$

ou

$$\vec{A} = \alpha \vec{b} + \vec{c} \qquad (2,9)$$

Multiplicando a expressão 2.9 escalarmente por $\vec{b}$ em ambos os membros temos:

$$\vec{b} \cdot \vec{A} = \alpha \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{b}$$

o que resulta,

$$\vec{b} \cdot \vec{A} = \alpha$$

logo a projeção $\vec{B}$ pode ser expressa por

$$\vec{B} = \alpha \vec{b} = (\vec{A} \cdot \vec{b})\, \vec{b} \qquad (2,10)$$

Exemplo: Deseja-se obter a projeção do vetor

$\vec{V} = 2\vec{ax} + 3\vec{ay} + 4\vec{az}$, na direção do vetor

$\vec{U} = 4\vec{ax} + 2\vec{ay} + 3\vec{az}$

Solução:

Inicialmente é necessário obtermos o versor correspondente ao vetor $\vec{U}$ através de:

$$\vec{U} / |\vec{U}| = \text{versor} = \vec{u}$$

$$|\vec{U}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 4 + 9} = \sqrt{29}$$

$$\vec{u} = 4/\sqrt{29}\ \vec{ax} + 2/\sqrt{29}\ \vec{ay} + 3/\sqrt{29}\ \vec{az}$$

Com o versor $\vec{u}$ determinado e utilizando-se da expressão (2.10) tem-se.

$$\vec{V_1} \text{ (projeção de } \vec{V} \text{ na direção } \underline{v}) = (\vec{V} \cdot \vec{u})\, \vec{u}$$

$$V_1 = ((2.4)/\sqrt{29} + (3.6)/\sqrt{29} + (12.4)/\sqrt{29})\ \vec{u} = 26/\sqrt{29}\ \vec{u} =$$

$$= (26/\sqrt{29})\,(2/\sqrt{29}\ \vec{ax} + 2/\sqrt{29}\ \vec{ay} + 3/\sqrt{29}\ \vec{az})$$

$$\vec{V_1} = 26/\sqrt{29}\ (4\ \vec{ax} + 2\vec{ay} + 3\vec{az})$$

2.3.5. Produto Vetorial

Fixando uma orientação no espaço e uma base ortogonal positiva ($\vec{ax}$, $\vec{ay}$, $\vec{az}$) (por convenção adotamos como positiva a base que possui seus versores com a mesma orientação dos dedos médios, indicador e polegar da mão direita), chamamos produto vetorial dos vetores.

$$\vec{A} = x_1\ \vec{ax} + y_1\ \vec{ay} + z_1\ \vec{az}$$

$$\vec{B} = x_2\ \vec{ax} + y_2\ \vec{ay} + z_2\ \vec{az}$$

o vetor

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} y1 & z1 \\ y2 & z2 \end{vmatrix} \vec{ax} + \begin{vmatrix} z1 & x1 \\ z2 & x2 \end{vmatrix} \vec{ay} + \begin{vmatrix} x1 & y1 \\ x2 & y2 \end{vmatrix} \vec{az}$$

que é precisamente o desenvolvimento do determinante simbólico.

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{ax} & \vec{ay} & \vec{az} \\ x1 & y1 & z1 \\ x2 & y2 & z2 \end{vmatrix}$$

Este produto também independe da base ortogonal positiva usada para calculá-lo e pode ser determinado procedendo-se como o indicado.

1) Módulo dado pela expressão.

$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}| \ . \ |\vec{B}| \ \text{sen}\ \theta \qquad (2.11)$$

onde θ é o menor ângulo entre os dois vetores

2) A direção é dada pelo versor an normal ao plano formado pelos dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

3). O sentido é dado pelo polegar da mão direita, quando guiamos o primeiro vetor sobre o segundo no sentido dos demais dedos pelo menor angulo entre eles, como mostra a figura 6b.

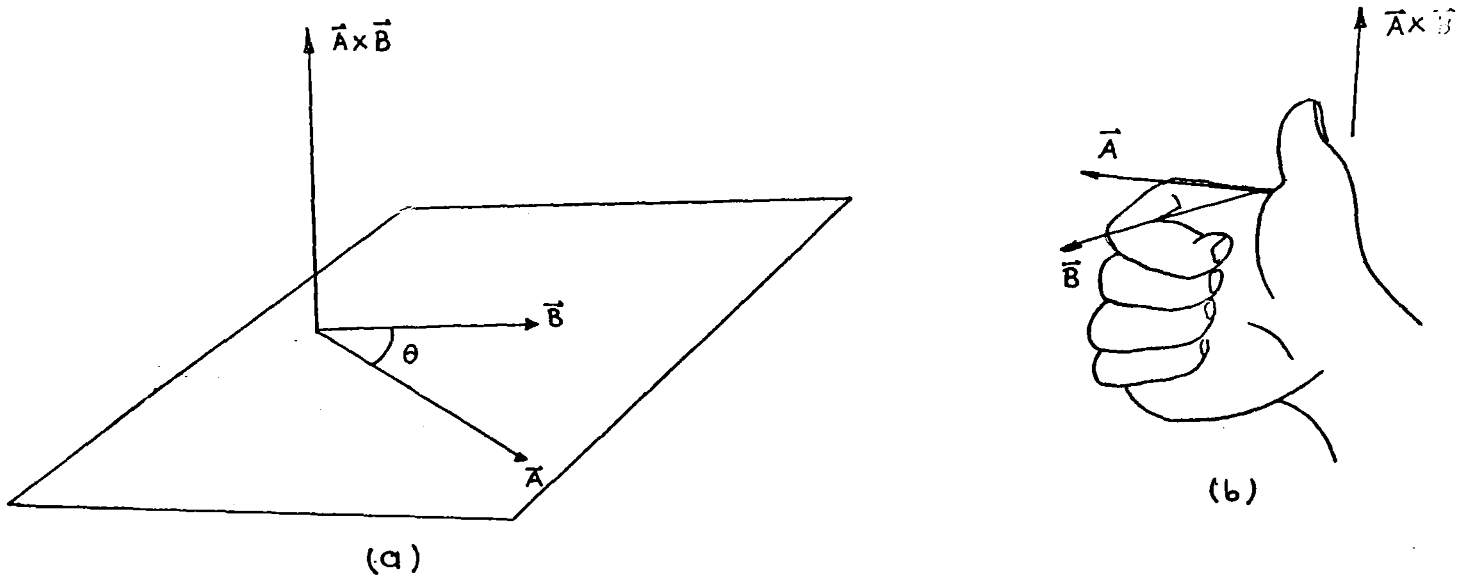


Figura 6.a) Produto vetorial; b) regra da mão direita

Assim se $\vec{A} = 2\overrightarrow{ax} - 3\overrightarrow{ay} + \overrightarrow{az}$ e

$\vec{B} = 4\overrightarrow{ax} - 2\overrightarrow{ay} + 5\overrightarrow{az}$, nós temos

$$\vec{A} \times \vec{B} \quad \begin{vmatrix} \overrightarrow{ax} & \overrightarrow{ay} & \overrightarrow{az} \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \left[(-3).(5)-(1)(-2)\right] \overrightarrow{ax} - \left[(2)(5)-(1)(-4)\right] \overrightarrow{ay} +$$

$$+ \left[(2)(-2)-(-3)(-4)\right] \overrightarrow{az} = - 13\overrightarrow{ax} - 14\overrightarrow{ay} - 16\,\overrightarrow{az}$$

3. Sistema de coordenadas

Para descrevermos a posição de um ponto qualquer no espaço são necessários três coordenadas, por exemplo (1,2,3). Também os vetores podem ser decompostos em três componentes, basta definirmos uma base (três vetores linearmente independentes) para os espaço. Veremos agora o que são e quais os sistemas de coordenadas mais comuns.

3.1 - Sistemas de coordenadas cartesianas.

Este é, talvez, o sistema de coordenadas mais comum e é um conjunto formado por um ponto 0 e uma base ortogonal positiva / $(\overrightarrow{ax}, \overrightarrow{ay}, \overrightarrow{az})$. Indicado por: $(0, \overrightarrow{ax}, \overrightarrow{ay}$ e $\overrightarrow{az})$. O ponto 0 chama-se origem do sistema. As retas orientadas que passam pelo ponto 0 e têm as direções dos versores $\overrightarrow{ax}$, $\overrightarrow{ay}$ e $\overrightarrow{az}$, denominam-se , respectivamente: eixo das abscissas (X), eixo das ordenadas (Y) e eixo das cotas (z). Usando-se os dedos: polegar, indicador e médio, da mão direita podemos indentificar, respectivamente, os eixos x, y e z. A figura 6 mostra esse sistema

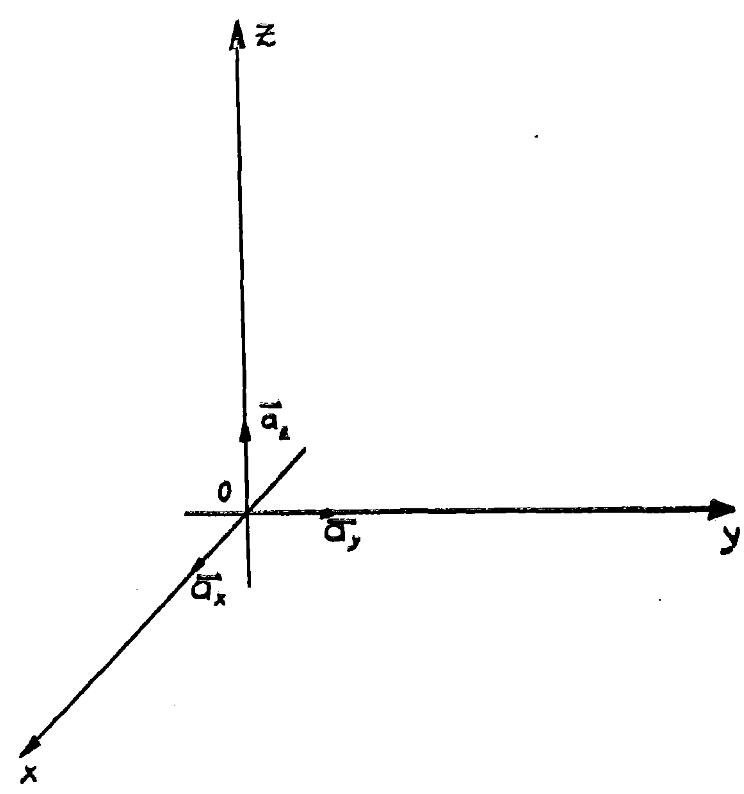


Figura 6 - Sistema de Coordenadas Cartesianas

Um ponto qualquer do espaço possuirá coordenadas (x,y,z),que são, respectivamente, as distâncias da origem à intersecção de uma projeção do ponto nos eixos, x,y e z .

Um método alternativo e interpretação dos valores das coordenas, que facilita o entendimento em todos os outros sistemas de coordenadas, é o de considerar o ponto como sendo a intersecção de três planos, dados por x =constante, y = constante e z = constante, sendo as constantes os valores das coordenadas do ponto.

Os versores $\vec{ax}$, $\vec{ay}$ e $\vec{az}$ são invariáveis de ponto para ponto, e como são ortogonais valem as relações

$$\vec{ax} \times \vec{ay} = \vec{az} \tag{3.1}$$

$$\vec{ay} \times \vec{az} = \vec{ax} \tag{3.2}$$

$$\vec{az} \times \vec{ax} = \vec{ay} \tag{3.3}$$

Tente prová-las!

Seja A um vetor qualquer, ele pode ser escrito como uma combinação linear dos versores $\vec{ax}$, $\vec{ay}$ e $\vec{az}$, ou seja,

$$\vec{A} = Ax\,\vec{ax} + Ay\,\vec{ay} + Az\,\vec{az}$$

onde Ax, Ay e Az são coordenadas desse vetor nesse sistema.

A determinação dessas coordenadas é feita através da equação.

$$\vec{A}_i = \vec{A} \cdot \vec{a_i} \tag{3.4}$$

ou também

$$\vec{A}_i = |\vec{A}| \cos\theta \tag{3.5}$$

onde θ é o ângulo formado pelo vetor $\vec{A}$ e o versor $\vec{ai}$ e cos θ é denominado cosseno diretor.

Em ambas as expressões (3.4) e (3.5) Ai é a projeção do vetor $\vec{A}$ na direção do versor $\vec{ai}$.

Exemplificando para o elemente Ax,

$$Ax = \vec{A} \cdot \vec{ax} = |\vec{A}| \cos\theta$$

Exercício: Seja um vetor $\vec{A}$ que possui módulo igual a 5, direção, dada pelo versor apoiado na reta $y = x+5$ e sentido igual ao crescimento de x. Determine suas coordenadas Ax, Ay e Az, e escreva-o no sistema de coordenadas cartesianas.

3.1.1. Vetor diferencial de deslocamento

O vetor diferencial de deslocamento representa qualquer deslocamento diferencial de um ponto P para P + dP, a figura 7 ilustra esse fato.

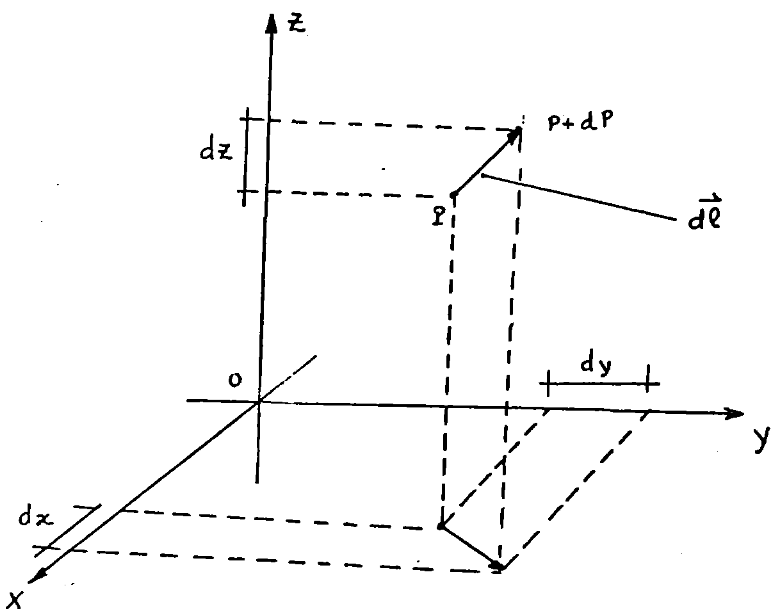


Figura 7 - Vetor diferencial de deslocamento

No sistema de coordenadas cartesianas o vetor diferencial de deslocamento $\vec{dl}$ pode ser escrito através de suas projeções nos eixos x, y, z , ou seja,

$$\vec{dl} = dx\ \vec{ax} + dy\vec{ay} + dz\ \vec{az} \tag{3.6}$$

que devem a corresponder um deslocamento dx na direção x, um deslocamento dy na direção y e um deslocamento dz na direção z.

3.1.2. Vetor diferencial de superfície

Em muitos estudos do eletromagnetismo, como o caso do fluxo magnético, é necessário definirmos um vetor diferêncial de superfície, que possui módulo igual ao elemento de superfície, direção perpendicular ao elemento de superficie e sentido saindo da superfície, quando esta é fechada e qualquer quando, aberta. A figura 8 mostra esse vetor.

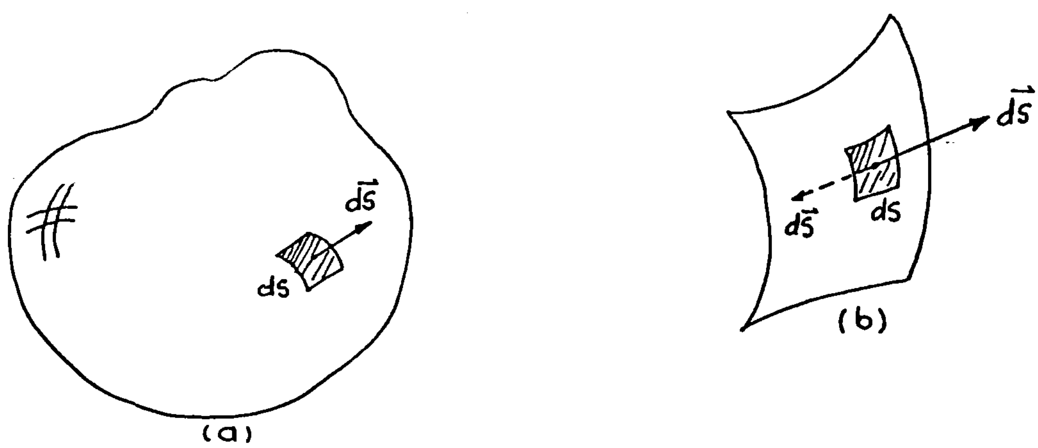


Figura 8. a Vetor diferencial de Superfície.
a) Superfície fechada; b) Superfície aberta.

No sistema de coordenadas cartesianas, o vetor diferencial de superfície ds pode ser escrito através de suas projeções nos planos xy, yz e xz, ou seja,

$$\vec{dS} = dydz\vec{ax} + dzdx\vec{ay} + dxdy\vec{az} \quad (3.7)$$

Tente desenhar um vetor ds que possue componentes em todas as direções e pelo menos dois que possuamapenas duas componentes.

3.1.3. Elemento diferencial de Volume.

O elemento diferencial de volume é utilizado no cálculo das integrais triplas, bastante comuns no estudo de eletromagnetismos. No sistema de coordenadas cartesianoas, ele é definido pelo volume de um paralelepípedo regular, cujos lados são os elementos diferenciais dx, dy e dz, portanto,

$$dv = dx\ dy\ dz$$

Na figura 9 , é mostrado um elemento diferencial de volume, obtido quando incrementamos as coordenadas do ponto P, por um deferencial dx, ou dy, ou dz em sua respectiva direção.

Ressaltamos que o elemento diferencial de volume é uma grandeza escalar.

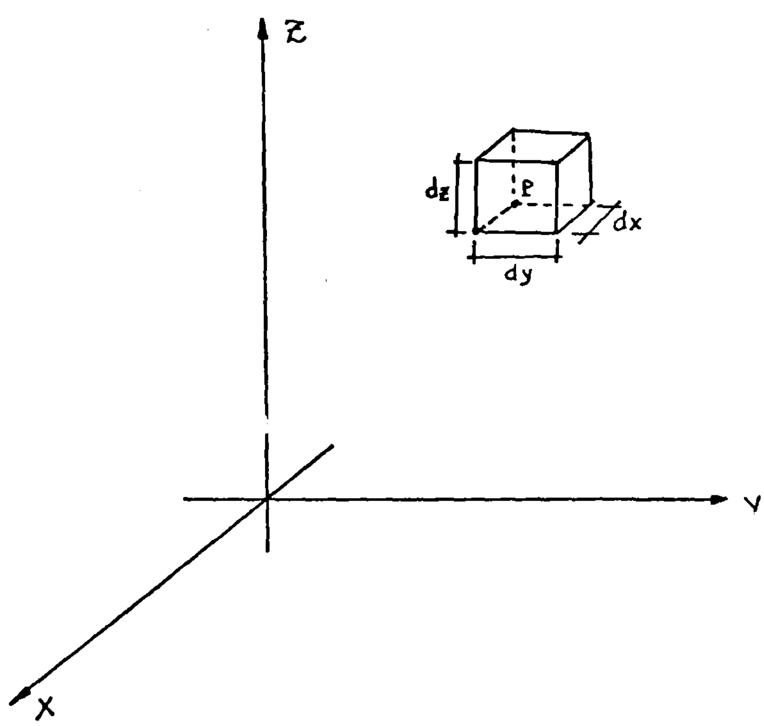


Figura 9 - Elemento diferencial de volume dV

3.2. Sistema de coordenadas cilíndricas

Como o sistema de coordenadas cartesianas é o mais conhecido dos alunos, há uma tendência de se resolver todos os problemas utilizando-o. Entretanto, devido à simetria de muitos / problemas conseguimos soluções muito mais simples com a utilização de outros sistemas de coordenadas, como é o caso do sistema de coordenadas cilindricas que veremos agora, e do sistema de coordenadas esféricas que veremos no próximo item.

O sistema de coordenadas cilíndricas é uma versão tridimensional do sistema de coordenadas polar bidimensional. O sistema de coordenadas cilíndricas que estudaremos é o circular, por comodidade sempre nos referiremos a ele simplesmente como sistema de coordenadas cilíndricas, entretanto, em outras referências o aluno deve verificar qual o sistema de coordenadas cilíndricas tratado, uma vez que esse sistema pode ser elíptico, hiperbólico, parabólico e outros.

Três versores ($\vec{ar}$, $\vec{a\phi}$ e $\vec{az}$) e um ponto 0, origem, situado na intersecção dos três eixo x, y e z, definem o sistema de coordenadas cilíndricas como ilustra a figura 10.

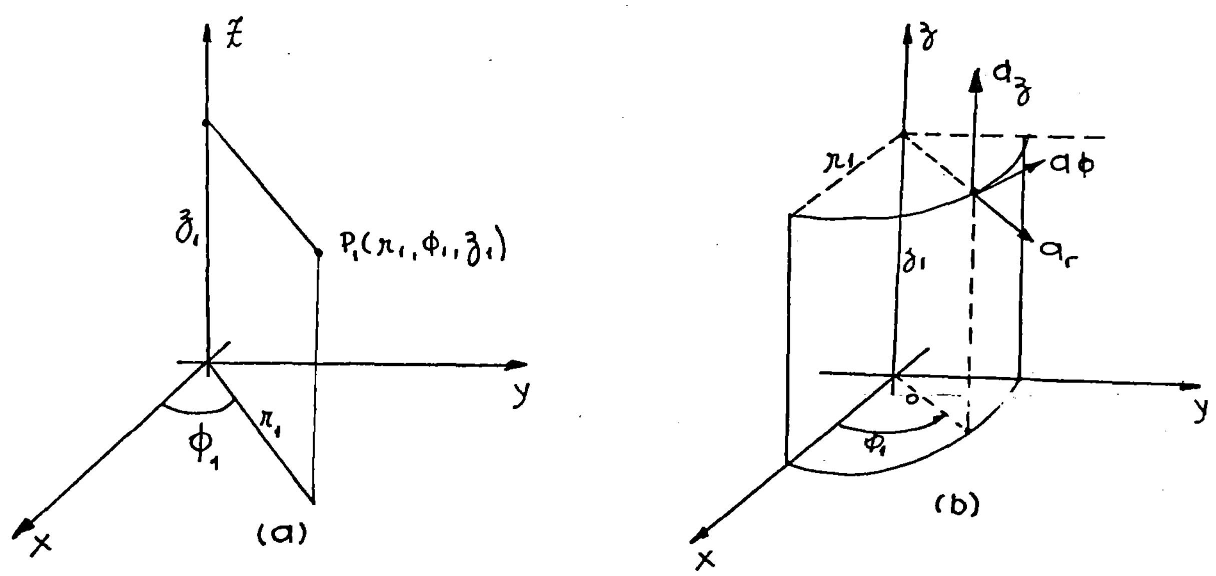


Figura 10 - Sistemas de coordenadas cilíndricas.

Qualquer ponto P do espaço possui três Coordenadas a saber r, ϕ e z, sendo que: - r = distância da origem 0 até a projeção de P no plano xy.

- ϕ = ângulo formado entre o eixo x e o raio r.

z = projeção do ponto no eixo z, coordenada z.

Nesse sistema de coordenadas, para qualquer ponto P(r1, ϕ1, z1) são definidos três versores $\vec{ar}$, $\vec{a\phi}$ e $\vec{az}$, sendo que: $\vec{ar}$ é um versor apoiado na reta que une o ponto 0 à projeção do ponto P ao plano xy; $\vec{a\phi}$, um versor normal do plano 1 e $\vec{az}$, o mesmo versor $\vec{az}$ do sistema de coordenadas cartesianas. Como percebemos, os versores $\vec{ar}$, $\vec{a\phi}$ e $\vec{az}$ modificam suas direções de ponto para ponto. Isto implica, numa integração ou numa diferenciação em relação a ϕ, considerar os versores ar e aϕ como sendo não constante, portanto, devemos nesses casos efetuar uma transformação de coordenadas.

Os versores $\vec{ar}$, $\vec{a\phi}$ e $\vec{az}$ são ortogonais dois a dois e são / válidas as relações :

$$\vec{ar} \times \vec{a\phi} = \vec{az} \quad (3.8)$$

$$\vec{a\phi} \times \vec{az} = \vec{ar} \quad (3.9)$$

$$\vec{az} \times \vec{ar} = \vec{a\phi} \quad (3.10)$$

Um vetor, nesse sistema de coordenadas, pode ser expresso por:

$$A = Ar\,\vec{ar} + A\;\vec{a\phi} + Az\,\vec{az} \quad (3.11)$$

e todas as propriedades, tais como adição, diferenciação, produto escalar e produto vetorial são válidas e efetuadas de maneira análoga ao sistema de coordenadas cartesianas.

Exemplo:

Um vetor que escrevemos no sistema de coordenadas cartesianas, como:

$$A = 2ax + 3ay + 4az$$

No sistema de coordenadas cilíndricas, temos o mesmo vetor escrito como

$$A = (2\cos\phi + 3\operatorname{sen}\phi)\vec{ar} + (3\cos\phi - 2\operatorname{sen}\phi)\vec{a\phi} + 4\vec{az}$$

Esses cosϕ e senϕ são necessários para exprimir o vetor A em quaisquer dos três versores móveis que representam esse sistema.

Faça uma verificação do que foi dito acima desenhando no triedro o vetor A, para $\phi = 45°$ e $\phi = 90°$, desenhe também os versores ($\vec{ar}$, $\vec{a\phi}$ e $\vec{az}$) nesse ponto. Você deverá observar que o vetor A não se modifica quando os versores são móveis.

3.1.1. Vetor diferencial de deslocamento

O vetor diferencial de deslocamento é escrito nesse sistema como sendo

$$\vec{dl} = dr\vec{ar} + rd\phi\,\vec{a\phi} + dz\vec{az} \qquad (3.12)$$

onde cada coordenada desse vetor representa um deslocamento diferencial na direção considerada, como mostra a figura 11.

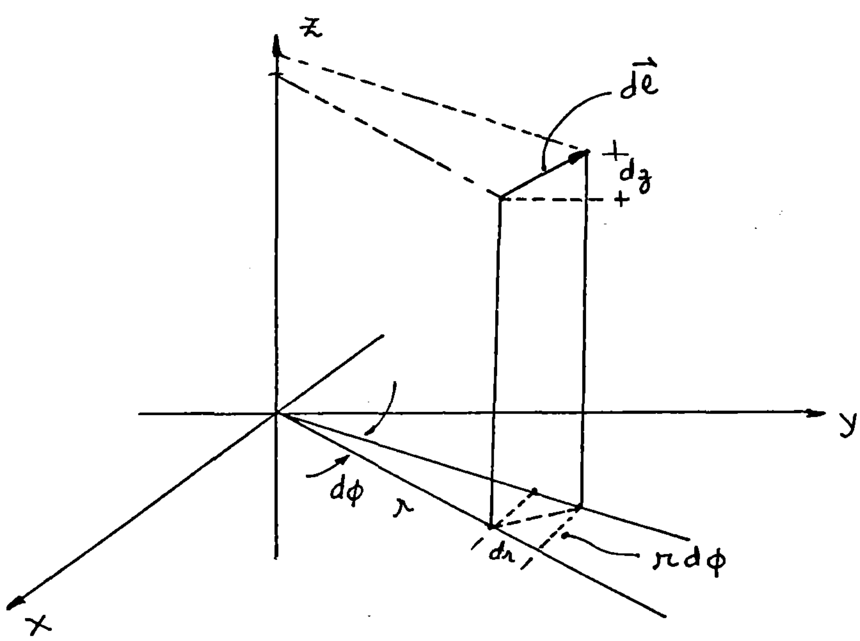


Figura 11 - Vetor diferencial de deslocamento em coordenadas cilíndricas

3.1.2. Vetor diferencial de superfície

Qualquer vetor diferencial de superfície pode ser representado pelo vetor diferencial abaixo.

$$\vec{ds} = rd\phi\,dz\,\vec{ar} + dr\,dz\,\vec{a\phi} + rd\phi\,dz\,\vec{az} \qquad (3.13)$$

sendo que cada coordenada pode ser encontrada como ilustra a figura 12.

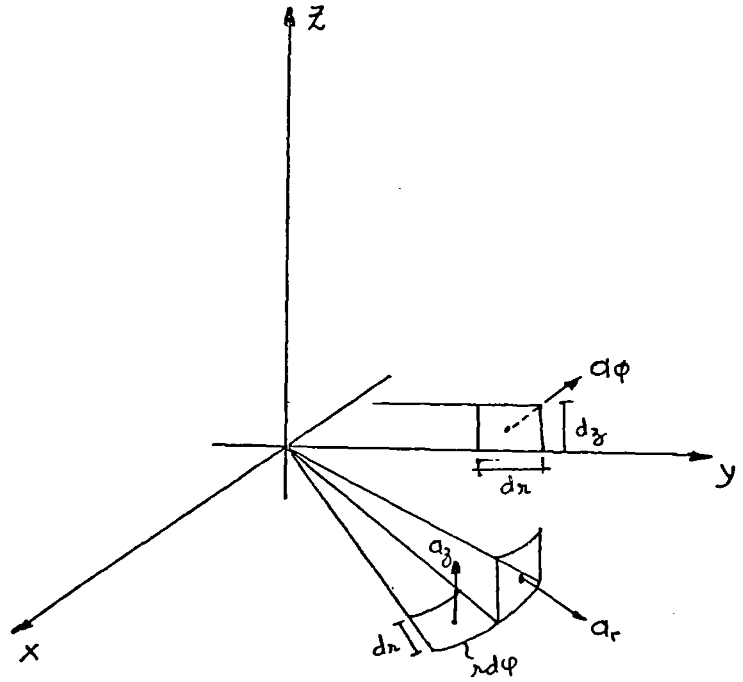


Figura 12 - Coordenadas do vetor diferencial de superfície

3.1.3. Elemento diferencial de volume

Um elemento diferencial de volume, em coordenadas cilíndricas pode ser obtido incrementando-se as coordenadas r, ϕ e z de seu ponto qualquer por diferenciais de comprimento dr, $rd\phi$ e dz. Na figura 13, encontramos um desenho representativo do diferencial de volume dv.

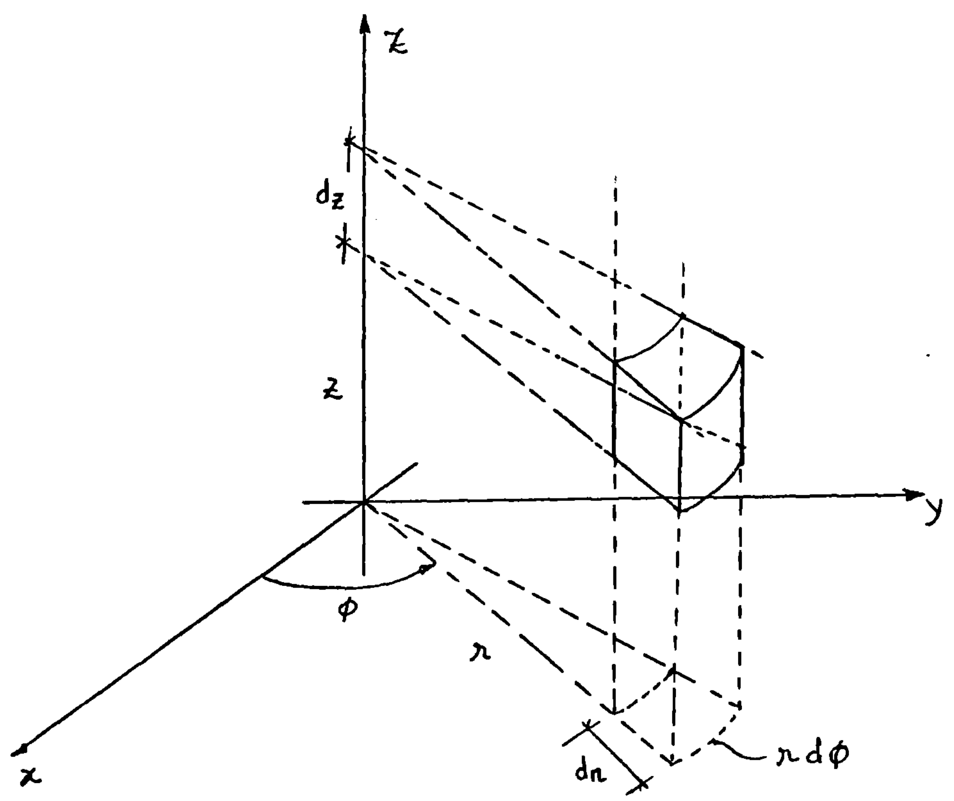


Figura 13 - Elemento diferencial de volume.

3.1.4. Relacionamento das variáveis cartesianas com as cilíndricas.

Podemos facilmente relacionar as variáveis cartesianas x, y e z com as variáveis cilíndricas r, ϕ e z por inspeção da figura 14 ou seja,

$$x = r \cos \phi \qquad (3.14)$$

$$y = r \operatorname{sen} \phi \qquad (3.15)$$

$$z = z \qquad (3.16)$$

ou de outro modo

$$r = x^2 + y^2 \qquad (3.17)$$

$$\phi = \operatorname{arctg} y/x \qquad (3.18)$$

$$z = z \qquad (3.19)$$

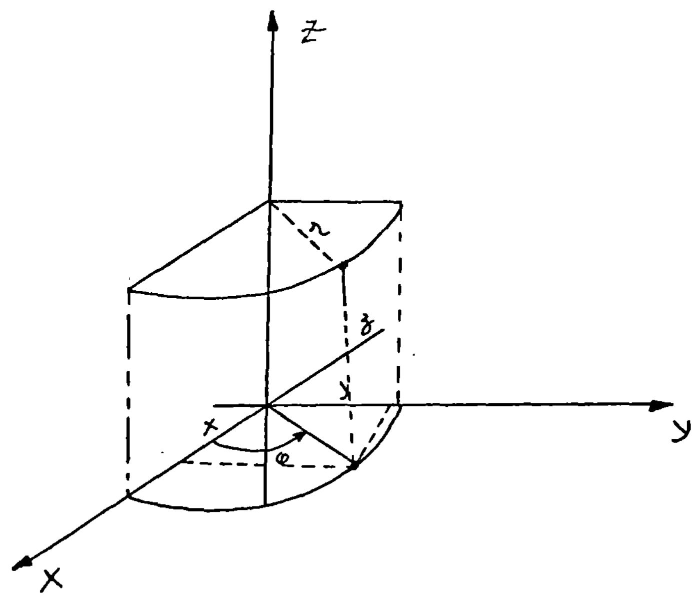


Figura 14 - Variáveis cilíndricas e variáveis cartesianas.

4. Sistema de Coordenadas esféricas

Agora não temos um sistema bidimensional para nos ajudar a entender o sistema tridimensional de coordenadas esféricas, como tivemos para o sistema de coordenadas cilíndricas, mas um exemplo da utilização desse sistema é o conhecimento da posição de um ponto na superfície da Terra pela latitude e longitude. Usualmente, consideramos somente os pontos situados na superfície, mas pontos acima e abaixo do solo podem ser considerados quando adotamos uma terceira coordenadas, a altura ou a porfundidade.

O sistema de coordenadas cartesianos é formado por uma ponto 0, denominado origem e situado na intersecção dos três eixos de coordenadas (x,y,z), e de três versores ($\vec{a}_r$, $\vec{a}_\theta$,$\vec{a}_\phi$), todos variáveis de ponto para ponto.

Nesse sistema de coordenadas, um ponto P qualquer do espaço é definido por três coordenadas que são: r, θ e ϕ ,onde r é a distância da origem 0 ao ponto P, θ é o ângulo entre o eixo z e a reta $\overline{OP}$ e ϕ é o ângulo entre o eixo x e a reta $\overline{OP_1}$, sendo que P_1 é a projeção do ponto P ao plano x y; como mostra figura 15a

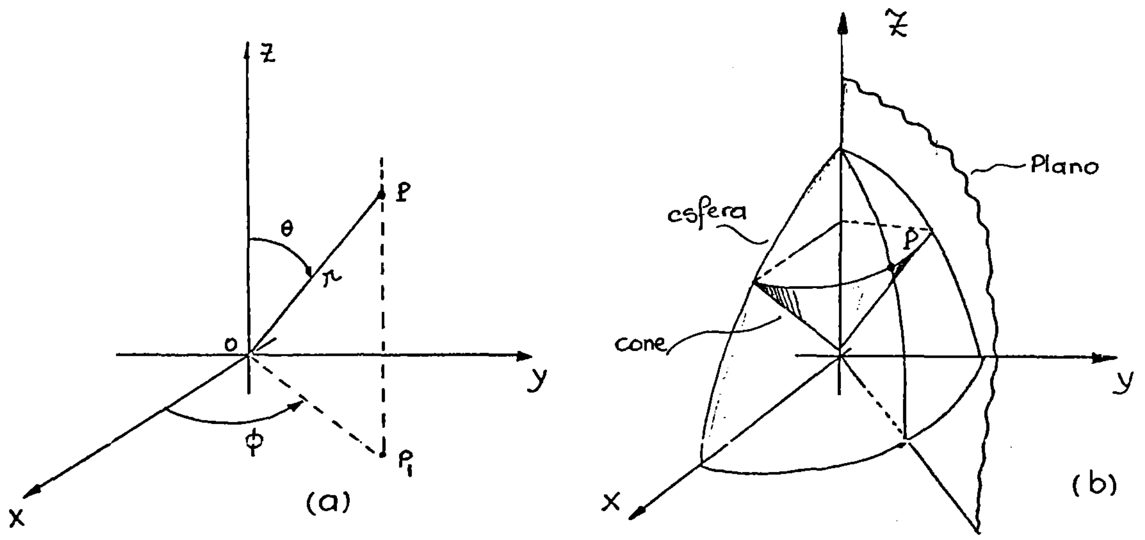


Figura 15 - Coordenadas de um ponto P qualquer no sistema de coordenadas esféricas.

O Ponto P pode também ser encontrado pela interseção de três superfícies mutuamente perpendiculares, uma esfera, um cone e um plano, como mostra a figura 15.b.

Na figura 16 encontramos os vetores $\vec{ar}$, $\vec{a\theta}$ $\vec{a\phi}$ para o ponto P . O vetor $\vec{ar}$ está apoiado na reta $\overline{OP}$ e dirigido no - sentido de crescimento da coordenada. O vetor $\vec{a\theta}$ é um vetor normal a superfície cônica, pertencente ao plano tangente à esfera. Está dirigido no sentido de crescimento do θ . O terceiro versor $a\phi$ é o mesmo das coordenadas cilíndricas, sendo normal ao plano e tangente ao cone e à esfera, dirigido no sentido crescente de $\emptyset$.

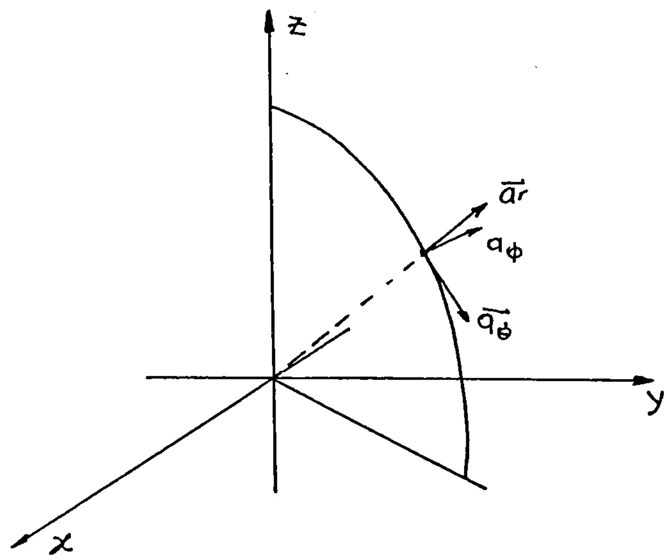


Figura 16 - Versores $\vec{ar}$, $\vec{a\theta}$ e $\vec{a\phi}$ do sistema de coordenadas esféricas.

Os versores $\vec{ar}$, $\vec{a\theta}$ e $\vec{a\phi}$ embora variáveis em direção de ponto para ponto são todos perpendiculares dois a dois entre si, e vale as relações.

$$\vec{ar} = \vec{a\theta} \times \vec{a\phi} \tag{4.1}$$

$$\vec{a\phi} = \vec{ar} \times \vec{a\theta} \tag{4.2}$$

$$\vec{a\theta} = \vec{a\phi} \times \vec{ar} \tag{4.3}$$

Qualquer vetor é representado nesse sistema como

$$\vec{A} = A\,\vec{ar} + A\phi\,\vec{a\phi} + A\theta\,\vec{a\theta} \tag{4.4}$$

e todas as propriedades tais como, adição, subtração, produto escalar, produto vetorial etc.

4.1 - Vetor diferencial de deslocamento

O vetor diferencial de deslocamento dl pode; nesse sistema, ser escrito como sendo.

$$\vec{dl} = dr\vec{ar} + rd\theta\,\vec{a\theta} + r\operatorname{sen}\theta\,d\phi\,\vec{a\phi} \tag{4.5}$$

onde cada coordenada representa um deslocamento infinitesimal na direção correspondente.

O deslocamento na direção $\vec{a\phi}$, talvez seja o mais dificil de se visualizar, por ser a projeção do raio r no plano xy multiplicado pelo diferencial de ângulo $d\phi$.

Na figura 17 encontramos uma representação do vetor diferencial de deslocamento $\vec{dl}$.

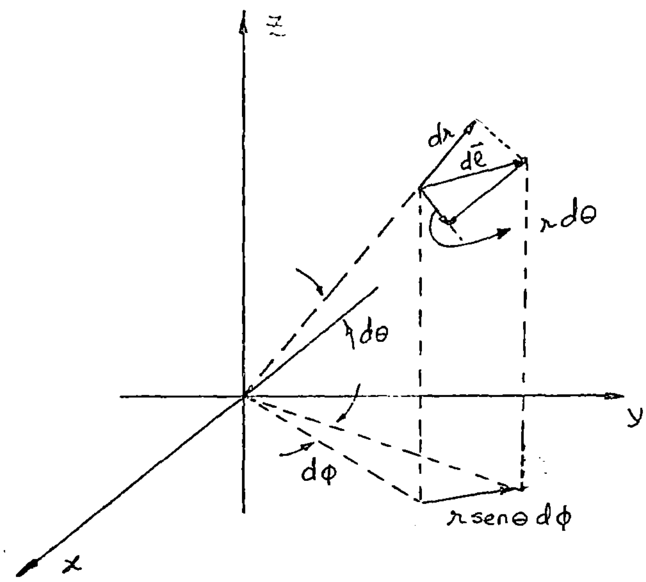


Figura 17 - Vetor diferencial de deslocamento em coordenadas esféricas.

4.2 - Elemento diferencial de superfície

Nesse sistema temos uma esfera, um cone e um plano como elementos de superfície, cuja intersecção dos três fornece um ponto.

Qualquer elemento diferencial de superfície pode ser escrito como sendo uma combinação linear de três outros, descritos abaixo.

a) Elemento diferencial de superfície da esfera.

É um elemento onde r mantêm-se constante, e $d\phi$ e $d\theta$ variam. A figura 18 mostra esse elemento.

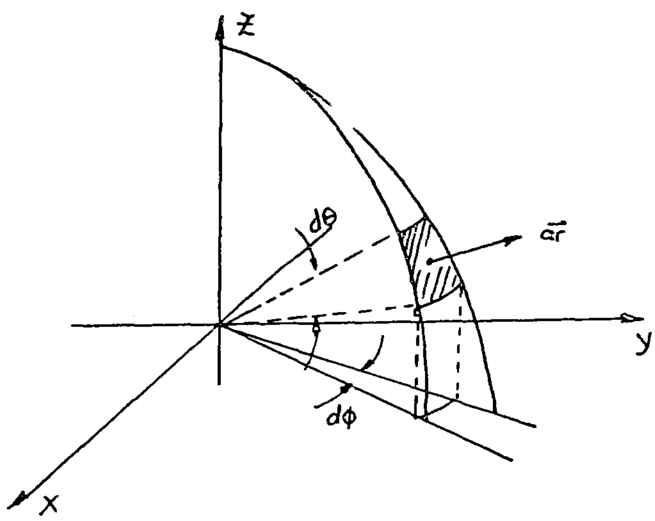


Figura 18 - Elemento diferencial de superfície com $d\theta$ e $d\phi$ variando e r constante.

Esse elemento está direcionado segundo o versor ar e possui um modulo dado por.

$$ds = rd\theta \,.\, r\text{sen}\theta\, d\phi = r^2 \text{sen}\theta\, d\theta\, d\phi \qquad (4.6)$$

b) Elemento diferencial de superfície do cone.

Este elemento é obtido quando variamos r, de um elemento dr, ϕ , de um elemento dϕ , e mantemos θ constante. A figura 19 nos mostra esse elemento de superfície.

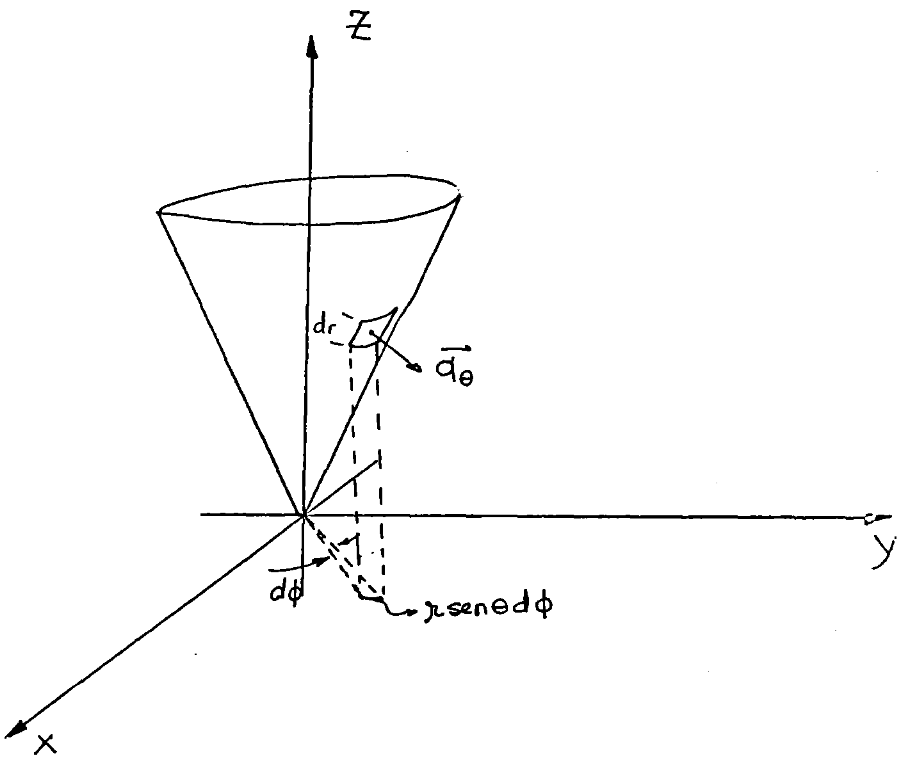


Figura 19 - Elemento diferencial de superfície, com θ constante e r e ϕ variando.

É um elemento direcionado segundo o versor aθ e possui um módulo igual à

$$ds = dr \,.\, r \text{ sen } \theta\, d\phi = r \text{ sen}\theta\, d\phi \qquad (4.7)$$

c) Elemento diferencial de superfície do plano.

Este elemento é obtido quando mantemos o ângulo Ø constante e variamos o raio r e o ângulo θ . A figura 20 nos mostra esse elemento de superfície.

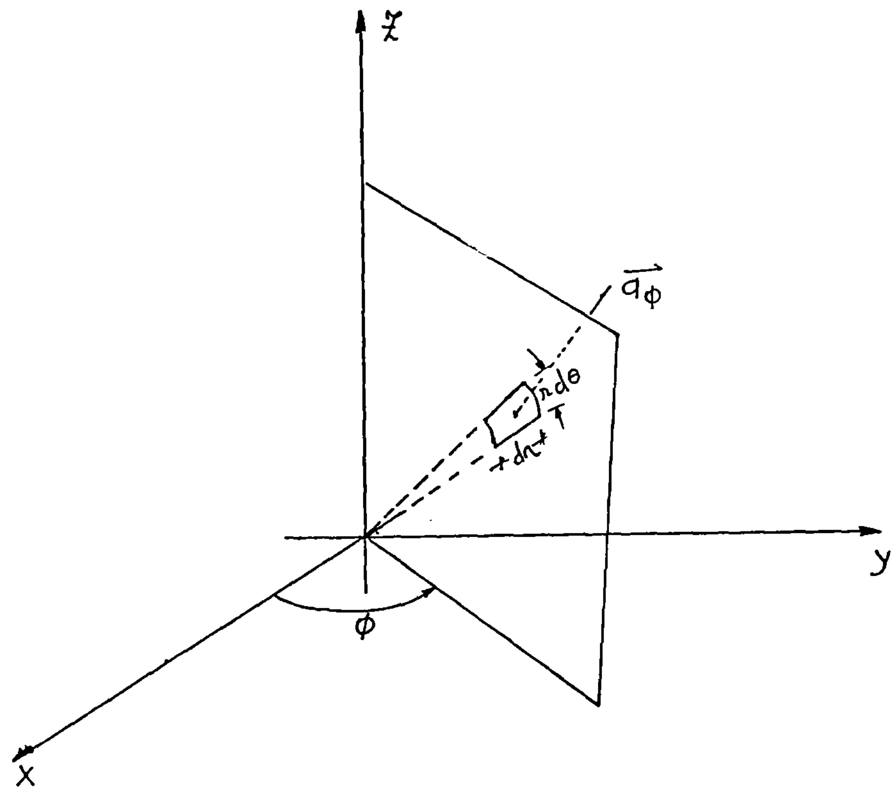


Figura 20 - Elemento diferencial de superfície, obtido variando-se r e θ e mantendo-se Ø constante.

É um elemento direcionado segundo o versor $\vec{a\phi}$ e possui um módulo igual à:

$$dS=2\ r\ \ d\theta\ \ dr \qquad (4.8)$$

Como qualquer elemento diferencial de superfície pode ser escrito como como combinação linear desses três elementos, fazendo $\vec{dS}$ ser esse elemento qualquer temos:

$$\vec{dS} = r^2 sen\theta d\theta d\phi\ \ \vec{ar} + rsen\theta\ d\phi\ \ \vec{a\theta} + rd\theta\ dr\ \vec{a\phi} \qquad (4.9)$$

4.3 - Elemento diferencial de volume

O volume diferencial pode ser construido, em coordenadas esféricas, incrèmentando-se o raio r, o ângulo θ e o ângulo Ø, pelos respectivos diferenciais de deslocamentos, ou seja, dr,rsenθdØ e rdθ. A figura 21 mostra esse elemento diferencial de volume.

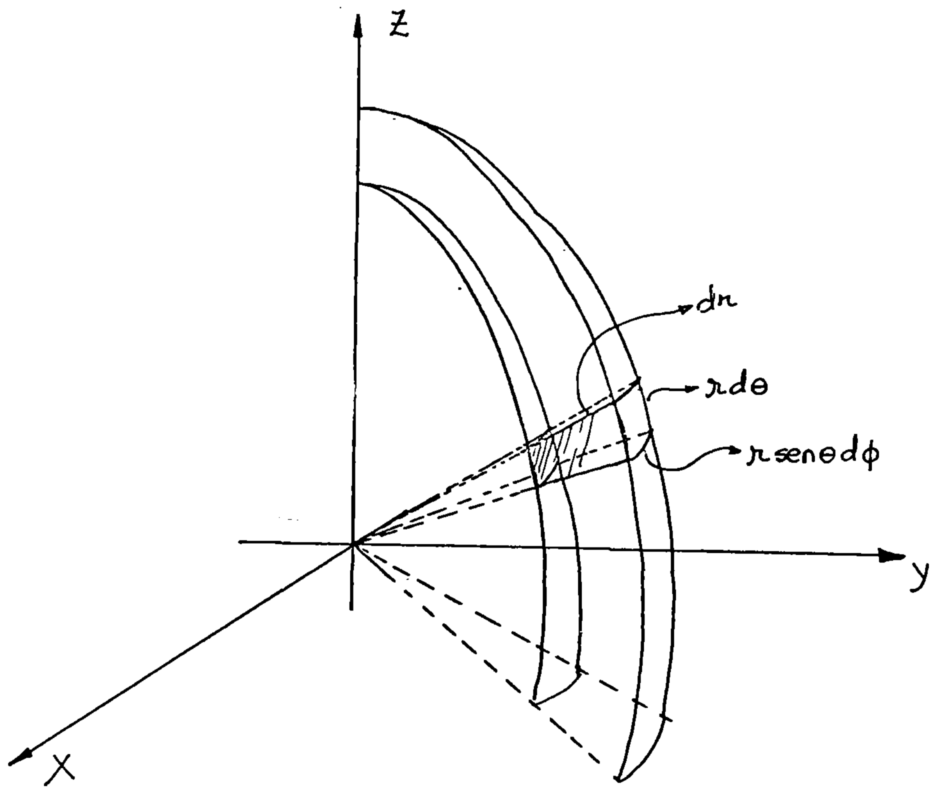


Figura 21 - Elemento diferencial de volume.

4.4 - Relação entre as coordenadas cartesianas e as Coordenadas esféricas.

Podemos finalmente relacionar as coordenadas cartesianas x, y e z com as coordenadas esféricas e as r, θ e ø, por inspeção da figura 15, ou seja,

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi \tag{4.10}$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \tag{4.11}$$

$$z = r \cos \theta \tag{4.12}$$

ou de modo inverso

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad r \geqslant 0 \tag{4.13}$$

$$\theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \qquad (0^\circ \leqslant \theta \leqslant 180^\circ) \tag{4.14}$$

$$\phi = \operatorname{artg} \; y/x \qquad (0^\circ \leq \phi \leqslant 360^\circ) \tag{4.15}$$

Por definição a variável r é considerada não negativa; θ está restrito ao intervalo 0º e 180º incluindo os extremos e ø tem variação de 0º à 360º.

5 - Transformação de Coordenadas

A transformação de coordenadas nada mais é do que uma mudança de base, que permite passar de um dado vetor ou campo vetorial de um sistema de coordenadas para outro.

Para mostrarmos como se executa uma transformação, será utilizado a transformação de coordenadas cartesianas para cilíndricas.

Seja um vetor escrito em coordenadas cartesianas:

$$\vec{A} = Ax\ \vec{ax} + Ay\vec{ay} + Az\ \vec{az} \qquad (5.1)$$

onde Ax e Ay e Az são funções de x,y,z, e desejamos conhecê-lo em coordenadas cilíndricas, portanto, o primeiro passo é escrevermos Ax, Ay e Az em função das novas coordenadas, ou seja, r, ϕ e z e, posteriormente, projetarmos o vetor A nas direções $\vec{ar}$, $\vec{a\phi}$ e $\vec{az}$, o que nos permitirá conhecer as componentes Ar $A\phi$ e Az.

Como exemplo vamos determinar a componente Ar, que nada mais é do que executarmos o produto escalar.

$$Ar = \vec{A}\ .\ \vec{ar} \qquad (5.2)$$

Como o vetor $\vec{A}$ é dado pela expressão 5.1 tem-se:

$$\begin{aligned} Ar &= (Ax\vec{ax} + Ay\vec{ay} + Az\vec{az}).\ \vec{ar} \\ &= Ax(\vec{ax}.\vec{ar}) + Ay(\vec{ay}.\vec{ar}) + Az(\vec{az}.\vec{ar}) \qquad (5.3) \end{aligned}$$

Da figura 10 tiramos que:

$$\vec{ax}\ .\ \vec{ar} = \cos\ \emptyset$$
$$\vec{ay}\ .\ \vec{ar} = \text{sen}\ \emptyset$$
$$\vec{az}\ .\ \vec{ar} = 0$$

portanto temos

$$Ar' = Ax\cos\emptyset + Ay\ \text{sen}\ \emptyset \qquad (5.4)$$

Quando procedemos de maneira análoga para $A\phi$ e Az temos:

$$A\emptyset = -Ax\ \text{sen}\ \emptyset + Ay\cos\emptyset \text{ e}$$
$$Az = Az$$

Podemos escrever essa transformação na forma matricial e determinarmos a matriz transformação de coordenadas assim:

$$\begin{bmatrix} Ar \\ A\phi \\ Az \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \text{sen}\,\phi & 0 \\ -\text{sen}\,\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ax \\ Ay \\ Az \end{bmatrix}$$

onde a matriz

$$M\left(\frac{x,y,z}{r,\phi,z}\right) = \begin{bmatrix} \cos\phi & \text{sen}\,\phi & 0 \\ -\text{sen}\,\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é denominada matriz transformação do sistema de coordenadas cartesianas para o sistema de coordenadas cartesianas para o sistema de coordenadas cilíndricas.

A matriz transformação do sistema de coordenadas cartesianas esféricas é dada por.

$$M\left(\frac{x,y,z}{r,\theta,\phi}\right) = \begin{bmatrix} \cos\phi\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta\cos\phi & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\phi\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta\ \text{sen}\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\text{sen}\,\theta & 0 \end{bmatrix}$$

6 - Exercícios Propostos

6.1. Dado os vetores

$$\vec{F} = 2\vec{ax} - 5\vec{ay} - y\vec{az} \quad \text{e}$$
$$\vec{G} = 3\vec{ax} + 5\vec{ay} + 2\vec{az} \quad \text{encontre}$$

a) $\vec{F}\cdot\vec{G}$; b) o ângulo entre $\vec{F}$ e $\vec{G}$; c) o comprimento da projeção de $\vec{F}$ sobre $\vec{G}$; d) o vetor projeção de $\vec{F}$ sobre $\vec{G}$ - Respostas - 27,0 ; 130.8º ; 4,38 ; $-2{,}13\vec{ax} - 3{,}55\vec{ay}$; $-1{,}42\ \vec{az}$.

6.2. Dado os vetores

$$\vec{A} = -6\vec{ax} + 2\vec{ay} - 4\vec{az} \quad \text{e} \quad \vec{B} = 4\vec{ax} + 3\vec{ay} - 2\vec{az}$$

encontre
a) o vetor unitário na direção $\vec{A} + 2\vec{B}$;
b) o módulo de $\vec{A} + 2\vec{B}$;
c) o vetor $\vec{c}$ tal que $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 0$.

Resposta: a) $0,1741\vec{ax} + 0,696\vec{ay} - 0,696\vec{az}$;
b) 11,69 ;
c) $2\vec{ax} - 5\vec{ay} + 6\vec{az}$

6.3. Os vetores $\vec{A} = 4\vec{ax} + 5\vec{ay} - 2\vec{az}$ e $\vec{B} = 2\vec{ax} + 8\vec{ay} + 3\vec{az}$ são representados por segmentos de linha reta que partem da origem do sistema de coordenadas cartesians; a) Qual é a separação entre as suas extensidades; b) Encontre o vetor unitário na direção do vetor $\vec{A}$; c) Encontre o vetor $\vec{C}$ que é paralelo a $\vec{A}$ e tem o comprimento

Resposta: 2) a) 6,16 ; b) $0,596\vec{ax} + 0,745\vec{ay} - 0,298\vec{az}$
c) $5,23\vec{ax} + 6,54\vec{ay} - 2,62\vec{az}$.

6.4. Dados $\vec{A} = \vec{ax} + \vec{ay}$; $\vec{B} = \vec{ax} + 2\vec{az}$ e $\vec{C} = 2\vec{ay} + \vec{az}$, Calcule: $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$ e compare este resultado com $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$.

6.5. Use os vetores do problema 6.4. para calcular $\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}$, e compare os resultados com $\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C}$.

6.6. Obtenha o versor que está apoiado na reta $\overline{OP}$ sendo $0 = (x, y, -5)$ e $P = (0,0,0)$.

6.7. Ache o vetor unitário normal ao plano $4x + 3y + 2y = 12$ (para sentido afastamento da origem).
Resposta: $(4\vec{ax} + 3\vec{ay} + 2\vec{az}) / \sqrt{29}$.

6.3. Obtenha as relações que devem ser satisfeitas entre as componentes cartesianas de dois campos vetoriais $\vec{A}$ e $\vec{B}$ para que sejam paralelos em todos os pontos do espaço.

6.9. Calcule o vetor unitário que vai de um ponto genérico da reta $x = 0$, $y = 3$ até a origem
Resposta: $\vec{a} = (-3\vec{ay} - z\vec{az}) / \sqrt{9+z^2}$.

6.10. Calcule o vetor unitário que liga um ponto genérico do Plano $y = -5$ ao ponto (x_1, y_1, z_1)
Resposta: $$\vec{a} = \frac{(x1-x)\vec{ax} + (y1+5)\vec{ay} + (z1-z)\vec{az}}{\sqrt{(x1-x)^2 + (y1+5)^2 + (z1-z)^2}}$$

6.11. Obtenha a expressão do vetor unitário que liga um ponto arbitrário do plano $z = -2$ ao ponto $(0,0,L)$. Explique o resultado para quando $L \longrightarrow -2$.

6.12. Dados $\vec{A} = 5\vec{ax}$ e $\vec{B} = 4\vec{ax} + By\vec{ay}$, Calcule By de modo que o ângulo entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$ seja 45º. Se $\vec{B}$ contiver, ainda um termo $Bz\vec{az}$, qual a relação que deve haver entre By e Bz?
Resposta. $By = \pm 4$; $By^2 + Bz^2 = 4$

6.13. Calcule o vetor que liga $(10, 3\pi/4, \pi/6)$ a $(5, \pi/4, \pi)$, pontos expressos em coordenadas esféricas.
Resposta: $-9{,}66\ \vec{ax} - 3{,}54\vec{ay} + 10{,}61\ \vec{az}$

6.14. Calcule a distância entre $(1, \pi/4, 0)$ e $(1, 3\pi/4, \pi)$ pontos expressos em coordenadas esféricas.
Resposta: 2,0

6.15. Calcule a área da superfície curva de um cilindro circular reto de raio a e altura h usando coordenadas cilíndricas.

6.16. Calcule o volume de uma casca hemisférica de raio interno 2,00m e raio externo, 2,02m, usando coordenadas esféricas.
Resposta: $0{,}162\,\pi\ m^3$.

6.17. Expresse o campo vetorial: $\vec{A} = Ax\ \vec{ax} + Ay\ \vec{ay} + Az\ \vec{az}$ em coordenadas cilíndricas.

6.17. Escreva o campo vetorial: $\vec{A} = Ar\vec{ar} + A\theta\vec{a\theta} + A\phi\vec{a\phi}$, em coordenadas cartesianas.

6.19. Transforme o campo vetorial $\vec{\mathcal{F}} = r^{-1}\ \vec{ar}$ de coordenadas esféricas para coordenadas cartesianas.
Resposta: $\vec{\mathcal{F}} = (x\vec{ax} + y\vec{ay} + z\vec{az})/(x^2 + y^2 + z^2)$.

6.20. Esboce os seguintes Campos Vetoriais:
a) $\vec{F} = x\vec{ax} + x\vec{ay}$ (Coordenadas cartesianas)
b) $\vec{F} = 2r\cos\phi\vec{ar} + r\vec{a\phi}$ (coordenadas cilíndricas)
c) $\vec{F} = 2\cos\theta\ \vec{ar} + \operatorname{sen}\theta\ \vec{a\theta}$ (Coordenadas esféricas).

6.21. Dois vetores são definidos para o ponto P, assim:

$$\vec{F} = 10\vec{ar} - 3\vec{a\theta} + 5\vec{a\phi} \text{ e}$$
$$\vec{G} = 2\vec{ar} + 3\vec{a\theta} + 3\vec{a\phi}.$$

Determine:

a) $\vec{F} \cdot \vec{G}$; b) A componente escalar de $\vec{G}$ na direção de $\vec{F}$ para o ponto P ; c) a componente do vetor $\vec{G}$ na direção de $\vec{F}$ para ponto P ; $\vec{G} \times \vec{F}$; e)

——— /// ———