

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE GEOTECNIA

REDES DE FLUXO

Gene Stancati

SÃO CARLOS - 1984  
Publicação 032/88  
Reimpressão

## REDES DE FLUXO

### 1. INTRODUÇÃO

Até cerca de 50 anos atrás o projeto de barragens e diques com solos se baseava, quase exclusivamente em regras empíricas que os construtores se transmitiam por tradição; adotavam-se seções de obras que haviam resistido satisfatoriamente às intempéries e aos problemas com água, independente dos materiais de construção e características do terreno de fundação. Com a Mecânica dos Solos e o conhecimento desses materiais, que com ela se adquiriu foi possível analisar sob uma nova luz, o comportamento das barragens e estruturas afins, extraindo generalizações, especialmente dos maciços rompidos.

As bases para uma análise racional dos problemas práticos, que tratam de infiltração de água através dos solos foram estabelecidos por Darcy e datam de mais de um século. Posteriormente à Darcy, o passo seguinte, fundamental no avanço do conhecimento do assunto foi dado por Forchheimer, que demonstrou que a função carga hidráulica que governa um fluxo em um meio poroso é uma função harmônica, ou seja, satisfaz a equação de Laplace.

O próprio Forchheimer desenvolveu os princípios básicos para o método gráfico que hoje se conhece como Método das Redes de Fluxo, que é a arma sensível e poderosa que o engenheiro dispõe para a resolução prática dos problemas de fluxo de água em solos. Esse método foi popularizado por Casagrande em 1937. Desde então a solução gráfica de Laplace que constitui o método das Redes de Fluxo, se transformou em procedimento normal para os engenheiros.

Antes de começar com uma exposição mais ou menos detalhada das bases teóricas atuais que se dispõe para resolver problemas de fluxo de água, convém estabelecer as razões pelas quais esse problema é importante para o engenheiro. Ao resolver um problema prático de fluxo de água tal como a análise de infiltrações através do maciço e do terreno de fundação da barragem, o engenheiro obtém informações fundamentais a res-

peito de três questões importantes:

- 1) a vazão perdida através da zona de fluxo
- 2) a influência do fluxo de água sobre a estabilidade geral da massa de solo, através da qual ela ocorre
- 3) as possibilidades da água de infiltração produzir carreamentos, erosões, piping, etc.

A primeira questão é importante porque toda perda de água que ocorrer através do maciço ou de suas fundações deve ser quantificada e posteriormente controlada.

A segunda questão é a mais importante com relação aos problemas de fluxo de água através dos solos, pelo menos do ponto de vista prático. Quando a água flue, a pressão a que está sujeita é hidrodinâmica e isso produz vários efeitos como: em primeiro lugar, dependendo da direção do fluxo, a pressão hidrodinâmica pode alterar o peso específico submerso do solo; por exemplo, se a água flue verticalmente para baixo, ao peso específico submerso haverá o acréscimo de um valor devido à pressão hidrodinâmica; se o fluxo ocorre verticalmente para cima há efeito flutuante sobre as partículas do solo que equivale a uma diminuição do peso específico. Em segundo lugar o aumento da pressão da água produz a correspondente diminuição da presão efetiva e portanto a resistência ao cisalhamento do solo de modo que uma estrutura que se revelou estável em condição isenta de fluxo, deverá ser reanalisada quando sujeita a fluxo, sempre que esta condição seja susceptível de apresentar-se.

A terceira questão é também de grande importância prática pois a água ao infiltrar-se através do solo pode produzir, particularmente em certas zonas, carreamentos de partículas, que se não receberam a devida atenção, e podem por em perigo a estabilidade da obra, ao deixá-la sulcada por túneis e galerias formadas por erosão.

A água do solo pode classificar-se em três categorias:

- a água absorvida, ligada às partículas por forças elétricas, e que não se move no interior da massa porosa, e não participa dos problemas de fluxo;
- a água capilar cujo fluxo apresenta grande importância em determinados problemas de solo, tais como o umidecimento de um

pavimento por fluxo ascendente. Sem dúvida, na maioria dos problemas de percolação o efeito do fluxo na zona capilar é pequeno, e é desprezado em função das complicações que acarretaria ao ser tomada teoricamente a sua influência;

- a água livre ou gravitacional que sob o efeito da gravidade terrestre pode mover-se no interior da massa sem outro obstáculo que não seja sua viscosidade e a estrutura do solo. A teoria de percolação estuda o movimento dessa água livre.

No solo, a água livre está separada da água capilar por uma superfície denominada Nível Freático ou Nível de Água (NA). Nem sempre é fácil definir e localizar o NA; em solos finos, nas escavações, o espelho de água que se estabelece com o tempo, define o NA, porém tal superfície distinta não existe no solo adjacente à escavação já que acima deste nível o solo pode estar saturado por capilaridade e portanto nesse solo o NA não tem existência física ou real.

Não há tampouco acordo total entre os autores com relação a uma definição do conceito de NA, que como se disse, muitas vezes se refere a uma superfície sem existência clara e concreta.

Para os fins de estudo se considerará Nível de Água ou Nível Freático a superfície que constitui o lugar geométrico dos pontos em que água possui uma pressão igual à atmosférica, que em questões de fluxo em que se trabalha normalmente, com pressões manométricas, se considera igual a zero. Assim no espelho de água da escavação aberta, todos os pontos tem essa pressão, e no solo adjacente ao poço, poderá falar-se de uma superfície que une pontos a essa mesma pressão.

Em condições estáticas, da água num solo, o NA, seria uma superfície horizontal. Se se admite que a água percole dentro do solo, já não há razão para que o NA siga a horizontal.

## 2. LEI DE DARCY PARA O FLUXO DE ÁGUA ATRAVÉS DOS SOLOS

A lei de Darcy demonstra a existência de uma relação linear entre o gradiente hidráulico e a velocidade de descarga através de um meio poroso. Essa lei é aplicável somente na resolução de problemas em que o fluxo seja laminar.

A natureza do fluxo depende da velocidade, segundo Reynolds.

Para um meio poroso como o solo, o número de Reynolds é expresso por:

$$R = \frac{v D \rho}{\mu}$$

onde

$v$  = velocidade de descarga

$D$  = diâmetro médio das partículas do solo, em cm

$\rho$  = densidade do fluido, em g/cm<sup>3</sup>

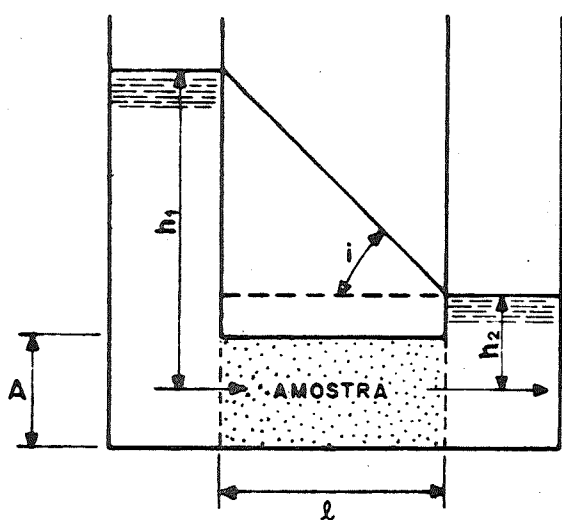
$\mu$  = coeficiente de viscosidade do fluido em g.sec/cm<sup>2</sup>

Vários investigadores concluíram que o valor limite de  $R$  para um fluxo mudar de laminar para turbulento oscila entre 1 e 12.

Substituindo-se na fórmula de  $R$  os valores de  $v = 0,25$  cm/seg, que é uma velocidade considerada alta para o fluxo de água em solo, se tem  $R < 1$  contando que  $D$  não ultrapasse o valor de 0,4 mm, que corresponde ao diâmetro da areia grossa.

Isso garante o fluxo laminar e a validade da Lei de Darcy na grande maioria dos problemas. Cabe notar também que a natureza laminar do fluxo de água através do solo representa um dos poucos casos em que realmente aparece este tipo de fluxo em toda engenharia hidráulica.

A lei de Darcy estabelece que a quantidade de fluxo é diretamente proporcional ao gradiente hidráulico. Essa lei, pode ser expressa da forma:



$$Q = K i A \quad v = K i$$

$$i = \frac{h_1 - h_2}{l}$$

$Q$  = vazão

$K$  = coeficiente de permeabilidade

$v$  = velocidade de percolação

$i$  = gradiente hidráulico

$A$  = área da amostra

Figura 1

A lei de Darcy é às vezes acusada de incorreta. Em geral isso é devido ou a interpretações erradas ou técnicas impróprias de ensaio. Em muitos casos, também devido a perda da estabilidade interna do solo sob a ação do fluxo de água.

### 3. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS GERAIS QUE REGEM O FLUXO ATRAVÉS DO SOLO

Para a água percolando através do solo e admitindo-se que:

- 1º) o regime está estabelecido
- 2º) o solo está saturado
- 3º) a água e as partículas sólidas são incompressíveis
- 4º) o fluxo não modifica a estrutura do solo de forma nenhuma

A quantidade de água entrando de uma ou várias direções de um pequeno volume de solo, deverá ser igual à que sai nas outras faces desse elemento durante um dado intervalo de tempo.

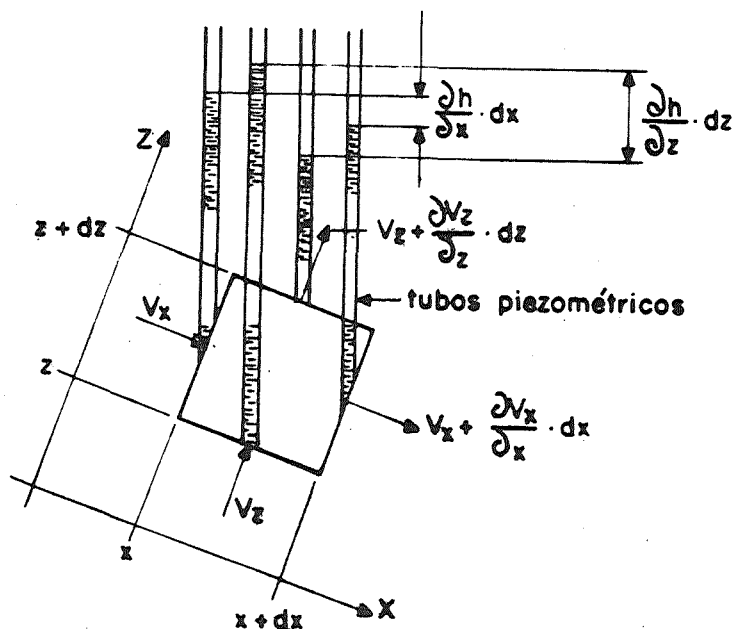


Figura 2 - Fluxo bidimensional em um meio homogêneo e isotrópico. Considerar largura de 1 m normal ao papel.

Nos problemas práticos de Mecânica dos Solos principalmente nos problemas de fluxo em solos permeáveis em maciços ou escavações, onde uma das dimensões, o eixo longitudinal, é muito maior que as dimensões da seção transversal, o estudo da percolação passa a ter maior importância em apenas duas direções. Isto é, a vazão  $q_y = 0$ , e a vazão total através de um elemento de dimensões  $x, l, z$ , será  $q = q_x + q_z$ .

Porisso, o estudo do fluxo é feito quase sempre considerando-se a situação bidimensional e o comprimento (em metros) do elemento no 3º eixo ( $y$ ).

Podemos estabelecer a Equação da Continuidade (Ver figura 2), nessas condições como:

$$\begin{aligned}dq &= V_x dy dz + V_z dx dy \\dq &= \left( V_x + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx \right) dy dz + \left( V_z + \frac{\partial V_z}{\partial z} dz \right) dx dy\end{aligned}$$

Ou então:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

Pela Lei de Darcy

$$V_x = K_x \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$V_z = K_z \frac{\partial h}{\partial z}$$

A Equação da Continuidade então torna-se

$$K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

Se o solo em que ocorre o fluxo em estudo, é considerado isótropo com relação à permeabilidade tem-se:

$$K_x = K_z = K$$

Então:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \nabla^2 h = 0, \text{ Equação de Laplace}$$

Essa equação diferencial é conhecida e estudada, por descrever matematicamente muitos fenômenos físicos de grande importância prática, como por exemplo, o fluxo de água através dos solos. Dada e estudada a equação de Laplace, suas soluções gerais e particulares, acaba sendo muito bom que ela seja precisamente a equação que descreve os problemas de fluxo d'água (Forchheimer).

Nesse caso há algumas particularizações, como solos isotrópicos, e fluxo bidimensional (esta particularização se ajusta na maioria dos casos práticos por seu caráter limitativo usualmente depreciável).

Quanto à anisotropia, é frequente, por exemplo as construções em camadas compactadas que conduz a  $K_h > K_v$ . Contudo para tal condição, usa-se o recurso da seção transformada (a ser vista), que permite estudar a Rede de Fluxo do solo como um meio isotrópico.

A solução geral da equação de Laplace é constituída por dois grupos de funções que por sua vez, são susceptíveis de uma interpretação geométrica muito útil segundo a qual ambas podem ser representadas dentro da zona de fluxo em estudo, como duas famílias de curvas, ortogonais entre si. A solução geral que satisfaça as condições de fronteira de uma região de fluxo específica, constituirá a solução particular da Equação de Laplace para essa região específica.

#### 4. SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE LAPLACE (BI-DIMENSIONAL)

Dadas as funções  $\phi$  e  $\psi$  tal que

$$\phi = -K h + c \quad e$$

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad ; \quad V_z = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$



São duas funções que satisfazem a Equação de Laplace.

Ou seja,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad e$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

A função  $\phi(x, z) = cte$  (representando a função carga hidráulica), é uma solução da equação de Laplace, e representa uma infinidade de funções, conforme o valor  $c$  que se adote: Pode-se dar uma interpretação geométrica a essa solução, pois  $\phi(x, z) = cte$  pode representar uma família de curvas que se desenvolvem na região plana onde ocorre o fluxo, obtendo-se uma curva específica da família a cada valor da constante  $c$ .

A função  $\psi(x, z) = cte$ , chamada função de fluxo, é uma solução da equação de Laplace e pode-se dar a essa função uma interpretação geométrica, de maneira que seja representada por uma família de curvas na região de fluxo. A família de curvas  $\psi = cte$  é ortogonal à família de curva  $\phi = cte$  de maneira que a intersecção entre cada duas curvas da família ocorra a  $90^\circ$ .

Demonstra-se (literatura especializada) que em um problema específico em que haja condições de fronteiras fixas, a solução da Equação de Laplace, constituída pelas duas famílias  $\phi = cte$  e  $\psi = cte$ , mais as exigências que essas famílias satisfaçam as condições de fronteira existentes, dão uma solução única ao problema considerado. Isso é essencial e deve-se ter em conta nas passagens seguintes.

Sendo o problema de fluxo, de natureza física, é importante encontrar uma interpretação física para as duas famílias de curvas consideradas ( $\phi = cte$  e  $\psi = cte$ ). Essa interpretação é necessária para a compreensão dos problemas de fluxo através do solo.

Ou seja, sendo  $\phi$  definida de forma que:

$$\phi = -K h + c$$

Segue-se que se uma curva une pontos em que  $\phi$  é constante, nesses pontos,  $h$  também é constante. Ou seja, na curva  $\phi = \text{cte}$ , todos os pontos terão a mesma energia  $h$ . Assim o sentido físico das curvas  $\phi = \text{cte}$  é das curvas que unem através da região plana de fluxo, pontos de mesma energia. Essas curvas recebem o nome de Linhas Equipotenciais, figura 3.

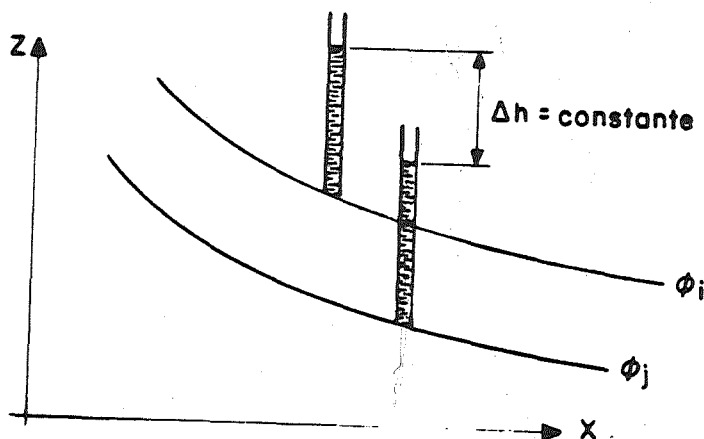


Figura 3 - Linhas Equipotenciais num meio homogêneo e isotrópico,  $\phi_i$  e  $\phi_j$  constantes.

Para as curvas  $\psi = \text{cte}$ , figura 4, considere-se a trajetória da água que passa por  $P(x,y)$ ; nesse ponto a água possui uma velocidade  $V$ , que será naturalmente tangente à trajetória.

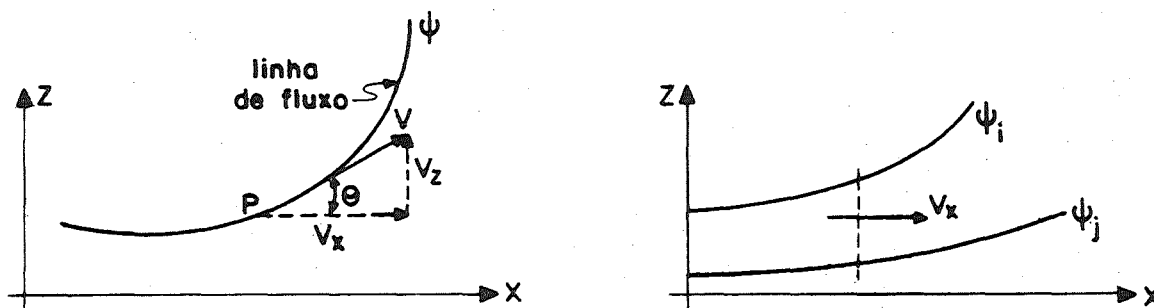


Figura 4 - Linhas de Fluxo num meio homogêneo e isotrópico; 2 linhas de fluxo constituem um canal de fluxo.

Trata-se de encontrar a equação matemática dessa trajetória.

Ao longo da curva temos:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{V_z}{V_x} = \frac{dz}{dx} \quad \text{ou}$$

$$V_z dx - V_x dz = 0$$

Mas

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{e} \quad V_z = - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \text{então}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = 0$$

Esta expressão é precisamente a diferencial total da função  $\psi$ , de forma que se comprova ao longo da trajetória de água que

$$\partial \psi = 0 \quad \text{ou} \quad \psi = \text{cte}$$

Assim, a trajetória da água tem como equação precisamente a função  $\psi = \text{cte}$ , ou o que dá no mesmo, a família de curvas  $\psi = \text{cte}$  é constituída precisamente de trajetórias físicas e reais da água através da região de fluxo. Por isso, as curvas  $\psi = \text{cte}$  se denominam linhas de fluxo.

As linhas de fluxo e equipotenciais em um plano podem se dispor geometricamente, com as seguintes propriedades:

1.<sup>a</sup> Propriedade: a vazão por unidade de comprimento entre duas linhas de fluxo é constante em qualquer seção que se tome entre as linhas. Esse espaço entre duas linhas de fluxo se chama canal de fluxo.

2.<sup>a</sup> Propriedade: as linhas de fluxo não se cortam dentro da região do fluxo. Com efeito, se as linhas de fluxo convergem em um ponto de contacto não há

área para a passagem de água e aí não se respeita a continuidade da vazão, o que é impossível sob as hipóteses da teoria em estudo.

- 3ª Propriedade: as linhas equipotenciais também não podem se cortar jamais, pois nesse ponto a água teria duas cargas hidráulicas diferentes.
- 4ª Propriedade: a carga total dos pontos de uma linha de fluxo é dada pela soma das parcelas de carga piezométrica e altimétrica. A carga cinética da equação de Bernouilli é desprezada na percolação de água através dos solos, em face a sua pequena grandeza quando comparada com as parcelas altimétricas (potencial) e piezométrica.

$$\text{Carga (H)} = \frac{u}{\gamma_w} + z$$

As equipotenciais são linhas que unem pontos de igual carga H.

- 5ª Propriedade: ao longo de uma linha de fluxo (laminar) através do solo, a carga é dissipada pela ocorrência de atrito viscoso da água com as partículas de solo.

Entre dois pontos de uma linha de fluxo há uma perda de carga  $\Delta h$ , em relação ao mesmo nível de referência R.N., dada por:

$$\Delta h = \left( \frac{u_i}{\gamma_w} + z_i \right) - \left( \frac{u_j}{\gamma_w} + z_j \right) \quad (\text{Figura 5}).$$

O gradiente hidráulico  $i$ , ao longo de uma linha de fluxo e entre duas equipotenciais consecutivas entre as quais há uma perda de carga  $\Delta h$ , será máximo quando a trajetória descrita pela linha de percolação for normal às equipotenciais (Figura 5). O escoamento deve seguir caminhos de maior gradiente. Logo, as linhas de fluxo serão perpendiculares as equipotenciais.

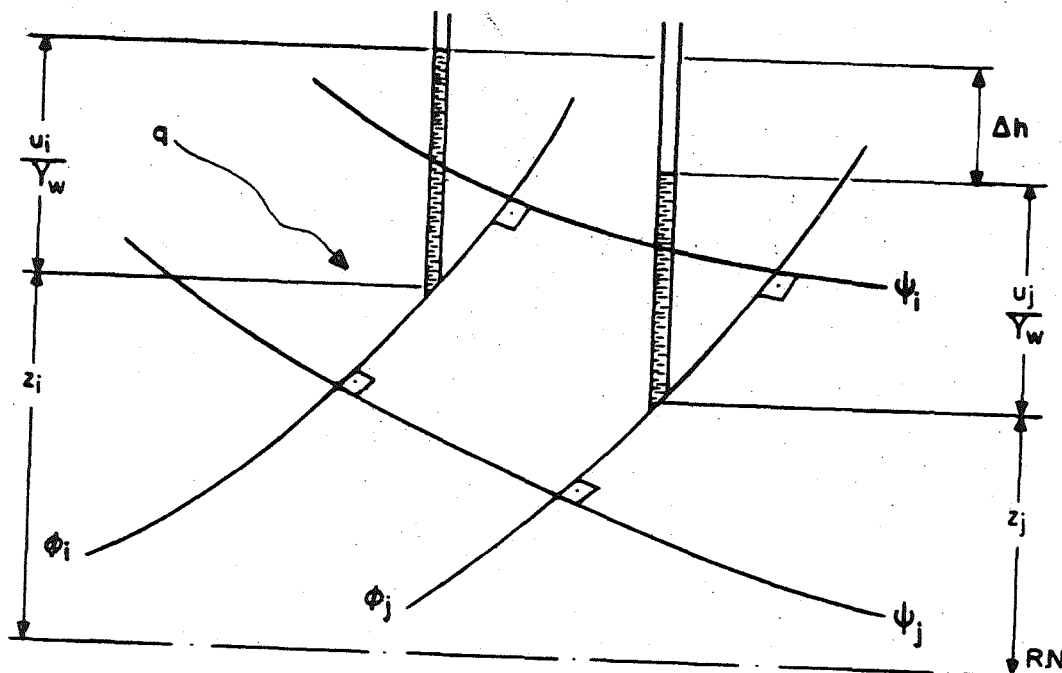


Figura 5 - Elemento quadrado de uma Rede de Fluxo com vazão constante,  $q$ , e perda de carga constante,  $\Delta h$ .

## 5. REDES DE FLUXO

A equação de Laplace, é resolvida por duas famílias de curvas ortogonais entre si, as linhas de fluxo e as linhas equipotenciais; as famílias de linhas que cumpram a ortogonalidade e condições de fronteira, da região de fluxo constituem uma solução única da equação de Laplace e do problema de fluxo descrito pela equação.

O conjunto das linhas de fluxo e equipotenciais é o que chamamos de Rede de Fluxo.

Os problemas práticos de fluxo em solos são bastante complicados em suas soluções matemáticas rigorosas e exigem bastante elaboração matemática, por esta razão foram desenvolvidos métodos gráficos que utilizam as propriedades citadas de linha de fluxo e equipotenciais e que permitem resolver os problemas de percolação a duas dimensões.

O método das Redes de Fluxo trata de definir em cada caso particular as condições de fronteira, específicas do problema e traçar cumprindo essas condições e as propriedades das linhas de fluxo e equipotenciais, as duas famílias ortogonais, obtendo uma imagem gráfica do problema.

Ao se acomodar em um desenho feito à mão, as duas famílias respeitando as condições de fronteira e de ortogonalidade se terá uma aproximação da solução única do problema, esta aproximação, se o desenho foi realizado com cuidado, é suficientemente boa para os fins de engenharia e para as soluções de problemas, com vantagens sobre as que se obtêm por métodos matemáticos rigorosos, mais precisos, porém mais complicados.

Ao traçar uma rede de fluxo, na prática, os seguintes passos são fundamentais:

- 1) delimitação da zona de fluxo que se deseja estudar, analisando suas condições específicas de fronteira;
- 2) traçado das duas famílias de curvas ortogonais que satisfaçam as condições de fronteira e que constituam solução única da Equação de Laplace.

Não se pode dar muitas regras gerais para definir as fronteiras, pois cada caso, é um caso particular, mas pode-se analisar casos mais frequentes como guia de critério ou de aprendizagem.

## 6. TRAÇADO DA REDE DE FLUXO - CÁLCULO DA VAZÃO

Ao tentar traçar as famílias de equipotenciais e de fluxo, surge o problema de que por cada ponto da região de fluxo deverá passar, em princípio uma linha de fluxo e uma equipotencial, pois cada ponto da região de fluxo a água tem uma velocidade e uma carga hidráulica. Isto levaria, a traçar todas as linhas possíveis, e a uma solução que formaria uma mancha uniforme em toda a região do fluxo; a este modo de proceder faltaria o valor prático, pois as soluções obtidas dos diferentes problemas serão uniformemente inúteis. Para aspirar a uma solução discriminativa, que seja para diferenciar um problema de fluxo do outro, será preciso não traçar todas as linhas de fluxo e equipotenciais possíveis, mas sim traçar somente algumas selecionadas com conveniência.

O problema não é novo, e aqueles familiarizados com a representação gráfica de outros campos vetoriais de variável escalar, como o campo elétrico por exemplo, ou a representação de curvas de nível em topografia, o reconhecem de imediato. As soluções que convêm dar no caso dos problemas de fluxo é análoga a dada nesses outros casos, fixar um ritmo para desenhar somente algumas das infinitas linhas possíveis.

Para iniciar o traçado de uma Rede de Fluxo deverão ser consideradas as condições limites, isto é, deverão ser estabelecidas as linhas particulares de fluxo e equipotenciais que limitam externamente a rede de percolação. Estabelecidas estas condições somente uma rede poderá ser traçada que satisfaça as propriedades das Redes de Percolação. Um problema clássico para o traçado de Rede de Percolação é o ilustrado na Figura 6, onde uma parede de estacas é engastada num solo permeável.

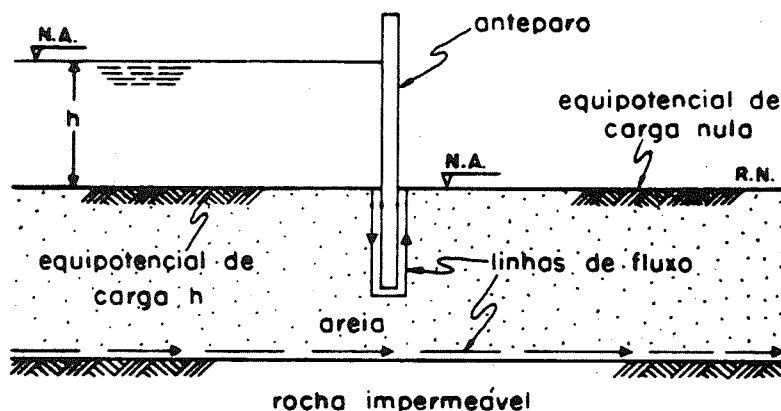


Figura 6 - Linhas de Fluxo e Equipotenciais limites, numa rede de estaca prancha engastada em solo permeável.

Estabelecido o Nível de Referência (R.N.) na superfície do solo, as condições limites serão duas linhas de fluxo e duas equipotenciais (essa situação limite apresenta raras exceções). As duas linhas de fluxo são: lados e base da estaca prancha que é a linha de fluxo mais curta da rede a ser traçada e a linha da fronteira rocha-solo, a linha de fluxo mais longa.

3/5 -  
1.0 - d

Nem a estaca prancha, nem a rocha são meios permeáveis, logo o fluxo é limitado por esses dois meios. As duas linhas equipotenciais limites são a superfície do solo permeável à esquerda da cortina com carga total igual a  $h$  e à direita da cortina com carga total igual a zero.

Consideremos agora um elemento isolado do meio permeável (Figura 7) formado por quatro linhas de fluxo distantes  $a$  entre si, no plano e de uma unidade de comprimento no sentido normal ao papel.

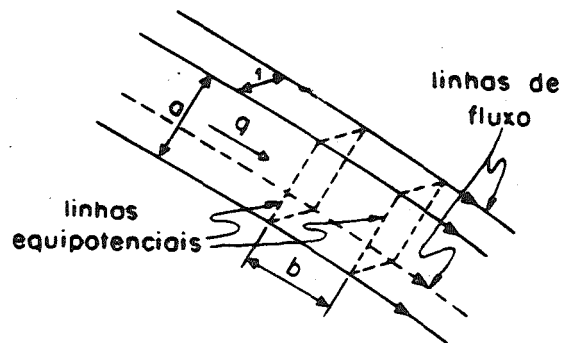


Figura 7 - Canal de Fluxo de uma rede com vazão  $q$ , constante e perda de carga  $\Delta h$ , constante entre suas equipotenciais. Considerar a largura de 1 m normal ao papel.

Pela Lei de Darcy, a vazão por unidade de comprimento do elemento será

$$q = K i A = K \left( \frac{\Delta h}{b} \right) (a \cdot 1)$$

Onde  $\Delta h$  representa a perda de carga entre equipotenciais e  $b$  a distância entre elas ou seja  $\Delta h = cte$ ; se fizermos a relação  $a/b = cte$ , então a vazão  $q = cte$ . A melhor solução para tal problema é fazer  $a/b = 1$  ou seja, considerando apenas a seção plana da figura 8.



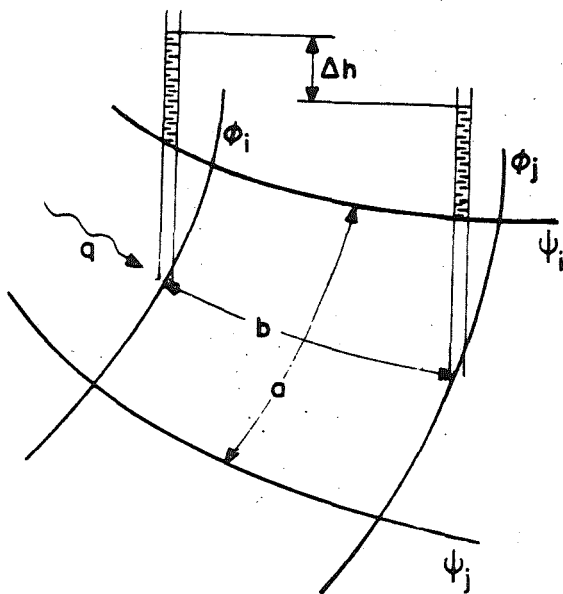


Figura 8 - Seção plana de um canal de fluxo numa Rede de Fluxo.

Sendo  $\phi_i, \phi_j$  - linhas equipotenciais e  $\psi_i, \psi_j$  - linhas de fluxo, teremos um elemento da Rede de Fluxo constituído de duas linhas de fluxo e duas equipotenciais ortogonais entre si, formando o "quadrado" de uma rede.

Completando a sequência no traçado da Rede de Fluxo no solo de fundação da estaca prancha, escolhe-se então, dentro o número infinito de linhas de fluxo e linhas equipotenciais possíveis aquelas que dentro das limites formem quadrados.

A solução será a Rede de Fluxo ilustrada na Figura 9.

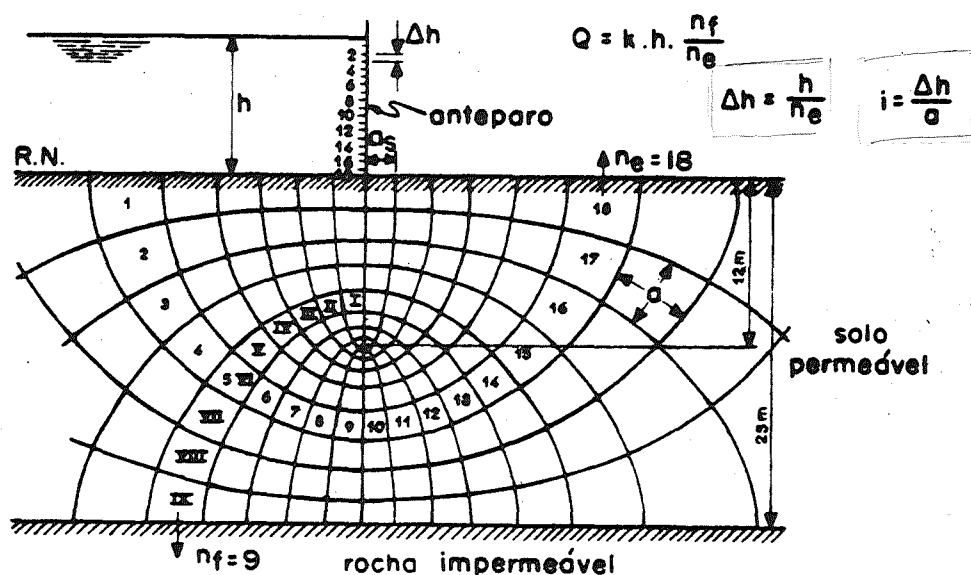


Figura 9 - Problema clássico (Forchheimer) do traçado de uma Rede de Fluxo de elementos quadrados, num meio permeável. O anteparo é uma cortina de estaca prancha.

Essa solução gráfica dada por Forchheimer, apresenta dois grupos de linhas ortogonais entre si representando as linhas de fluxo e as linhas equipotenciais, ou respectivamente as funções  $\psi(x,z)$  e  $\phi(x,z)$  de forma que entre duas linhas de fluxo consecutivas ter-se-á um canal de fluxo com a vazão  $q = cte$ , por unidade de comprimento da fundação e entre duas equipotenciais consecutivas a perda de carga  $\Delta h = cte$ .

Duas propriedades que podem ser imediatamente obtidas da Rede de quadrados são:

- 1) os quadrados 2 e 9 da figura 10, por exemplo, estão contidos dentro das mesmas linhas de fluxo onde:

$$q_2 = q_9 = q = cte$$

$$q_2 = K \cdot \frac{\Delta h_2}{b_2} \cdot a_2 \cdot l$$

$$q_9 = K \cdot \frac{\Delta h_9}{b_9} \cdot a_9 \cdot l$$

Mas,

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_9}{b_9} = 1 \quad \text{então}$$

$$\Delta h_2 = \Delta h_9 = \Delta h$$

Ou seja, as perdas de carga são iguais entre os vários quadrados da rede.

2) os quadrados II e IX, por exemplo, estão contidos entre as mesmas linhas equipotenciais onde:

$$\Delta h_{II} = \Delta h_{IX} = \Delta h = \text{cte}$$

$$q_{II} = K \cdot \frac{\Delta h_{II}}{b_{II}} \cdot a_{II} \cdot l$$

$$q_{IX} = K \cdot \frac{\Delta h_{IX}}{b_{IX}} \cdot a_{IX} \cdot l$$

Mas, 
$$\frac{a_{II}}{b_{II}} = \frac{a_{IX}}{b_{IX}} = 1 \quad \text{então}$$

$$q_{II} = q_{IX} = q = \text{cte}$$

Ou seja, as vazões são iguais entre os vários canais de fluxo da rede.

Para qualquer quadrado pode se escrever que:  $q = K \cdot \Delta h$  -vazão por unidade de comprimento do elemento.

\* Se  $n_f$  for o número de canais de fluxo, e  $n_e$  o número de quedas do potencial carga hidráulica, de uma Rede de Fluxo tere

mos:

$Q$  = vazão total perdida por percolação por unidade de comprimento da fundação

$$Q = q \cdot n_f$$

$h$  = perda de carga total

$$h = \Delta h \cdot n_e$$

→ Então  $Q = K \cdot h \cdot \frac{n_f}{n_e} = K \cdot h \cdot F$

A relação  $F = n_f/n_e$  é denominada Fator de Forma e depende de cada rede traçada. O traçado de uma Rede de Percolação em um meio permeável é feita portanto desenhando-se elementos quadrados. Naturalmente esses quadrados são acomodados à cada problema; mesmo assim, cada problema tem uma solução ótima. Para encontrá-la deve se seguir algumas regras básicas:

- 1) usar todas as oportunidades possíveis para estudar a aparência de Redes de Fluxo bem feitas tratando depois de repeti-las sem ter em mãos o modelo, até obter desenhos satisfatórios;
- 2) usualmente, é suficiente traçar a rede com um número de canais de fluxo entre 4 e 5. O uso de muitos canais dificulta o traçado e desvia a atenção de aspectos essenciais;
- 3) deve-se observar sempre que a aparência da rede em conjunto, sem tratar de corrigir detalhes antes que toda ela esteja aproximadamente bem traçada;
- 4) frequentemente, há partes das Rede de Fluxo em que as linhas de fluxo devem ser aproximadamente retas e paralelas, nestes casos os canais são mais ou menos do mesmo tamanho e os quadrados vão resultar muito parecidos. O traçado da rede pode ser facilitado se se começar por essa zona;
- 5) as Redes de Fluxo em áreas confinadas, limitadas por fronteiras paralelas, (especialmente a superior e a inferior) são frequentemente simétricas e as linhas de fluxo e as equipotenciais são então de forma parecida à elíptica;
- 6) um erro comum nos principiantes é de desenhar transições muito bruscas entre as partes retas e as partes curvas das diferentes linhas. Deve-se ter presente, que as transi-

ções devem ser sempre suaves e de forma parabólica ou elíptica; o tamanho dos diferentes quadrados deve ir mudando, também gradualmente;

- 7) em geral a primeira tentativa pode não conduzir a uma rede de quadrados em toda a extensão da região do fluxo. A queda de potencial entre duas equipotenciais sucessivas correspondente a um certo número de canais com que se pretendeu a solução, não será uma parte inteira exata da perda de carga total, de maneira que ao terminar a rede, restará uma fileira de retângulos entre duas linhas equipotenciais (em que a perda de carga é uma fração do  $\Delta h$  que prevaleceu no resto da rede). Geralmente, isso não é prejudicial e esta fileira pode ser tomada em conta para o cálculo de  $n_e$ , estimada a fração de perda de carga que resultou. Se por razões de apresentação se deseja que todas as fileiras de quadrados tenham o mesmo  $\Delta h$ , pode-se corrigir a rede mudando o número de canais de fluxo seja por interpolação ou começando novamente. Não se deve tentar convergir a fileira incompleta em uma de quadrados através de correções locais puramente gráficas, a não ser que, o que falta ou sobre de espaço na fileira incompleta, seja muito pouco; o mesmo tipo de raciocínio pode-se aplicar aos canais de fluxo onde se considera frações da vazão  $q$ .
- 8) as condições de fronteira podem introduzir singularidades na rede que serão discutidas na ocasião oportuna;
- 9) uma superfície de saída na rede em contacto com o ar, se não é horizontal, não é nem linha de fluxo nem equipotencial, de forma que os quadrados limitados por essa superfície podem ser incompletos. Sem dúvida, como se demonstrará mais adiante estas superfícies devem cumprir a condição de que se tenha perda de carga igual entre seus pontos, cortados por equipotenciais.

Na figura 10, ilustram-se algumas redes de percolação em fundações permeáveis.

## 7. CONDIÇÕES ESPECIAIS

- 7.1 - Quando uma linha de fluxo e uma equipotencial são paralelas, por uma singularidade de rede, essa rede será formada por quadrados aproximadamente elípticos.

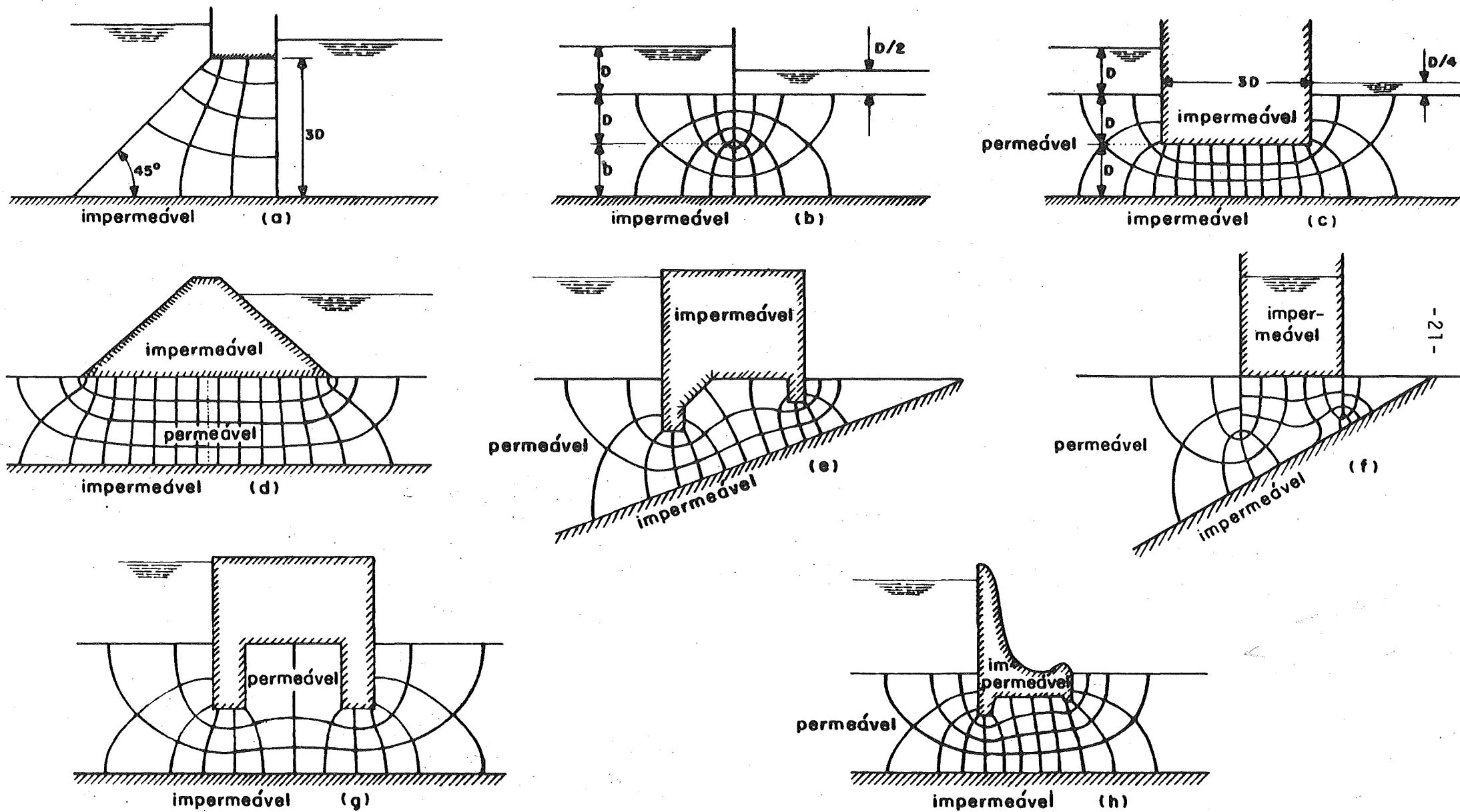


Figura 10 - Vários exemplos de redes de percolação em fundações permeáveis.

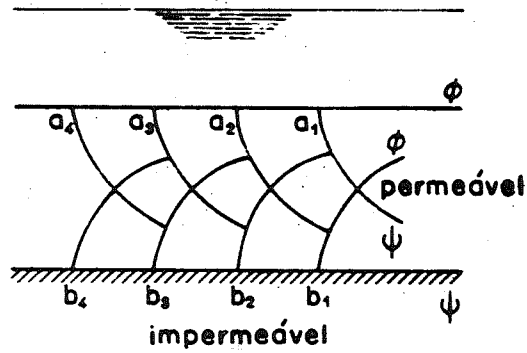


Figura 11 - Elementos quadrado-elípticos de uma Rede de Fluxo quando as linhas equipotenciais e de fluxo limites são paralelas.

7.2 - Certas condições limites podem ocasionar a intersecção de uma linha de fluxo com uma equipotencial a ângulos maiores que  $90^{\circ}$  ( $180^{\circ}$  é um caso particular como na figura 12), tem-se então uma condição particularmente crítica onde a velocidade do fluxo pode provocar erosão e arraste. Tais situações devem ser evitadas ou deve-se providenciar proteção para que tais erosões não ocorram.

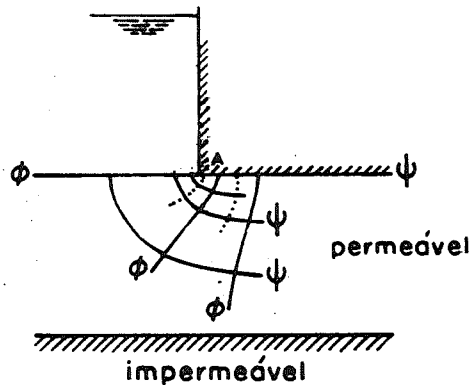


Figura 12 - Elementos de uma Rede de Fluxo quando as linhas equipotencial e de fluxo, limites, interseptam-se a  $180^{\circ}$ .

## 8. SUBPRESSÕES

Uma das aplicações mais úteis de uma Rede de Fluxo é aquela que permite calcular as Pressões Neutras em qualquer ponto da região onde há percolação.

Essas pressões que ocorrem não são devido às condições estáticas do N.A., ou pressões hidrostáticas como também devido à di-

ferença de carga ou seja devido ao fluxo de água, compõe as pressões hidrodinâmicas e ocorrem tanto nos maciços permeáveis como nas fundações permeáveis.

Especialmente sob as estruturas de concreto (por exemplo, os vertedouros), impermeáveis, construídas sobre fundações onde ocorre fluxo de água, essas pressões neutras (cuja resultante atua como uma força de empuxo na base da estrutura) são denominadas Subpressões.

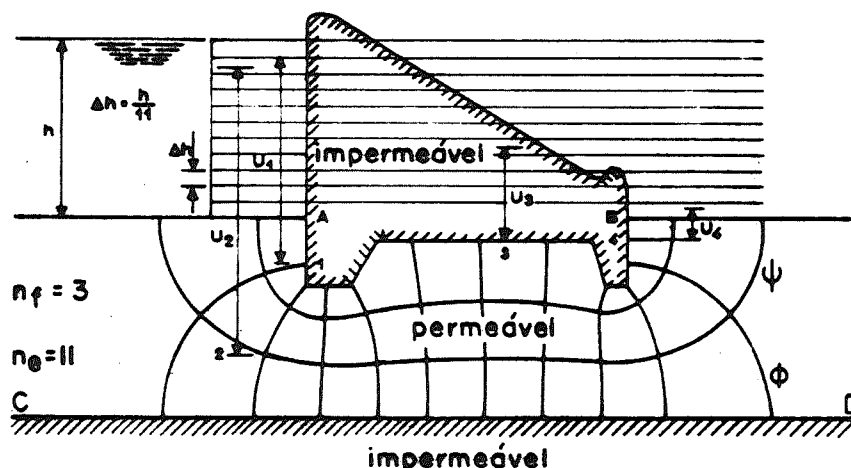


Figura 13 - Pressões Neutras calculadas a partir da Rede de Fluxo traçada num meio permeável, sob um vertedouro. Processo Gráfico de Cálculo.

Considere-se o caso ilustrado na figura 13, em que a água se infiltra em uma região permeável sob o vertedouro de uma barragem (estrutura de concreto, impermeável).

Determinadas as condições limites da Rede de Fluxo, esta será traçada constituindo-se de quadrados limitados por equipotenciais e linhas de fluxo.

Essas linhas limites serão respectivamente as linhas AB e CD de fluxo limite respectivamente ao longo da base do vertedouro e da zona impermeável da fundação; e as equipotenciais, as horizontais que passam por A e por B, à esquerda e à direita da barragem.

Estabelecido o R.N., na horizontal da superfície permeável, as cargas dessas equipotenciais são respectivamente a soma das cargas altimétricas ( $z$ ) e piezométricas ( $u/\gamma_w$ ) dos pontos desses limites.



Ou seja,

À esquerda:  $H_0 = \frac{u}{\gamma\omega} = h$ , ( $z_0 = 0$ ) - carga total inicial

À direita:  $H_f = 0$  ( $z_f = 0$ ,  $\frac{u_f}{\gamma\omega} = 0$ ) - carga total final

A perda de carga por percolação será

$$H_0 - H_f = h \quad (= \text{desnível de água entre montante e jusante})$$

Essa perda se dá em parcelas iguais  $\Delta h = h/n_e$ , em cada equipotencial da Rede de Fluxo. O fator  $n_e$ , como já foi visto, depende da rede traçada.

Para calcular as pressões de água em qualquer ponto da rede (por exemplo os pontos 1, 2 e 4 ilustrados na figura) ou particularmente as subpressões (ponto 3), deve-se considerar as perdas de carga que ocorrem até cada um desses pontos.

Sendo assim, considere-se o ponto 1 na fundação. A carga total inicial é  $h$ ; o ponto 1 localiza-se na segunda equipotencial da Rede. Logo, da equipotencial que passa por A à equipotencial que passa por 1 houve uma perda de carga  $\Delta h$ . Ou seja,

$$H_0 = h$$

$$H_1 = H_0 - \Delta h$$

$$H_1 = \frac{u_1}{\gamma\omega} + z_1 \quad \therefore \quad \frac{u_1}{\gamma\omega} = H_0 - \Delta h - z_1$$

Considerando-se  $\gamma\omega = 1 \text{ gf/cm}^3$  ou  $1 \text{ t/m}^3$ , a pressão de água no ponto 1 será

$$u_1 = (h - \Delta h - z_1) \cdot 1 \cdot \text{t/m}^2$$

No caso do ponto 2, que está numa posição qualquer dentro da massa de solo permeável, as pressões neutras serão calculadas de modo análogo; ou seja, o ponto 2 localiza-se entre a 2ª e a 3ª equipotenciais da rede, logo, a perda de carga até ele será:  $\Delta h + 1/2 \Delta h$ , em relação à inicial ou

$$H_2 = H_0 - 1,5 \Delta h$$

$$H_2 = \frac{u_2}{\gamma\omega} + z_2 \quad \therefore \quad \frac{u_2}{\gamma\omega} = H_0 - 1,5 \Delta h - z_2$$

Ou

$$u_2 = (h - 1,5 \Delta h - z_2) \text{ t/m}^2$$

Nos pontos 3 (subpressão) e 4 as pressões de água seriam calculadas de forma análoga.

Deve-se observar com atenção que as cargas altimétricas devem ser consideradas positivas acima do R.N. e negativas abaixo do mesmo. Isso leva a um processo gráfico prático para o cálculo das pressões de água em qualquer ponto da Rede de Percolação, a partir da perda total de carga  $H_0 - H_f = n_e \cdot \Delta h$ . Isto é, sabendo-se que a perda de carga entre 2 equipotenciais consecutivas é constante e igual a  $\Delta h = (H_0 - H_f)/n_e$ , essas perdas  $\Delta h$  podem ser transformadas em cotas se se dividir a diferença  $H_0 - H_f = h$ , em  $n_e$  partes iguais, como na figura 13; a cada uma das divisões corresponderá uma perda  $\Delta h = h/n_e$ , ocorrida em cada equipotencial.

A carga total de cada um dos pontos 1, 2, 3 ou 4, sempre em relação ao R.N. será a carga total inicial  $H_0$  menos as perdas que ocorreram até o ponto em questão ( $\Delta h$  para o ponto 1,  $1,5 \Delta h$  para o ponto 2;  $6,3 \Delta h$  para o ponto 3 e  $10,5 \Delta h$  para o ponto 4).

Para calcular a pressão neutra nos mesmos pontos, basta levar em consideração a carga altimétrica de cada um, uma vez que

$$\frac{u_i}{\gamma_w} = H_0 - n_i \Delta h - z_i \quad \text{sendo } n_i = \text{perdas até o ponto } i$$

Como os pontos estão abaixo do R.N. todas as cargas altimétricas são negativas. Então, determinar a pressão neutra do ponto  $i$  corresponde em cotas a subtrair de  $h$  o valor  $n_i \Delta h$  e acrescentar as cotas  $z_i$ .

As cotas  $u_1, u_2, u_3, u_4$  em metros, são respectivamente as pressões neutras em  $\text{t/m}^2$  dos pontos 1, 2, 3 e 4, mostradas na figura 13.

Na base da estrutura impermeável a distribuição das pressões neutras ou as subpressões, formam um diagrama, cuja área será o empuxo; o ponto de aplicação dessa força é no centro geométri-

co do diagrama traçado com os valores  $u_j$ .

### 9. CÁLCULO DE VELOCIDADES E GRADIENTES HIDRÁULICOS NOS PONTOS DE UMA REDE DE FLUXO

Nos pontos de uma região de fluxo na qual se traçou uma rede, também é possível encontrar o gradiente hidráulico, assim como a velocidade da água. Para isto, bastará traçar pelo ponto um segmento da linha de fluxo que passe por ele e que esteja contida dentro do quadrado em que haja caído o ponto. Então a perda de carga entre equipotenciais da rede,  $\Delta h$ , dividida, entre a longitude da linha de fluxo em que ocorre esta perda, proporciona o gradiente hidráulico médio no tramo que inclui o ponto. Maior aproximação do gradiente específico no ponto, pode ser obtido subdividindo-se o quadrado em outros menores, cada vez mais em torno do ponto.

Uma vez que se tem o gradiente em um ponto bastará multiplicá-lo pelo coeficiente de permeabilidade do solo, para ter a velocidade da água em magnitude, segundo a Lei de Darcy; esta velocidade será tangente no ponto à linha de fluxo que passe por ele e estará dirigida no sentido do fluxo.

Pode-se em cada quadrado determinar o gradiente hidráulico

$$i = \frac{\Delta h}{b} \quad (a = b)$$

Onde  $b$  é a dimensão do quadrado em questão.

O máximo gradiente hidráulico será o correspondente ao menor valor de  $b$ .

Na superfície de descarga, a jusante, o gradiente hidráulico será  $i_s = \Delta h/a_s$  onde  $a_s$  é o comprimento do menor quadrado na superfície de jusante (geralmente localizado no pé da estrutura, ver figura 9).

A pressão de água exercida sobre esse elemento devido à percolação será

$$u_s = \Delta h \gamma_w$$

Onde a perda de carga  $\Delta h$  ocorre pelo atrito viscoso entre a água e as partículas sólidas.

Essa pressão produz um empuxo

$$E_s = \Delta h \gamma_w a_s \cdot l$$

A força de percolação por unidade de volume desse elemento considerado será:

$$F_s = \frac{E_s}{a_s^2 l} = \gamma_w \cdot i_s$$

Esta força é proporcional ao gradiente hidráulico tendo a direção do fluxo e não deve ultrapassar a resistência de atrito entre as partículas, caso contrário provocará o fenômeno de erosão ou arraste ou piping (erosão tubular).

Para combater esse fenômeno destrutivo existem os filtros que são estruturas porosas colocadas convenientemente dentro de um maciço com a finalidade de:

- a) recolher a água que percola através do maciço orientando - sua saída e evitando assim a formação de gradientes hidráulicos elevados, com o aparecimento de forças de percolação de valores altos. Como visto anteriormente, estas forças de percolação são as responsáveis pelas erosões que se formam à jusante das fundações e/ou maciços permeáveis.
- b) evitar o carreamento de partículas do maciço para fora do mesmo diminuindo assim a possibilidade de erosão tubular ou "piping".

Outro recurso usado para diminuir o gradiente hidráulico, de uma maneira geral ao longo de uma fundação permeável ( $i = \frac{h}{l}$ ) é construir um elemento de vedação que alongue o caminho percorrido pela água ( $l$ ). Estes elementos são os tapetes impermeáveis e as cortinas (cut-off) ou trincheiras de vedação.

Esses elementos, bem projetados, formam uma vedação segura à fuga de água pela fundação e permite uma maior estabilidade do maciço.

O aspecto da rede de fluxo pode se modificar bastante com a presença das cortinas de vedação ou dos tapetes permeáveis, como se pode perceber na figura 14.

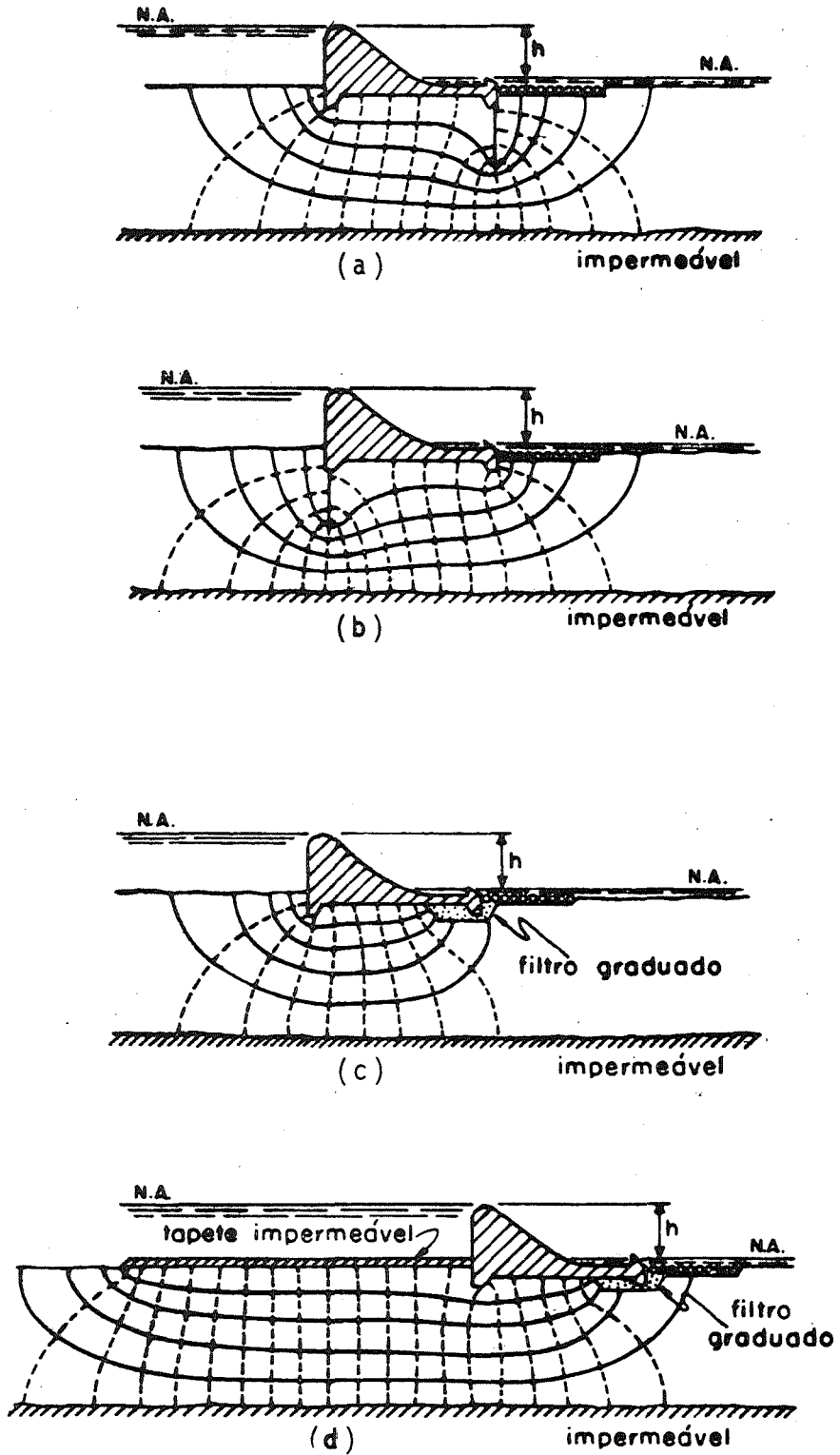


Figura 14 - Redes de Fluxo em meios permeáveis, sob vertedouros, com elementos de vedação sob a estrutura; a - cortina a jusante; b - cortina a montante; c - filtro; d - tapete impermeável a montante.

## 10. FLUXO DE ÁGUA ATRAVÉS DE MACIÇOS DE TERRA

O fluxo de água através de maciços de terra constitui um dos casos de maior importância na aplicação da teoria de fluxo de água nos problemas práticos; isso se deve tanto à importância que o maciço tem em si, como estrutura, como que, neste caso o problema do fluxo apresenta características especiais às quais, deve-se dedicar estudos cuidadosos para poder chegar a soluções apropriadas.

O maciço de terra é em muitos sentidos uma região de fluxo como outra qualquer; traçando sua rede de fluxo para as condições de fronteira que se tenham, poder-se-á calcular a vazão perdida na percolação, os gradientes hidráulicos, as velocidades da água em qualquer ponto, as pressões hidrodinâmicas, etc. A particularidade do problema de fluxo através de maciços está nos métodos especiais para a determinação das linhas limites da Rede.

A razão disso é simples: na região do fluxo que é o maciço de terra não se conhece a priori, as fronteiras, de modo que não se satisfaz o pré-requisito básico para resolver o problema, que é, como já foi dito, o conhecimento das fronteiras para o traçado da rede. Com efeito seja o maciço de terra da Figura 15, suposto material heterogêneo e isotrópico.

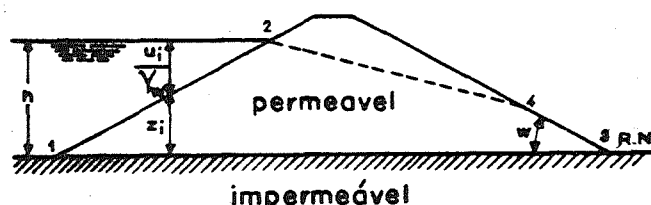


Figura 15 - Zona Saturada de um maciço permeável sobre fundação impermeável.

A zona limitada pelos pontos 1, 2, 3, 4 é a região saturada onde haverá uma perda gradual de carga do ponto 2 ao ponto 3, sendo assim a região onde ocorre o fluxo.

As linhas de fronteira podem ser determinadas em primeira hipótese, em sequência qualitativa.

Tomando-se o R.N. ao longo da superfície impermeável 1 - 3, é imediato que a linha 1 - 2 é uma equipotencial, uma vez que seus pontos tem todos a mesma soma energia altimétrica ( $z_i$ ) + energia piezométrica ( $u_i/\gamma_w$ ), igual a h. Essa equipotencial é limite nessa zona de fluxo.

A linha 1 - 3 contacto entre as fronteiras permeável e impermeável é uma linha de fluxo, pois na região impermeável não há penetração de fluxo. Essa linha de fluxo é limite.

A linha 2 - 4 que limita a zona de fluxo dentro do maciço, recebe o nome de Linha Freática, é uma linha de fluxo com características próprias, cuja determinação depende o traçado da Rede de Fluxo. As características da linha freática e sua determinação teórico-prática, serão vistas por partes no desenvolvimento do texto, uma vez que a Rede de Fluxo e a Linha Freática são interdependentes.

A linha freática é uma linha de fluxo, acima da qual admite-se que não há saturação, isto é, as pressões neutras são nulas, ao longo dessa linha. Esse conceito torna-se coerente se raciocinarmos que se a água estivesse sob pressão diferente de zero, subiria acima desse limite, e a linha freática passaria a ser uma linha de fluxo comum da Rede, contra a hipótese inicial de linha limite.

A linha 4 - 3 é uma linha limite, com propriedades descritas no item 9 da seção 6, isto é, uma linha de saída não horizontal, com perdas de carga iguais entre os pontos da mesma, cortados por equipotenciais.

A fronteira 2 - 4 - 3 da Rede de Fluxo, é considerada à Pressão Atmosférica e em tais superfícies existe a condição teórica que deve ser cumprida, traduzida de forma gráfica com preensível na Figura 16.

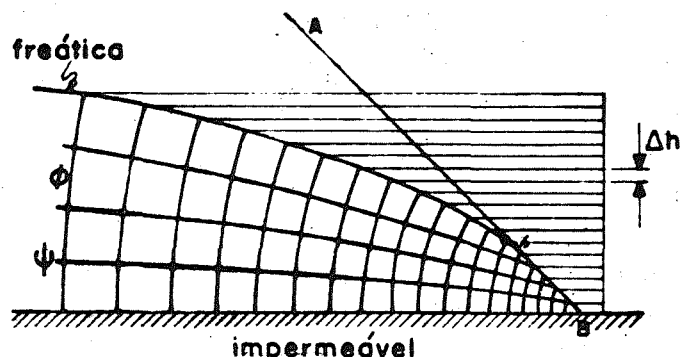


Figura 16 - Determinação das Equipotenciais na Linha Freática dos maciços de terra.

A superfície AB é o limite do maciço de terra, e a linha freática indicada é a linha de fluxo limite da Rede, com pressões neutras nulas. Dois pontos dessa linha freática cortados por duas equipotenciais sucessivas estarão separados na vertical pela distância  $\Delta h$  que representa a perda de carga devido apenas a perda de carga altimétrica ( $z_i$ ) uma vez que as cargas piezométricas ( $u_i/\gamma_w$ ) são nulas nessa fronteira. Como as perdas de carga devem ser iguais, pode-se obter as equipotenciais, cortando a linha freática por horizontais equidistantes entre si.

A figura 16 mostra o que seria um trecho de uma Rede de Fluxo no maciço, conhecidos alguns limites. Ou seja, uma Rede de Quadrados, fornecida por linhas equipotenciais e de fluxo.

Para o traçado dessa rede torna-se fundamental a determinação da Linha Freática e suas particularidades que passaremos a expor nos próximos itens.



11. CONDIÇÕES GERAIS DE ENTRADA E SAÍDA DA FREÁTICA NO MACIÇO DE TERRA

11.1 - Condições de Entrada

A freática é uma linha de fluxo e a linha 1 - 2 (figura 15) é uma equipotencial, então a linha freática deve entrar no maciço formando  $90^\circ$  com a superfície 1 - 2.

Então, para os diversos taludes de montante:

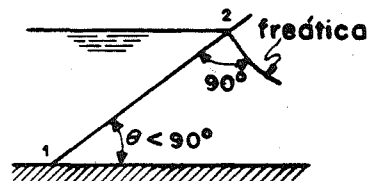


Figura 17 - Condições de entrada da freática para talude de montante inclinado de um ângulo  $\theta < 90^\circ$

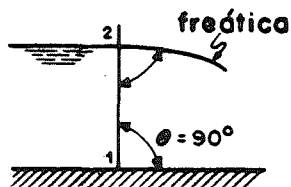


Figura 18 - Condições de entrada da freática para o talude de montante inclinado de um ângulo  $\theta = 90^\circ$

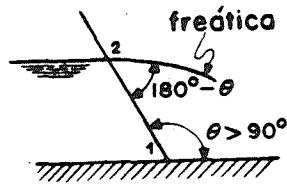


Figura 19 - Condições de entrada da freática para talude de montante inclinado de um ângulo  $\theta > 90^\circ$

Naturalmente a última condição, com o talude invertido da figura 19, a freática formará com o talude um ângulo menor que  $90^\circ$ , porque para ser perpendicular ao talude, a freática precisaria adquirir uma energia maior que a que tem, o que é um contra senso.

#### 11.2 - Condições de Saída

Com considerações baseadas nas propriedades de uma Rede de Percolação (Forchheimer) as condições de saída da linha Freática (Anexo 1), são:

Se o talude de jusante é inclinado de um ângulo menor ou igual a  $90^\circ$ , a linha de percolação deve ser tangente ao talude.

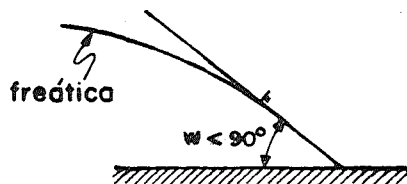


Figura 20 - Condições de saída da freática para talude de jusante inclinado de um ângulo  $\omega < 90^\circ$

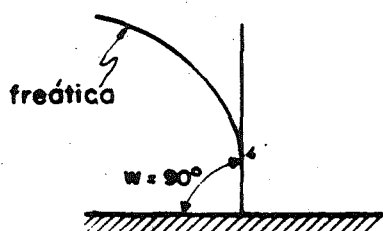


Figura 21 - Condições de saída da freática para talude de jusante inclinado de um ângulo  $\omega = 90^{\circ}$

Se a face de saída, no talude jusante é inclinada de um ângulo maior que  $90^{\circ}$ , a linha freática, para manter as perdas  $\Delta h = \text{cte}$  (propriedade da rede), deverá ser tangente a vertical pelo ponto de saída.

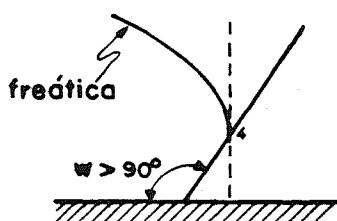


Figura 22 - Condições de saída da freática para talude de jusante inclinado de um ângulo  $\omega > 90^{\circ}$

## 12. TRAÇADO DA LINHA FREÁTICA

O problema da determinação da posição da linha freática de um maciço, cuja solução agora se inicia, cai no grupo dos fluxos denominados não confinados, porque a região de fluxo, não está completamente determinada a priori, a fronteira que falta é precisamente a linha freática, que corresponde a uma superfície submetida a pressão atmosférica. O outro tipo de problema de fluxo em que todas as fronteiras da região são conhecidas a priori, se chama fluxo confinado.

Dupuit, em 1863, estabeleceu as primeiras bases para a solução de fluxos não confinados e mais tarde, pesquisadores como Schaffernack, Van Iterson (1916 e 1917) e Leo Casagrande (1932) estudaram o traçado da freática para pequenas inclinações dos taludes  $\omega < 60^\circ$ ; Kozeny (1931), fez estudos rigorosos para  $\omega = 180^\circ$ , ou seja, maciços com filtros ao pé de jusante. Arthur Casagrande, resumiu, em um artigo de 1937, todos esses estudos e recomendou uma metodologia usada até os dias de hoje. Desses métodos serão vistos aqui os resultados obtidos e suas aplicações.

12.1 - Solução de Kozeny para o traçado da freática com superfície horizontal de saída ( $\omega = 180^\circ$ )

O professor Kozeny, propôs uma solução rigorosa para o problema bi-dimensional de fluxo sobre uma superfície horizontal impermeável, que termina em uma superfície horizontal permeável, como ilustrado na figura 23.

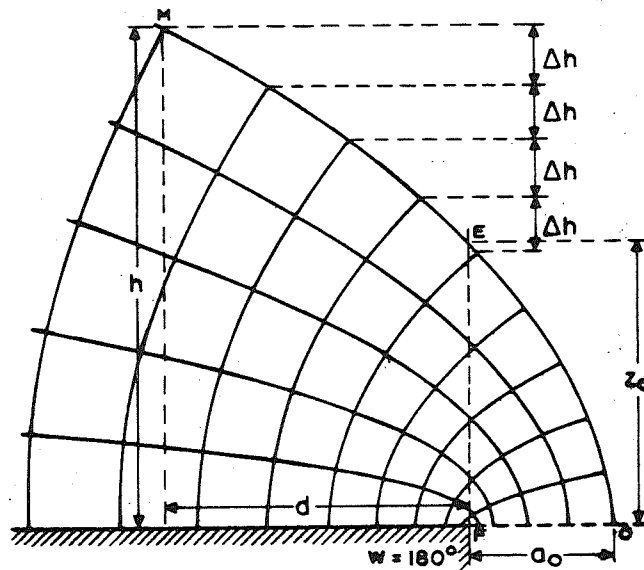


Figura 23 - Solução teórica de Kozeny de uma Rede de Fluxo, para maciço com filtro horizontal a jusante.

Esse tipo de problema é por exemplo o caso de um maciço de terra com filtro horizontal a jusante, como ilustrado na figura 24.

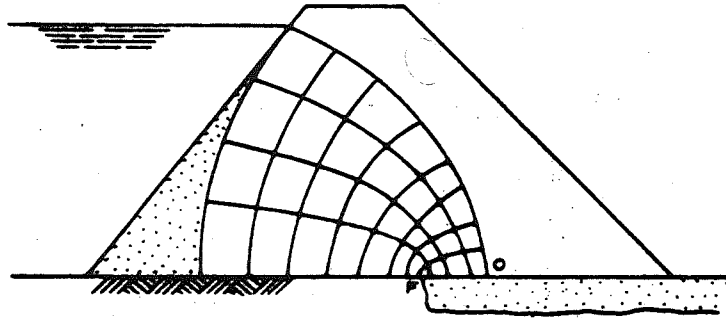


Figura 24 - Rede de Fluxo com linhas equipotenciais e de fluxo confocais no ponto F.

A solução teórica de Kozeny admite para as linhas de fluxo e as linhas equipotenciais, duas famílias de parábolas confocais, com o ponto F, onde as seções permeáveis e impermeáveis se encontram como foco.

A equação para a linha freática pode ser convenientemente expressa pela fórmula:

$$x = \frac{z^2 - z_0^2}{2 z_0}$$

Onde x e z são as coordenadas com o foco como origem e  $z_0$  é a ordenada do ponto E, onde  $x = 0$ , figura 23.

Se a linha freática tem um ponto (M) conhecido de coordenadas d e h, então a distância focal  $a_0$  e a ordenada  $z_0$  podem ser calculadas pela equação

$$a_0 = \frac{z_0}{2} = \frac{1}{2} (\sqrt{d^2 + h^2} - d)$$

Conhecidos os pontos M e F respectivamente, um ponto da linha freática e o foco, essa linha limite fica determinada. É na verdade interessante que o problema de fluxo com uma superfície horizontal de saída tenha essa solução matemática viável, não só pelo fato de que os maciços tem esse sistema de drenagem bastante comum, mas também porque essa solução permitiu posteriormente soluções coerentes e seguras para taludes de jusante com saídas não horizontais. A parábola de Kozeny é frequentemente denominada Parábola Básica.

## 12.2 - Traçado da Parábola Básica

Como a solução de Kozeny foi posteriormente adaptada a outros problemas, tendo como base a Parábola Básica, vejamos agora dois processos gráficos para traçar uma parábola, conhecidos um ponto dela (M) e seu foco F.

A parábola é uma curva que define o lugar geométrico dos pontos que equidistam de uma reta denominada diretriz e de um ponto denominado foco.

### Processo 1

São dados os 2 pontos da parábola, M e F, na figura 25.

A horizontal passando por F determina o eixo x.

O ponto M é equidistante de N e F e se encontra horizontal que passa por N.

A vertical por N é a diretriz, d, da parábola.

A origem O da parábola, se encontra a meia distância de F e d, no eixo x.

Ao longo da reta  $\overline{MN}$ , determinam-se arbitrariamente pontos  $D_1, D_2, D_3$  etc e por eles são traçadas verticais  $d_1, d_2, d_3$ , etc. Os pontos da parábola 1, 2, 3, etc, são determinados tomando-se as distâncias  $\overline{ND_1}, \overline{ND_2}, \overline{ND_3}$ , etc, e marcando-as respectivamente nas verticais  $d_1, d_2, d_3$ , etc a partir do ponto F.

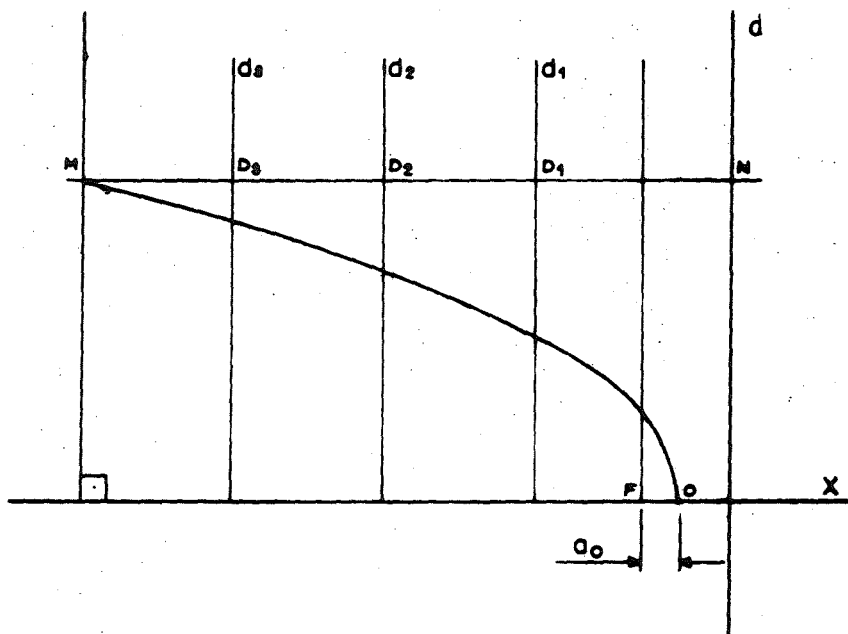


Figura 25 - Processo 1 para traçar uma parábola conhecidos um ponto M e o foco F.

Ou seja

$$\begin{aligned} \overline{F1} &= \overline{ND1} \\ \overline{F2} &= \overline{ND2} \\ \overline{F3} &= \overline{ND3} \\ &\text{etc} \end{aligned}$$

Processo 2

A figura 26 ilustra outro processo para traçar uma parábola conhecidos o foco F, e um ponto M.

Os pontos N e a reta d são determinados pela mesma maneira já descritas no Processo 1. O ponto O, a origem da parábola, idem.

Por O pode-se traçar uma vertical até cortar a horizontal que contém M.

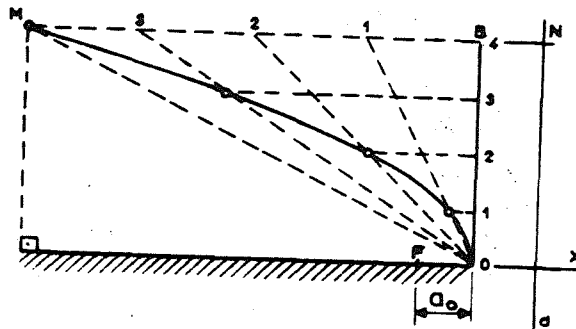


Figura 26 - Processo 2 para traçar uma parábola conhecidos um ponto M e o foco F.

O segmento  $\overline{OB}$  se divide em um número de partes iguais e o segmento  $\overline{MB}$  se divide também no mesmo número de partes iguais (4 na figura). Agora dever-se-á traçar por O, retas que unam este ponto com as divisões feitas no segmento  $\overline{MB}$ . Pelas divisões traçadas sobre  $\overline{OB}$  deve-se traçar horizontais que interceptam o feixe de retas que saem de O, precisamente com a correspondência deduzida da figura 26. As intersecções dessas retas entre si, são pontos da parábola, correspondente ao ponto M e ao foco F utilizados.

As demonstrações desses dois métodos para traçado da parábola, baseiam-se em propriedades dessa curva e podem ser vistos nos textos do assunto.

### 12.3 - Solução de Arthur Casagrande para o Traçado da Linha Freática

Arthur Casagrande, em 1937, analisando não sô resultados experimentais como soluções matemáticas, propôs um método prático para determinação da linha freática em maciços permeáveis, úteis para os casos onde o ângulo  $\omega$ , do elemento de saída está compreendido entre  $30^\circ$  e  $180^\circ$ . Sua solução consiste em essência, em adotar como primeira aproximação para a forma da



freática, a parábola básica de Kozeny, e corrigir numa etapa seguinte, a entrada e a saída, a fim de que a linha de fluxo limite da rede satisfaça condições teórico-práticas.

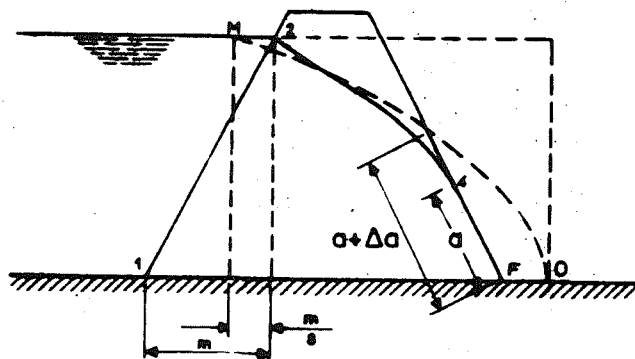


Figura 27 - Correções de entrada e saída da linha freática a partir da parábola básica para o ângulo de saída  $30^{\circ} < \omega < 180^{\circ}$

Dado um maciço permeável, como o da figura 27, com o talude de jusante formando um ângulo  $\omega$  compreendido entre  $30^{\circ}$  e  $180^{\circ}$ , traça-se a parábola básica por qualquer um dos processos vistos, tendo como foco o ponto limite de saída do fluxo que será nesse caso, o pé do talude de jusante; o ponto M da parábola, é obtido dividindo-se a distância m (figura 27), projeção horizontal da distância 1 - 2 do talude de montante, em três partes iguais.

Uma vez determinada a parábola básica, esta será como se pode perceber uma linha guia para o traçado da freática.

A linha de fluxo limite da Rede de Percolação, como já se viu deverá entrar na zona permeável formando um ângulo reto com a equipotencial limite 1 - 2 (item 11.1). Sendo

assim a concordância da parábola para a freática do ponto M para o ponto 2 é feita a sentimento e por tentativas de traçado da Rede subsequente (note-se a interdependência) saindo a freática, normal ao talude montante, como na figura 27.

A correção seguinte diz respeito ao talude de jusante, ou seja: determinar a posição do ponto 4.

Comparando uma série de Redes de Fluxo com a solução teórica de Kozeny, Arthur Casagrande obteve uma correlação entre a parábola básica e a freática, e o ângulo de inclinação  $\omega$  do talude de jusante.

Sendo  $a$  a distância  $\overline{F4}$ , figura 27, entre o foco e a intersecção do talude com a freática e  $a'$  a distância entre o foco F e a intersecção do talude com a Parábola Básica de forma que  $a' = a + \Delta a$ , essas distâncias podem ser correlacionadas com o ângulo  $\omega$ , no ábaco da figura 28.

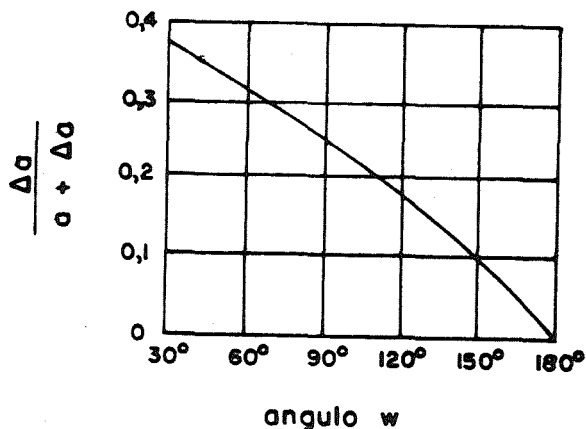


Figura 28 - Correlação de A. Casagrande, para obtenção do ponto de saída da Linha Freática.

De forma que, conhecida a parábola básica e o ângulo  $\omega$ , conhece-se  $a'$  e o ângulo  $\omega$ , pelo ábaco determina-se  $\Delta a$  e no próprio desenho determina-se o ponto 4.

Os ajustes finais são feitos a sentimento. Deve-se observar que o valor  $\frac{\Delta a}{a + \Delta a} = \frac{\Delta a}{a'}$  decresce quando  $\omega$  cresce

ou seja  $\Delta a = 0$  quando  $\omega = 180^\circ$ .

Algumas das diferentes condições de saída, isto é, de localização do foco  $F$ , e de valores do ângulo  $\omega$  são ilustradas a seguir na figura 29.

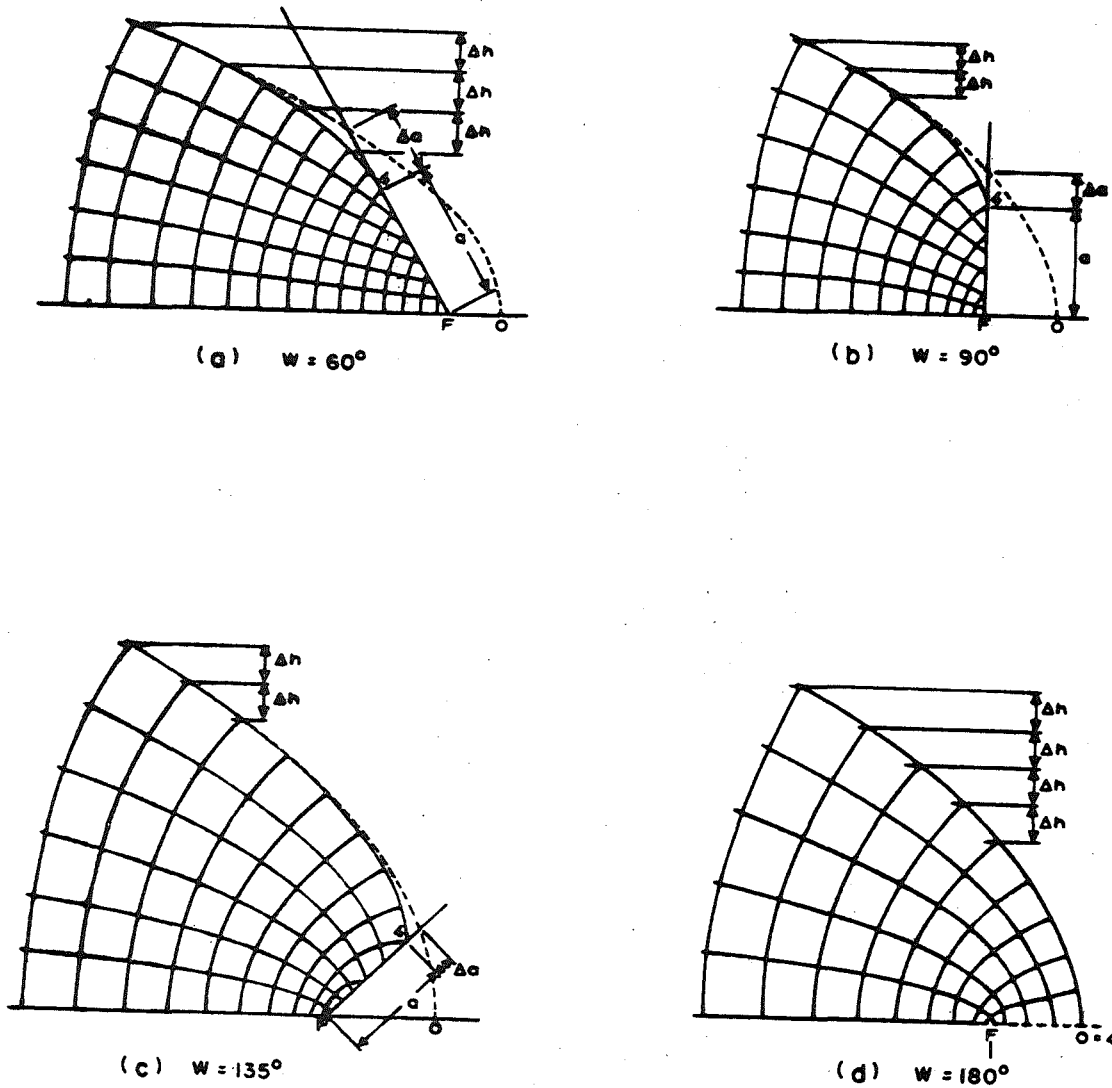


Figura 29 - Diversas condições de saída da linha freática e redes esquematicamente traçadas.

Observar que essas condições limites estão condicionadas ao tipo de proteção ou filtro dada ao talude de jusante. Esse elemento, como já foi dito, tem como finalidade dar fluxo

rápido a água de percolação aliviando as pressões neutras.

Localizada a linha de fluxo limite, o próximo passo será traçar a Rede de Percolação com linhas equipotenciais e de fluxo, obedecendo às mesmas leis e recomendações já vistas.

As equipotenciais poderão ser facilmente localizadas se as perdas de carga ao longo da freática forem determinadas apenas como perdas de carga altimétricas (seção 10 - figura 16).

A figura 30a ilustra o traçado de uma rede e a 30b uma rede já traçada.

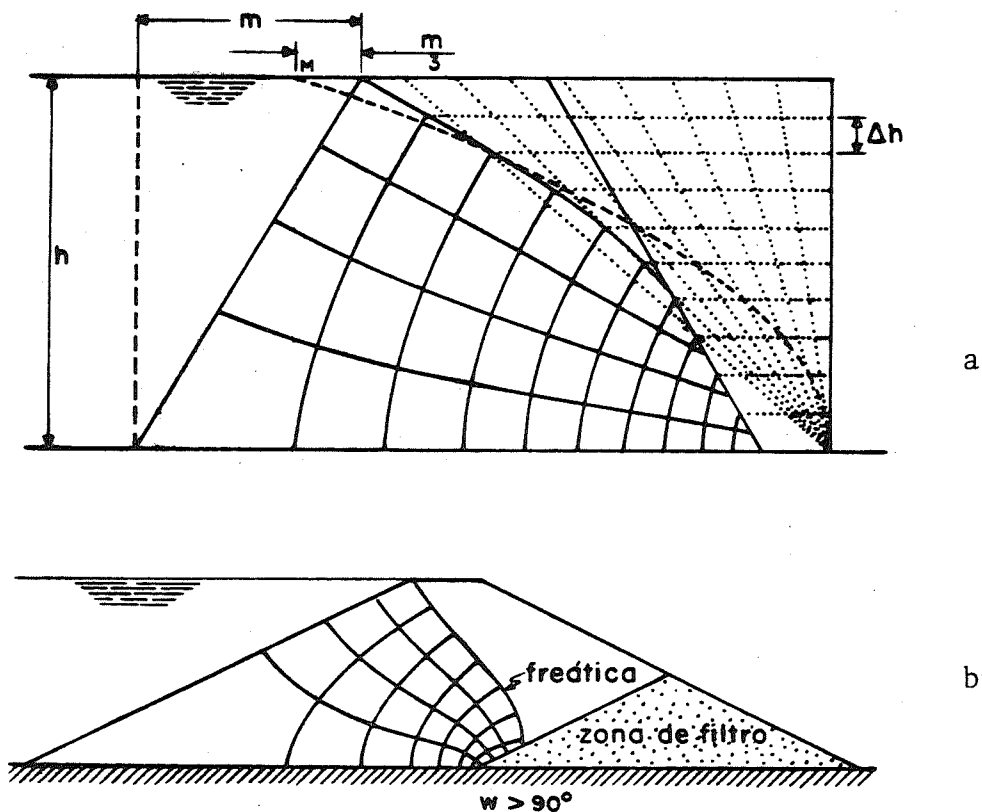


Figura 30. - a - Esquema de construção de uma rede  
b - Rede de Fluxo traçada.

Observar que o filtro horizontal funciona como uma equipotencial limite, de carga nula.

Para calcular a vazão perdida através do maciço, o procedimento é o mesmo que para a vazão perdida em uma fundação permeável. Portanto,

$$Q = K \cdot \frac{h}{n_e} \cdot n_f = K \cdot h \cdot F$$

A avaliação do fator de forma  $F$ , pode levantar dúvidas, pois o valor de  $n_e$  pode ser diferente se as perdas de carga forem contadas sobre a freática ou sobre a superfície impermeável horizontal (fronteira inferior da região de fluxo). Essa aparente ambiguidade na realidade não existe se se considerar que na fórmula da vazão,  $h = \Delta h \cdot n_e$ , é a perda de carga total, conseqüentemente  $n_e$  será sempre o mesmo se determinado pelo número de vezes que  $\Delta h$  coube em  $h$ , ou seja, o número de perdas altimétricas devem ser contadas na vertical, pois esses foram pontos usados efetivamente para o traçado da Rede e eventualmente camuflados pela geometria do maciço.

O cálculo das pressões piezométricas no maciço se faz de forma absolutamente análoga ao das pressões em uma fundação permeável.

Sendo assim seja a figura 31, onde se considera um maciço, cuja rede de fluxo aparece parcialmente desenhada onde pode-se calcular as pressões neutras.

Suponha-se que se deseja a carga piezométrica no ponto A ( $u_A/\gamma_w$ ). Se por esse ponto se desenha a equipotencial que lhe corresponde, essa linha sai na freática (no caso coincidente com o talude) em B. Os pontos A e B, pertencem à mesma equipotencial e tem portanto a mesma carga total  $H_i = u_i/\gamma_w + z_i$ .

Passando-se um R.N. em qualquer horizontal essas cargas totais serão respectivamente:

$$H_A = \frac{u_A}{\gamma_w} + z_A$$

$$H_B = \frac{u_B}{\gamma_w} + z_B$$

$$H_A = H_B = \frac{u_A}{\gamma\omega} + z_A = \frac{u_B}{\gamma\omega} + z_B$$

Mas o ponto B pertence a freática, portanto  $\frac{u_B}{\gamma\omega} = 0$

Logo a pressão piezométrica de A será:

$$\frac{u_A}{\gamma\omega} = z_B - z_A$$

Ou seja, a diferença de cotas entre os pontos A e B ou a diferença de cargas altimétricas entre os dois pontos, é a pressão piezométrica do ponto A.

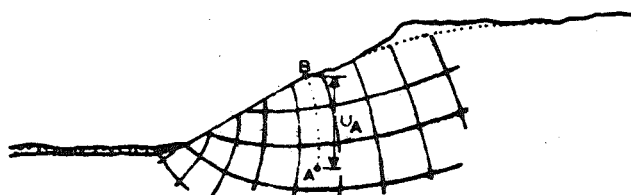


Figura 31 - Cálculo das pressões neutras nos maciços permeáveis, a partir da rede de fluxo traçada.

Logo a pressão neutra em A pode ser calculada em  $t/m^2$ , como se vê na figura 31, medindo-se a distância vertical entre A e B.

### 13. REDE DE PERCOLAÇÃO EM MACIÇOS E FUNDAÇÕES PERMEÁVEIS

Até agora, as regras básicas para o traçado de uma Rede de Fluxo, permaneceram as mesmas tanto para fundações permeáveis como para maciços permeáveis, notando-se as modificações (como havia sido destacado desde o princípio) nas condições limites

ou de borda.

Também tratou-se até o momento de solos homogêneos e isotrópicos.

Antes de passarmos para o estudo das condições anisotrópicas e heterogêneas, vejamos a condição de maciços e fundações permeáveis simultaneamente.

Confirmando ainda os conceitos iniciais, a dificuldade (além é evidente do traçado da rede em si), será encontrar as condições limites em cada caso.

A partir das condições limites, o procedimento segue absolutamente semelhante as regras já vistas, isto é, tentar construir uma Rede de Quadrados constituídos por linhas equipotenciais e linhas de fluxo. A título de ilustração sejam os dois problemas apresentados na figura 32 a e b

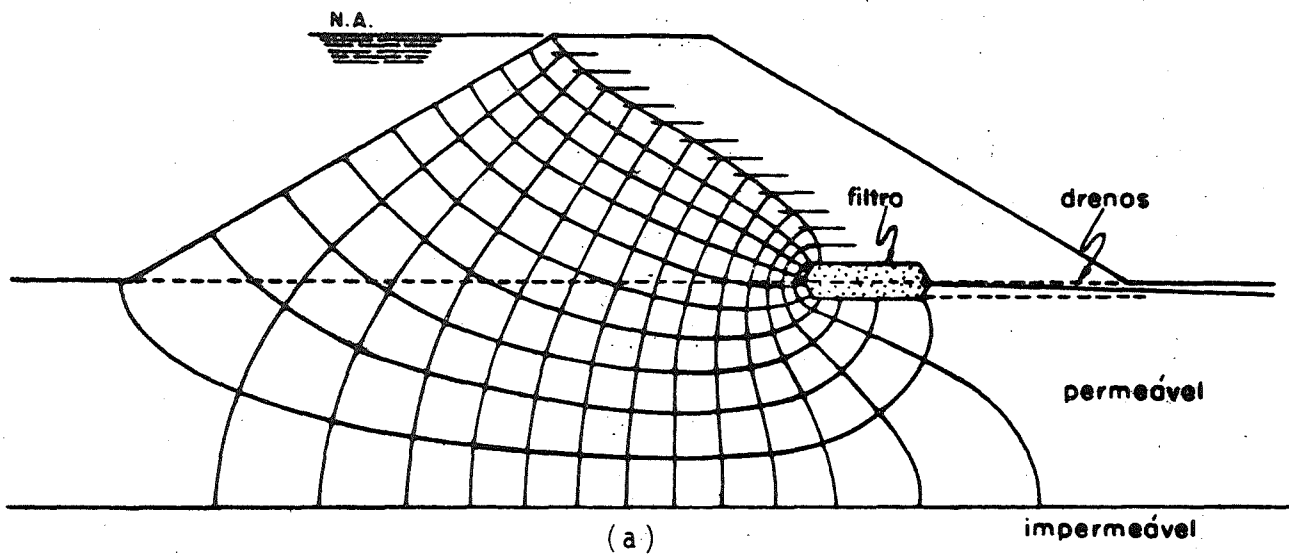


Figura 32 -

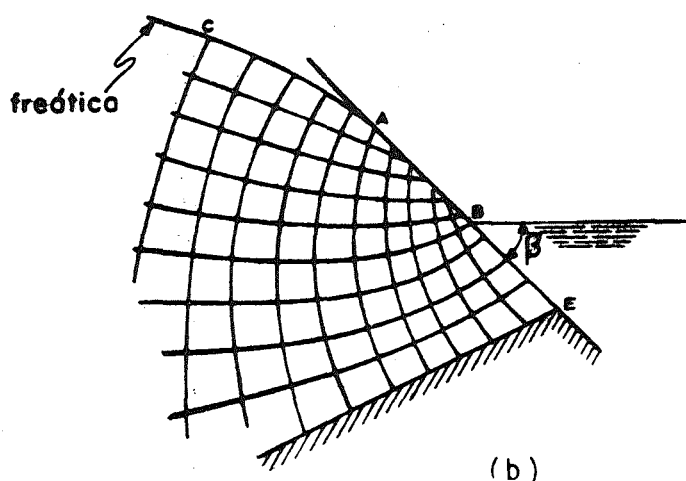


Figura 32 - a - Traçado de uma Rede de Fluxo em maciço e fundação homogêneos e isotrópicos; b - Traçado de uma Rede de Percolação com lençol de água a jusante.

Na figura 32a tem-se um maciço sobre uma fundação permeável de material com propriedades de homogeneidade e isotropia.

A determinação da freática segue as regras básicas já vistas, e é sobre elas que são determinadas as perdas de carga  $\Delta h$ .

Outra linha de fluxo limite será na fundação, limite entre o material permeável e impermeável.

As equipotenciais limites serão o talude de montante e o filtro a jusante.

O fator de forma  $F = n_f/n_e$  não implica em maiores dificuldades se calcularmos as perdas de carga ao longo da vertical onde foram determinadas para o traçado da rede.

No caso de existir um lençol de água no talude de jusante, como na figura 32b, deve-se levar em conta que a parte submersa do talude é uma linha equipotencial e portanto, as linhas de fluxo da rede sairão normais a ela. A linha freática, tangente ao talude, terá seu ponto de saída na linha AB, e as linhas de fluxo da rede sairão com inclinações variáveis de 0 a 90°. A linha AB, não é nem de fluxo nem equipotencial; é uma superfície livre onde seus pontos estão sob pressão atmos-



férica e pressão neutra nula, cumprir-se-á assim a condição de igualdade de perda de carga  $\Delta h$  entre as equipotenciais sucessivas que a cortam (item 9, seção 6).

Para o cálculo da vazão perdida,  $Q = K \cdot h \cdot f$  - também nesse caso, o valor  $n_e$  ( $F = n_f/n_e$ ) deve ser avaliado contando-se as quedas de potencial ao longo da fronteira impermeável que limita inferiormente a região.

#### 14. TEORIA DA SEÇÃO TRANSFORMADA

Todas as idéias expostas, até o momento sobre a forma da freática, supuseram mais ou menos implicitamente que a região de fluxo é homogênea e isotrópica. Se a região é anisotrópica, isso implica que as permeabilidades nas direções horizontal e vertical são diferentes e a Equação de Laplace ou de Continuidade.

$$K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

será a representação matemática do fluxo dos meios permeáveis.

Para resolver esse problema novamente de forma gráfica, lança-se mão da teoria da Seção Transformada que transforma uma das coordenadas do problema e modifica as dimensões da zona de fluxo, permitindo a solução de Rede formada por quadrados.

A anisotropia é comum não só nas fundações onde a estrutura vertical é diferente da horizontal, por causas naturais ou não, como nos maciços de solo compactado por máquinas, onde a permeabilidade na direção horizontal é maior do que na vertical.

Tanto nos maciços como nas fundações a solução do problema como em toda teoria de fluxo é a mesma, sendo assim considere - mos as seções apresentadas na figura 34 onde  $K_x \neq K_z$ .

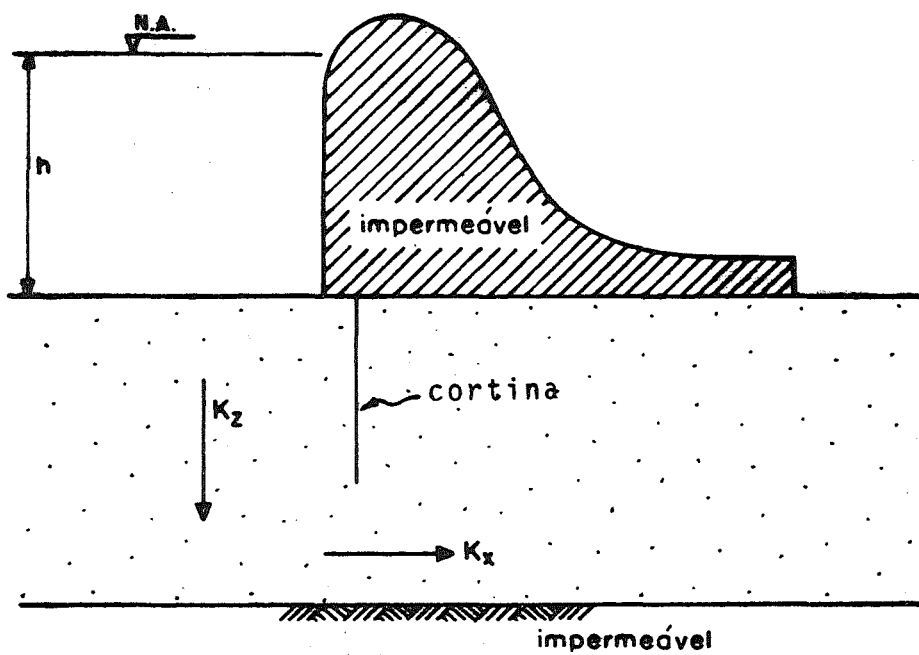
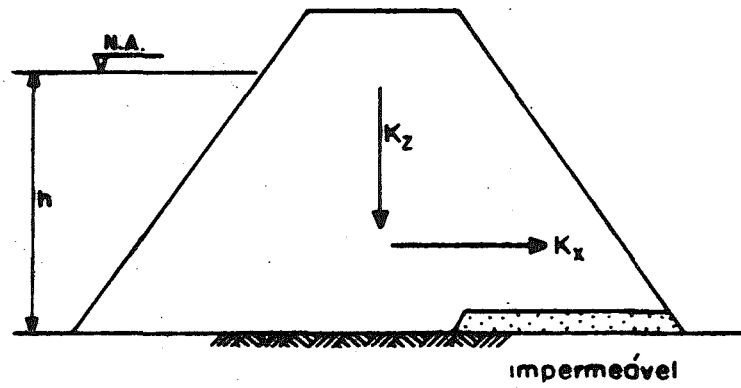


Figura 33 - Maciço e fundação constituídos de materiais permeáveis anisótopos.

A região de fluxo é submetida a uma transformação de coordenadas na qual a ordenada  $z$  se transforma em outra  $z'$ , tal que

$$z' = \sqrt{\frac{K_x}{K_z}} z$$

Então

$$dz' = \sqrt{\frac{K_x}{K_z}} dz$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial z'} \cdot \frac{dz'}{dz} = \sqrt{\frac{K_x}{K_z}} \cdot \frac{\partial h}{\partial z'}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{K_x}{K_z} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial z'^2}$$

A equação geral do fluxo a duas dimensões dada por:

$$K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad \text{ou}$$

$$\frac{K_x}{K_z} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

Poderá transformar-se em:

$$\frac{K_x}{K_z} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{K_x}{K_z} \frac{\partial^2 h}{\partial z'^2} = 0$$

Ou

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z'^2} = 0$$

Então a transformação de coordenadas permite que a condição de anisotropia volte para o caso isotrópico.

Essa transformação deve ser levada para a Seção em estudo, para que as leis que regem o traçado da Rede de Fluxo possam ser aplicadas.

Após o traçado da Rede de Quadrados deve-se voltar a situação real, transportando os pontos de intersecção equipotencial linha de fluxo às suas coordenadas reais.

Na figura 34 e 35 são apresentados exemplos de redes traçadas em coordenadas transformadas e depois retornadas à sua condição real.

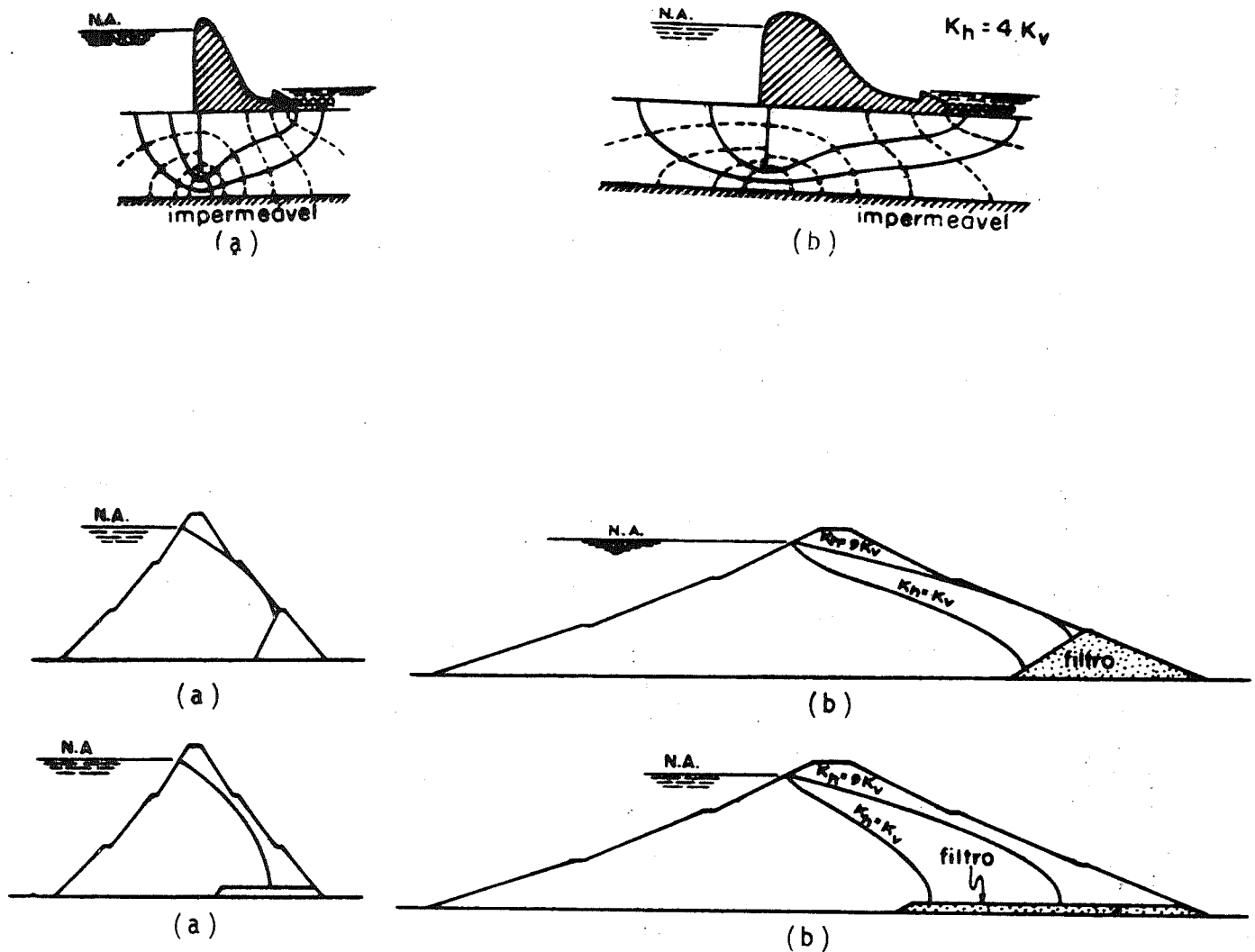


Figura 34 -

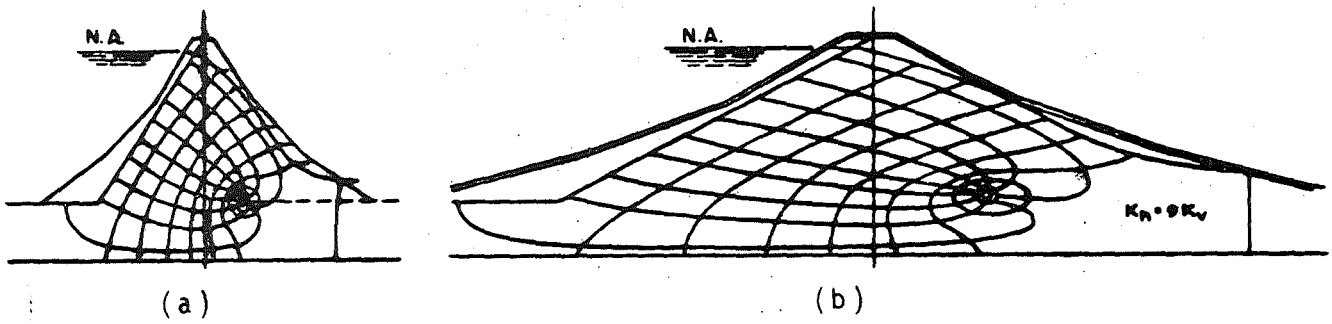


Figura 34 - Aspectos das Redes de Fluxo e da Linha Freática em meios anisótropos. a - Seções transformadas para traçar a rede em elementos quadrados; b - Seções Reais - comportamento real do fluxo.

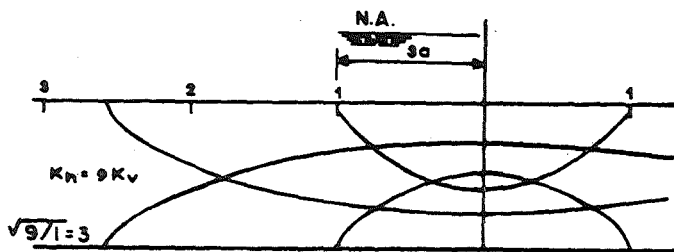
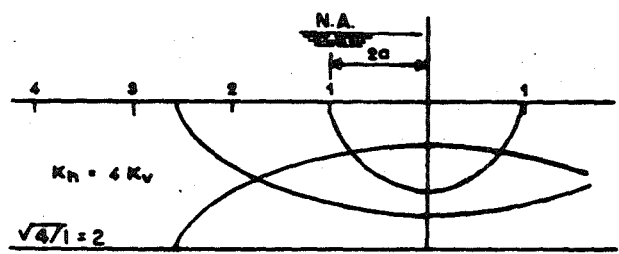
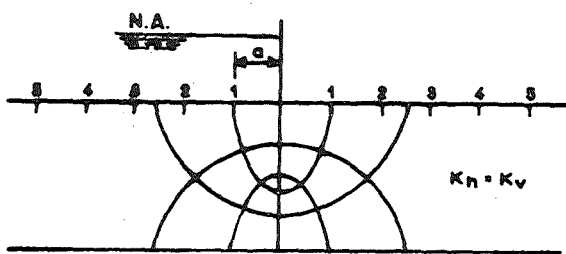


Figura 35 -

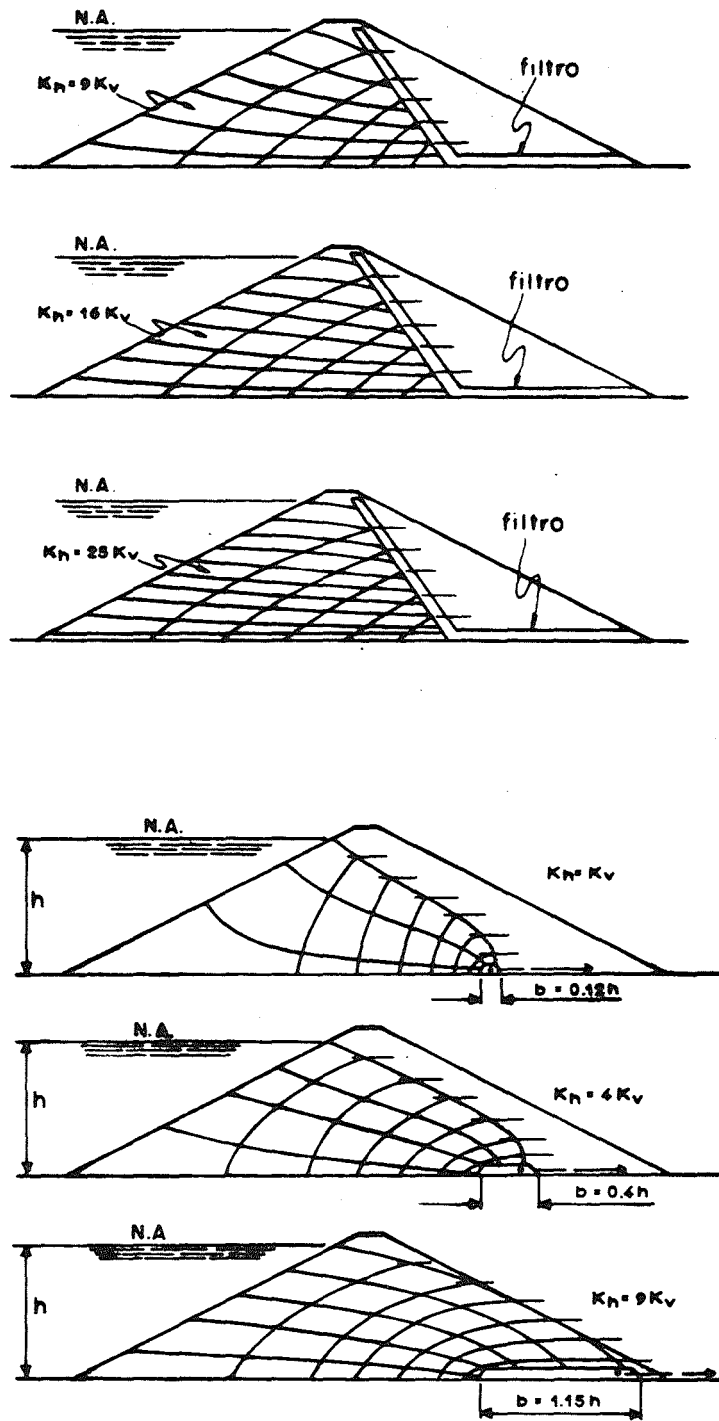


Figura 35 - Aspectos de Redes de Fluxo em meios anisôtipos.

O cálculo da vazão perdida nesses casos deve ser feita considerando-se uma permeabilidade equivalente determinada em função das permeabilidades reais.

Sendo assim, considerando-se o elemento da figura 36

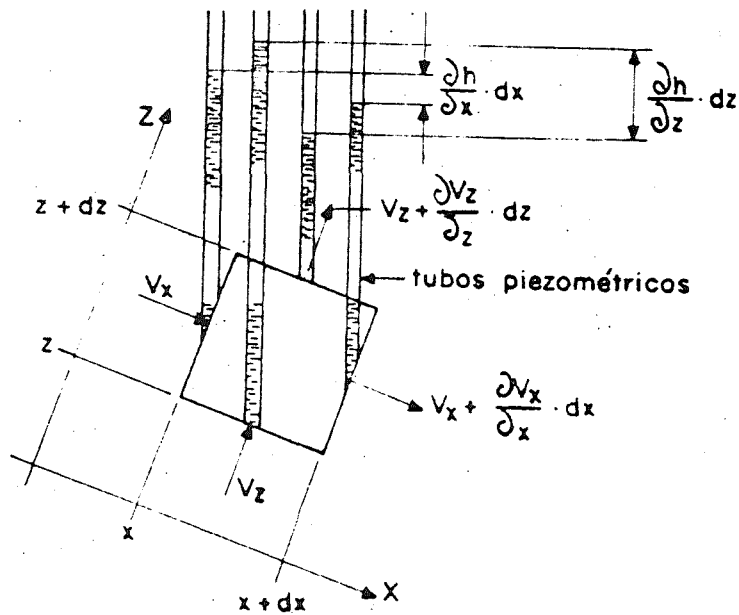


Figura 36 - Cálculo da vazão para fluxo bidimensional.

A vazão através do elemento será dada por:

$$d_q = V_x d_y d_z + V_z d_x d_y \quad \text{ou}$$

$$d_q = K_x \frac{\partial h}{\partial x} d_y d_z + K_z \frac{\partial h}{\partial z} d_x d_y$$

Para meios isotrópicos  $K_x = K_z = K$

$$d_q = K \left( \frac{\partial h}{\partial x} d_y d_z + \frac{\partial h}{\partial z} d_x d_y \right) \quad (I)$$

Para meios anisôtipos  $K_x \neq K_z$ , mas podemos fazer

$$z' = z \sqrt{\frac{K_x}{K_z}} \quad \text{e portanto}$$

$$d_q = K_x \frac{\partial h}{\partial x} d_y \frac{dz'}{\sqrt{\frac{K_x}{K_z}}} + K_z \frac{\partial h}{\partial z'} \sqrt{\frac{K_x}{K_z}} d_x d_y$$

Ou

$$d_q = \sqrt{K_x K_y} \left( \frac{\partial h}{\partial x} dz' dy + \frac{\partial h}{\partial z'} d_x d_y \right) \quad (II)$$

As equações I e II se referem a mesma vazão, de uma seção num meio transformado, por coordenadas, em isôtipico. Comparando as duas ver-se-á que a permeabilidade equivalente do meio isôtipico resultante é uma combinação das permeabilidades diferentes do meio anisôtipico. Isto é

$$K = \sqrt{K_x K_y}$$

Para calcular a vazão perdida através de uma Rede de Percolação traçada numa seção transformada a equação

$$Q = K \cdot h \cdot F$$

deverá considerar  $K = \sqrt{K_v K_h}$  e o fator de forma  $F = n_f/n_e$  será determinado tanto na Rede de quadrados como na Rede real uma vez que o número de perdas de carga  $n_e$ , e o número de canais de fluxo  $n_f$ , serão os mesmos em qualquer condição.

Observe-se que todo o raciocínio exposto é válido para

$$x' = x \sqrt{\frac{K_z}{K_x}}$$

Ou seja, a transformação de escala, é um recurso útil em qual quer dos eixos.



## 15. FLUXO DE ÁGUA ATRAVÉS DE SEÇÕES NÃO HOMOGENEAS

Quando se depara com fundações formadas por estratificações, ou o maciço é constituído por um núcleo de material bastante diferente dos taludes, onde os coeficientes de permeabilidade não são iguais, o problema do traçado da Rede de Fluxo toma aspectos especiais que devem ser considerados com cuidado.

### 15.1 - Condição Geral de Transferência das Linhas de Fluxo devido a Mudança de Coeficiente de Permeabilidade

As linhas de fluxo sofrem uma deflexão na fronteira entre dois solos de diferentes permeabilidades. Nessa mudança de curso entretanto devem ser mantidas as propriedades gerais de percolação, isto é, igualdade de vazão e perda de carga.

Seja a figura 37, limite entre dois meios isotropos e homogeneos, em si.

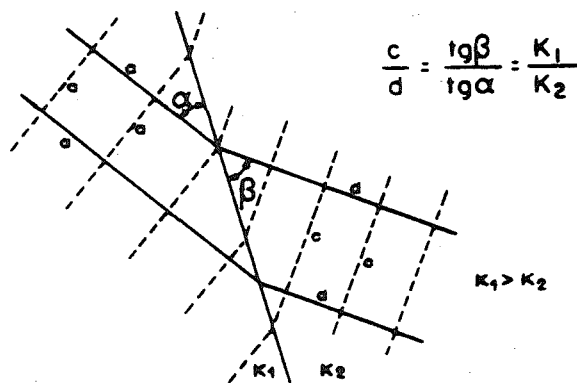


Figura 37 - Condições de Transferência das Linhas de Fluxo entre meios de diferentes permeabilidades  $K_1 > K_2$ .

A Rede de Fluxo foi desenhada em quadrados para o material  $\bar{a}$  esquerda, sendo  $q$  a vazão entre duas linhas de fluxo sucessivas e  $\Delta h$  a perda de carga entre duas equipotenciais sucessivas, teremos:

$$q = K_1 \cdot a \cdot \frac{\Delta h}{a} \cdot 1 = K_2 \cdot c \cdot \frac{\Delta h}{d} \quad \text{ou}$$

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{c}{d}$$

Mas,

$$\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{c}{\text{sen}\beta} \quad \text{e} \quad \frac{a}{\text{cos}\alpha} = \frac{d}{\text{cos}\beta}$$

Ou seja,

$$\frac{c}{d} = \frac{\text{tg}\beta}{\text{tg}\alpha} = \frac{K_1}{K_2}$$

A deflexão das linhas de fluxo são tais que as tangentes dos ângulos de intersecção com a fronteira são inversamente proporcionais aos coeficientes de permeabilidade. Essa lei é semelhante à lei de refração da luz.

Também justifica-se o procedimento do traçado da rede nos meios 1 (formada por quadrados) e 2 (formada por retângulos). Isto é, se se passa de um meio para outro, a razão entre os lados dos elementos será igual à razão entre os coeficientes de permeabilidade; assim, os canais de fluxo são mais largos no meio (2) onde o coeficiente de permeabilidade for menor ( $K_1 > K_2$ ) como na figura 37. Ou os canais de fluxo se estreitam quando se passa de um meio menos permeável (1) para um meio mais permeável (2), ( $K_2 > K_1$ ) como na figura 38, onde pode-se demonstrar a mesma lei de transferência.

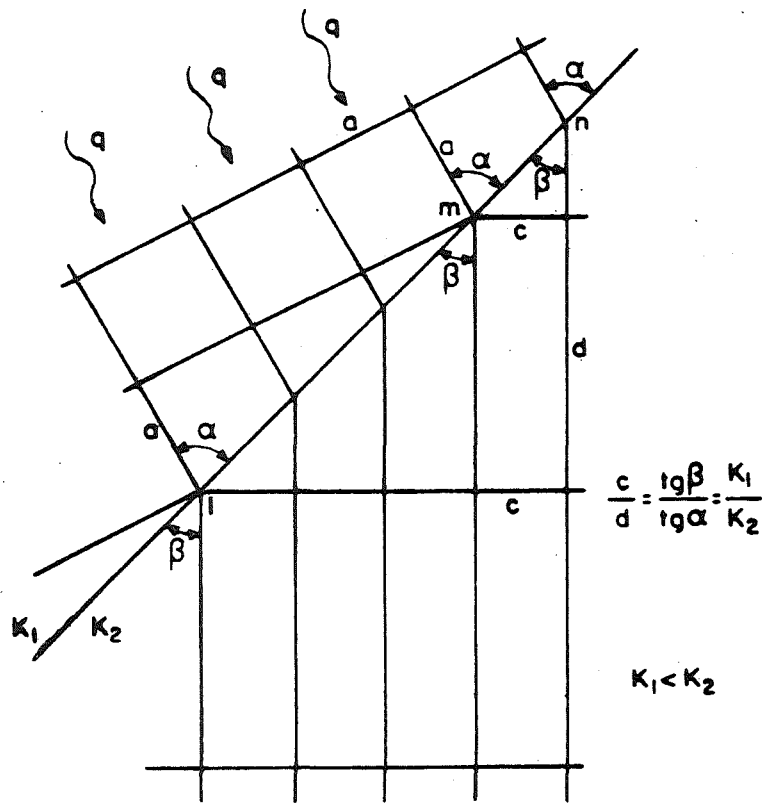


Figura 38 - Condições de Transferência das Linhas de Fluxo entre meios de diferentes permeabilidades  $K_1 < K_2$ .

$$\overline{lm} = \frac{a}{\cos \alpha} = \frac{d}{\cos \beta}$$

$$\overline{mn} = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \beta}$$

$$\frac{c}{d} = \frac{\text{tg} \beta}{\text{tg} \alpha} = \frac{K_1}{K_2}$$

15.2 - Condições Particulares de Transferência das Linhas de Fluxo de Fluxo

Fazendo uso das propriedades gerais das Redes de Fluxo e da condição geral de transferência das linhas de fluxo, Arthur Casagrande analisou (Anexo 2) os casos da figura 39.

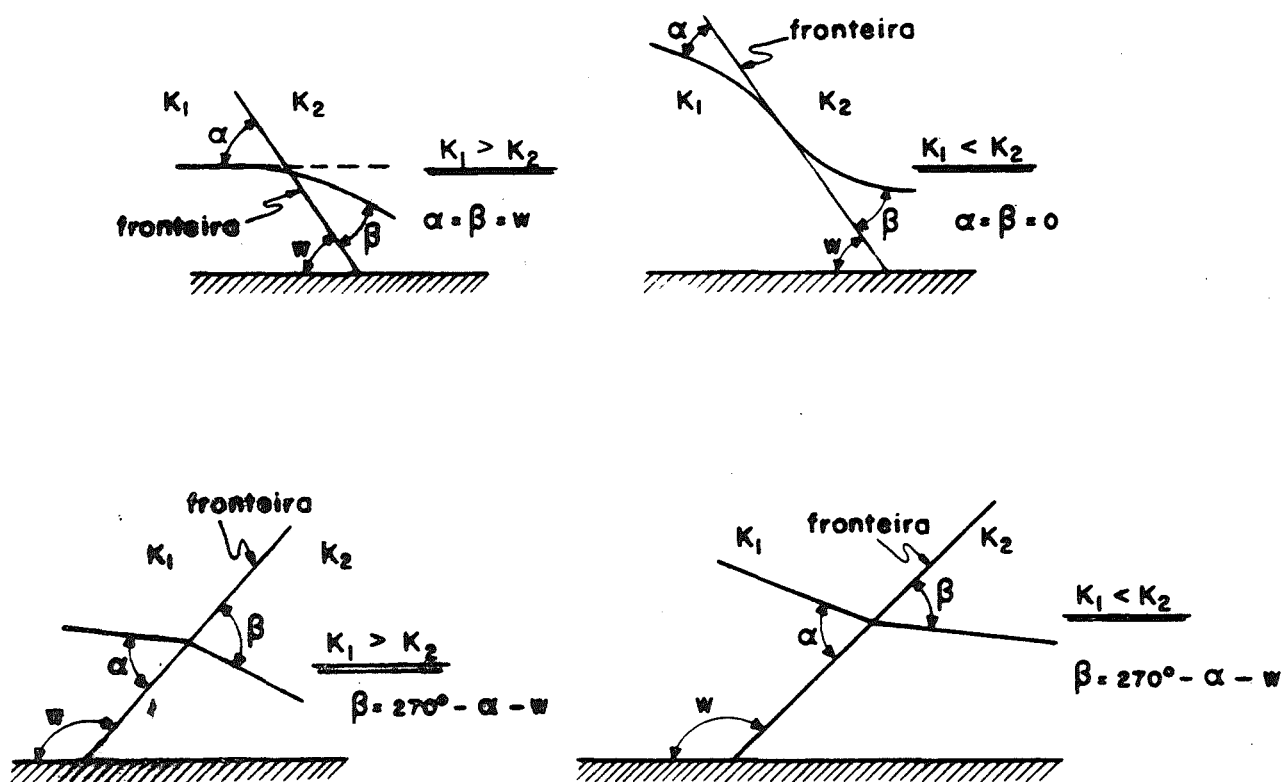


Figura 39 - Diversas condições de transferência na fronteira de dois meios de permeabilidades diferentes.

Cabe notar que essas condições devem ser observadas principalmente na Linha Freática dos Maciços de Terra, uma vez que essa linha é limite na zona de fluxo.

### 15.3 - Redes de Fluxo em Seções Não Homogêneas

O traçado de Redes de Fluxo é um problema difícil quando se trata de seções homogêneas; para seções não homogêneas o problema além de difícil requer sensibilidade e vivência, além de conhecimento dos princípios de traçado, principalmente nas condições de transferência que foram vistas.

A validade da Lei de Darcy deve ser aceita integralmente e a relação entre permeabilidade na fronteira, também.

Um problema de meios heterogêneos pode admitir mais de uma solução de Rede, como veremos nos diversos exemplos de traçado de redes, não são em fundações permeáveis, como maciços de terra, ou as duas situações simultâneas.

Seja o problema da figura 40.

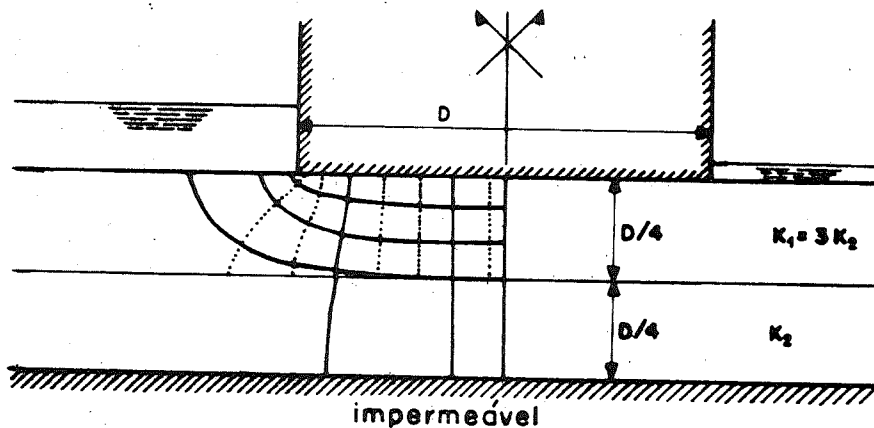


Figura 40 - Rede de Fluxo numa fundação heterogênea.

A fundação da obra é constituída de duas camadas de permeabilidade diferentes  $K_1$  e  $K_2$  tal que  $K_1 = 3 K_2$ .

O problema deve ser resolvido traçando-se a Rede de Fluxo em ambas as camadas. A rede de quadrados traçada na camada 2, apresentará por canal de fluxo, uma vazão tal que:

$$q_2 = K_2 \cdot \Delta h_2 \cdot \frac{a}{b} \quad (a = b)$$

A correspondência da camada 1, para o traçado na camada 2 será tal que

$$q_1 = K_1 \cdot \Delta h_1 \cdot \frac{c}{d}$$

Mantendo a igualdade de vazão e a perda de carga seria para

$$q_1 = q_2, \quad \Delta h_1 = \Delta h_2 \quad \text{e} \quad K_1 = 3 K_2 \quad \text{então} \quad \frac{c}{d} = \frac{1}{3}$$

Fazendo um dos lados do quadrado (o comprimento)  $d = a = b$ , na camada 1, a rede será construída nessa zona por retângulos cuja largura ( $c$ ) será  $\frac{1}{3}$  do comprimento  $d$ .

Ao aumento da permeabilidade  $K_1 > K_2$ , corresponderá uma redução de área para manter as condições de igualdade de vazão e perdas de carga entre os dois meios. Cuidados especiais devem ser tomados nas condições de transferência das linhas de fluxo.

Outro problema semelhante é apresentado na figura 41.

Nesse segundo caso, pode-se buscar uma primeira aproximação considerando na camada 2, uma espessura igual a tres vezes a que tem realmente; a rede traçada nessa zona de fluxo distorcida constitui um bom começo; depois deve-se reduzir de 1 para 3 toda a escala vertical na camada 2, obtendo-se uma rede susceptível de resolver o problema real. As condições de transferência, igualdade de vazão e perda de carga nos meios devem ser observadas.

O cálculo da vazão perdida ao longo da fundação, nesses dois problemas, requer apenas sistematização.

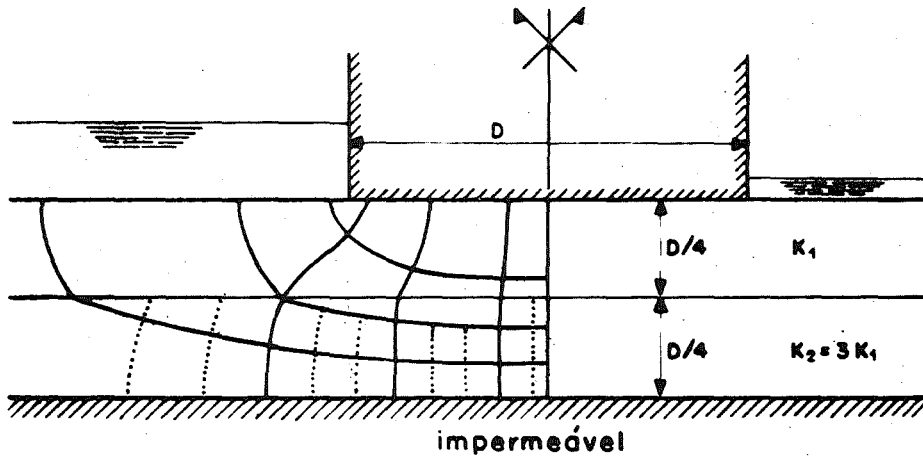


Figura 41 - Rede de Fluxo numa fundação heterogênea.

Ou seja, nos dois exemplos, a vazão perdida total será a soma das vazões perdidas em cada um dos meios:

$$Q = q_1 n_{f1} + q_2 n_{f2}$$

Q é a vazão por metro de comprimento de fundação

No exemplo da figura 40,

$$q_1 = K_1 \cdot \frac{\Delta h}{d} \cdot c \cdot l = K_1 \cdot \frac{h}{n_e} \cdot \frac{1}{3}$$

$q_1$  = vazão perdida em cada canal do meio 1

$$q_2 = K_2 \cdot \Delta h \cdot l = K_2 \cdot \frac{h}{n_e}$$

$q_2$  = vazão perdida em cada canal do meio 2

$n_{f1}$  = nº de canais de fluxo do meio 1

$n_{f2}$  = nº de canais de fluxo do meio 2

$n_e$  = nº de perdas de carga (a mesma nos dois meios) = 5

h = perda de carga total (desnível de água entre montante e jusante).

Esse cálculo também pode ser feito:

$$q_1 = 3 K_2 \cdot \frac{h}{n_e} \cdot \frac{1}{3} = q_2 = q$$

$$Q = q \cdot n_f$$

$$n_f = n^{\circ} \text{ de canais de fluxo dos dois meios, ou da rede de toda} = 4$$

Sendo  $q$  a vazão calculada para o meio onde a rede é realmente de quadrados, isto é, a relação  $\frac{a}{b} = 1$ .

No exemplo da figura 41, ter-se-á então:

$$q = K_1 \cdot \frac{h}{n_e} \quad (n_e = 7)$$

Na figura 42, temos o exemplo de três soluções de Rede de Fluxo para um mesmo maciço constituído essencialmente de dois materiais.

No talude de montante há uma zona de material infinitamente permeável e portanto saturado; o meio 1 é o núcleo do maciço com uma permeabilidade menor ( $K_1$ ) que o material do meio 2 onde  $K_2 = 5 K_1$ .

Na primeira Rede (figura 42a), a solução adotada é semelhante a vista anteriormente, isto é, mantidas as perdas de carga  $\Delta h$  e vazões  $q$ , iguais nos dois meios, um dos meios constituir-se-á de quadrados (meio 1) e a outra de retângulos cujos lados obedecerão a relação entre as permeabilidades.

$$q = K_1 \cdot \Delta h \cdot 1 = K_2 \cdot \frac{\Delta h}{d} \cdot c \cdot 1$$

$$\frac{c}{d} = \frac{K_1}{K_2} = \frac{1}{5}$$

Observar que as linhas tracejadas do meio 2 permitem o traçado mais fácil dos retângulos finais, obedecendo a relação  $d$  (comprimento) =  $5c$  (largura).

O cálculo da vazão perdida nesse caso será:

$$Q = n_{f1} q_1 = n_{f2} q_2$$



$n_{f1} = n_{f2} = n_0$  de canais de fluxo da rede, tanto no meio 1 como no meio 2 = 3,5

$q_1 = q_2 =$  vazão por canal de fluxo nos dois meios

$$q_1 = K_1 \frac{h}{n_e} = K_2 \frac{h}{n_e} \cdot \frac{1}{5}, \quad n_e = 8$$

Logo,

$$q_1 = q_2 = q = K_1 \frac{h}{n_e} \quad (\text{calculada para a Rede de Quadrados})$$

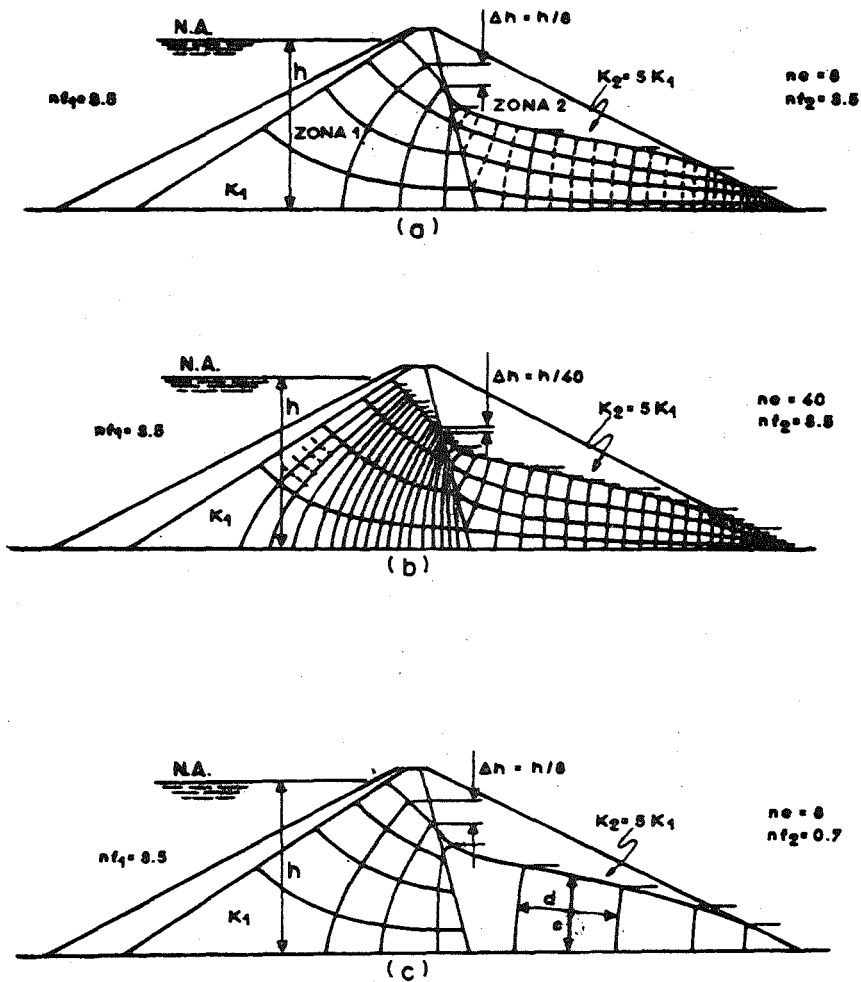


Figura 42 - Redes de Fluxo no mesmo maciço constituído de zonas de permeabilidades diferentes.

Na figura 42b, a solução de Rede de Quadrados foi dada ao meio 2. Sendo assim a transfiguração da rede em retângulos, para que se cumpra as condições de rede, será no meio 1.

$$q_1 = K_1 \cdot \frac{\Delta h}{b} \cdot a \cdot l$$

$$q_2 = K_2 \cdot \Delta h \cdot l$$

$$q_1 = q_2$$

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{b}{a} = \frac{1}{5}$$

Ou seja na rede do meio 1, os elementos terão sua largura (a) igual a 5 vezes o seu comprimento (b).

A Rede traçada com linhas pontilhadas formando quadrados de largura 1/5 do real satisfaz as condições e facilita o traçado.

A vazão perdida total é calculada como:

$$Q = n_{f1} q_1 = n_{f2} q_2 ; n_{f1} = n_{f2} = 3,5$$

$$q_1 = K_1 \frac{\Delta h}{b} a \cdot l = K_1 \Delta h \cdot 5$$

$$q_2 = K_2 \Delta h \cdot l = q_1$$

$$\Delta h = \frac{h}{n_e}, n_e = 40$$

No exemplo 42c, a solução da Rede é mais fácil, contudo foge um pouco dos padrões até aqui adotados.

Nesse caso o traçado cumpre-se a igualdade de vazões totais de forma que

$$Q = \text{vazão total} = q_1 n_{f1} = q_2 n_{f2}$$

A primeira etapa constitui-se em traçar a Rede de Quadrados do meio 1, onde

$$q_1 = K_1 \cdot \Delta h \cdot l \quad - \text{ vazão por canal de fluxo}$$

A segunda etapa, construir a Rede do meio 2, naturalmente coerente com a do meio 1, e que poderá ser de elementos quadrados ou não.

No exemplo 42c os elementos não o são, portanto:

$$q_2 = K_2 \frac{\Delta h}{d} \cdot c \cdot l$$

Sabe-se que  $n_{f1} \neq n_{f2}$  e portanto  $q_1$  será diferente de  $q_2$ ; uma vez que deve ser mantido  $q_1 n_{f1} = q_2 n_{f2}$ .

Adotando-se no meio 2, um número de canais de fluxo,  $n'_{f2}$ , tal que  $n'_{f2} = \frac{c}{d} n_{f2}$ , então podemos estabelecer a seguinte relação:

$$n_{f1} q_1 = n_{f1} (K_1 \Delta h \cdot l)$$

$$n_{f2} q_2 = n_{f2} (K_2 \Delta h \cdot \frac{c}{d} \cdot l) = n'_{f2} \cdot K_2 \cdot \Delta h \cdot l$$

$$n_{f1} q_1 = n_{f2} q_2$$

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{n'_{f2}}{n_{f1}}$$

Onde  $n'_{f2}$  é um fator que representa o número de canais de fluxo no meio 2, diferente do número de canais de fluxo no meio 1 ( $n_{f1}$ ) de maneira a manter as propriedades da Rede, com uma relação de forma estabelecida em função das permeabilidades.

Uma observação importante é que os elementos da Rede no meio 2 podem ser quadrados, isto é,  $\frac{c}{d} = 1$ , e  $n_{f2} = n'_{f2}$ , cumprindo-se a mesma finalidade  $Q = q_1 n_{f1} = q_2 n_{f2}$ . Exemplos desse tipo serão apresentados mais adiante.

No exemplo da figura 42c

$$n_{f1} q_1 = K_1 \frac{h}{n_e} \cdot 1 \cdot n_{f1}, \quad n_{f1} = 3,5, \quad n_e = 8$$

$$n_{f2}' q_2 = K_2 \frac{h}{n_e} \cdot 1 \cdot n_{f2}'$$

$$n_{f2}' = \frac{K_1}{K_2} n_{f1} = \frac{K_1}{5K_1} \cdot 3,5 = 0,7$$

$$n_{f2} = n_{f2}' \cdot \frac{d}{c} = 1, \quad \frac{c}{d} = 0,7$$

A figura 43 mostra exemplos de Redes de Percolação traçadas pelo último processo descrito, isto é considerando a igualdade de vazões totais, para relacionar o Fator de Forma, e as Redes sendo construídas por elementos quadrados.

Na figura 43a, a permeabilidade do maciço é  $K_1$  e da fundação  $K_2$ , estão relacionadas na vazão  $K_1 = 0,1 K_2$ .

Na figura 43b e 43c a permeabilidade do maciço é  $K_1$  e da fundação  $K_2$ , tal que  $K_1 = 10 K_2$ . Observar que nessas duas figuras os pontilhados indicam parcelas dos canais de fluxo, de forma que

$$\frac{n_{f1}}{n_{f2}} = \frac{K_2}{K_1} = \frac{1}{10}$$

ou seja, a cada canal de fluxo do meio 1 ( $n_{f1}$ ) corresponderá 10 canais de fluxo do meio 2 ( $n_{f2}$ ); ou a cada canal de fluxo do meio 2 corresponderá 0,1 dos canais de fluxo do meio 1.

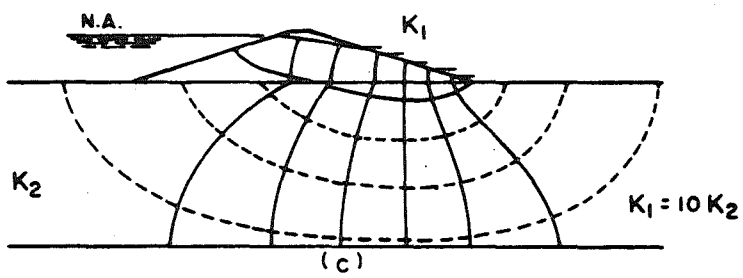
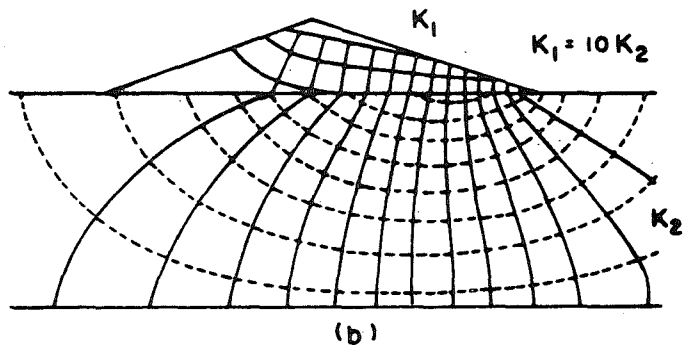
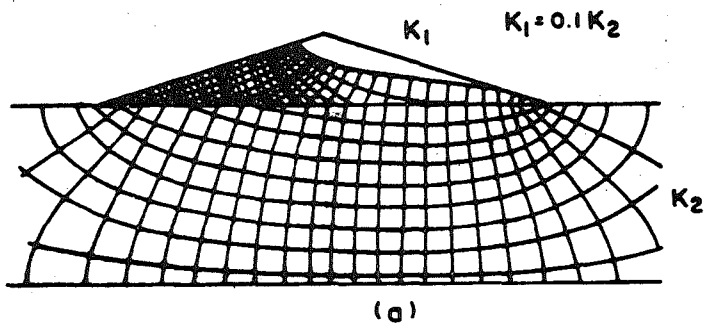


Figura 43 - Redes de Fluxo em Maciços de permeabilidade  $K_1$  diferente da fundação  $K_2$ .

Na figura 44 está apresentada uma Rede de Fluxo bastante complexa, e só com muita experiência é possível resolvê-la. Observe-se que para construção dessa rede, entre a zona 1 e 2, foram mantidas a igualdade de vazões  $q_1 = q_2$ , mas, para construir as duas redes de quadrados somente se  $\Delta h_1 \neq \Delta h_2$  e conseqüentemente  $n_{e1} \neq n_{e2}$ .

Entre as zonas 2 e 3 foram mantidos  $\Delta h_2 = \Delta h_3$  e  $n_{f2} q_2 = n_{f3} q_3$ , portanto  $n_{f2} \neq n_{f3}$  e  $q_2 \neq q_3$ .

Entre as zonas 1 e 3 o equilíbrio foi obtido simultaneamente fazendo,  $n_{f1} \neq n_{f3}$ ,  $q_1 \neq q_3$ ,  $\Delta h_1 \neq \Delta h_3$  e  $n_{e1} \neq n_{e3}$ , e mantendo-se as igualdades  $n_{f1} q_1 = n_{f3} q_3$  e  $n_{e1} \Delta h_1 = n_{e3} \Delta h_3$ , uma solução como pode-se ver, complexa.

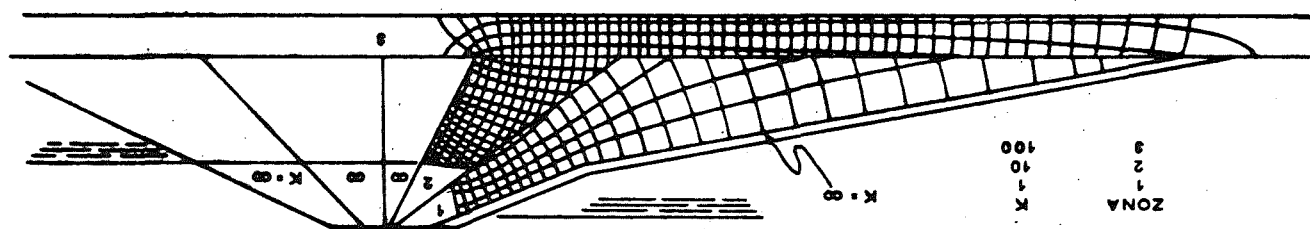


Figura 44 - Exemplo de uma Rede de Fluxo complexa.

### 15.3 - Redes de Fluxo em Seções não Homogeneas e Anisótropas

Outra situação de complexidade no traçado das redes de fluxo ocorre quando os materiais não são homogêneos  $K_1 \neq K_2$  e além disso são anisótropos  $K_h \neq K_v$ . É o caso apresentado na figura 45.

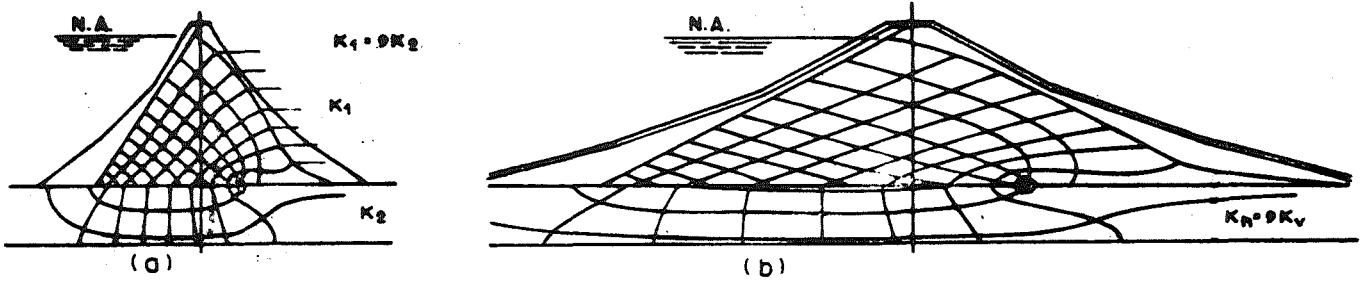


Figura 45 - Rede de Fluxo traçada para uma Seção não homogênea e meios anisotrópicos: a - seção transformada; b - seção real.

Nesse caso para encaminhar a solução, a primeira etapa será transformar uma das coordenadas da seção, numa segunda etapa, traçar a rede seguindo os princípios vistos ao longo da seção 15, e numa terceira etapa voltar as coordenadas reais, visualizando assim o aspecto verdadeiro da Rede de Percolação.

## 16. FLUXO TRANSIENTE

Após o período construtivo da barragem, o reservatório é cheio; essa elevação de nível de água pode ser instantânea.

A saturação do meio permeável será gradativo, assim como o avanço da linha de saturação limite, como pode ser visto na figura 46.

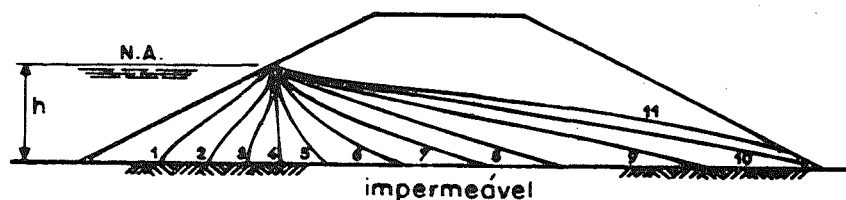


Figura 46 - Saturação progressiva nos maciços permeáveis, após o enchimento do reservatório.

As posições passam de 1 para 11, sendo esta última correspondente ao regime permanente do fluxo.

Para o problema inverso, um rebaixamento instantâneo, o movimento da freática pode ser acompanhado na figura 47.

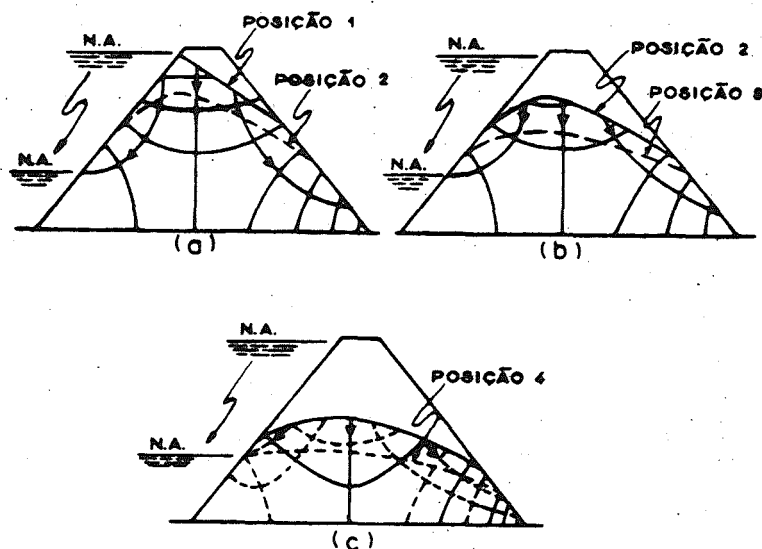


Figura 47 - Mudança gradativa da Rede de Fluxo com o rebaixamento do N.A. do reservatório.

No final dessa segunda etapa, a linha freática se estabiliza numa posição de equilíbrio, num novo regime permanente de fluxo, para a nova cota do reservatório.

Esses dois casos, constituem-se em exemplos de fluxo transiente em um solo que passa de parcialmente saturado para saturado e vice-versa.

Dentro da zona de saturação, a Equação da Continuidade é válida, assim como a Lei de Darcy, daí poder-se construir Redes de Fluxo como se o fluxo transiente fosse uma série de fluxos permanentes que se sucedem no tempo.

No exemplo do rebaixamento rápido (figura 47), as linhas de fluxo partem da freática, e no regime permanente há um paralelismo entre elas.

Um outro problema de fluxo transiente ocorre quando sobre o maciço há uma chuva intensa e contínua. Novamente os limites de saturação são modificados, agora para a crista da barragem, figura 48.



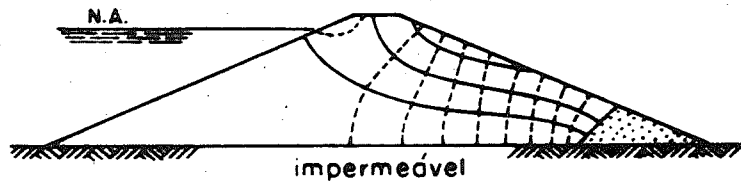


Figura 48 - Rede de Fluxo após uma chuva intensa sobre o maciço permeável.

17. ANEXOS

17.1 - Anexo 1 - Condições de Saída da Linha Freática

Quando o talude de jusante do maciço ou as condições de saída a jusante (filtros e drenos) formam um ângulo  $\omega < 90^\circ$ , com a zona saturada, a Linha Freática deve sair tangente a esse talude.

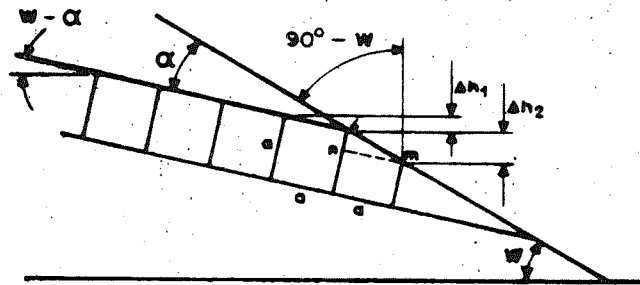


Figura 49 - Condições de saída da Linha Freática para o limite de jusante com um ângulo  $\omega < 90^\circ$

Considere-se a saída da freática na figura 49. Admitir-se-á inicialmente que a freática não é tangente, mas sim faz um ângulo  $\alpha$  com o talude.

$$\Delta h_1 = a \operatorname{sen}(\omega - \alpha)$$

$$\Delta h_2 = \overline{m4} \cos(90 - \omega) = \frac{a}{\cos \alpha} \operatorname{sen} \omega$$

$$\overline{m4} = \frac{mn}{\cos \alpha} = \frac{a}{\cos \alpha}$$

Segundo as hipóteses iniciais  $\Delta h_1 = \Delta h_2$

Portanto:

$$a \operatorname{sen}(\omega - \alpha) = \frac{a}{\operatorname{cos}\alpha} \operatorname{sen}\omega$$

Para qualquer valor de  $\alpha > 0$  tem-se evidentemente que

$$\operatorname{sen}(\omega - \alpha) < \operatorname{sen}\omega \quad \text{e}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{cos}\alpha} > \operatorname{sen}\omega$$

O que prova que sã ocorrerã igualdade se  $\alpha = 0$  ou, a freãtica for tangente ao talude.

Quando o ângulo  $\omega > 90^\circ$ , a Linha Freãtica deve sair tangente à vertical que passa pelo ponto de intersecção.

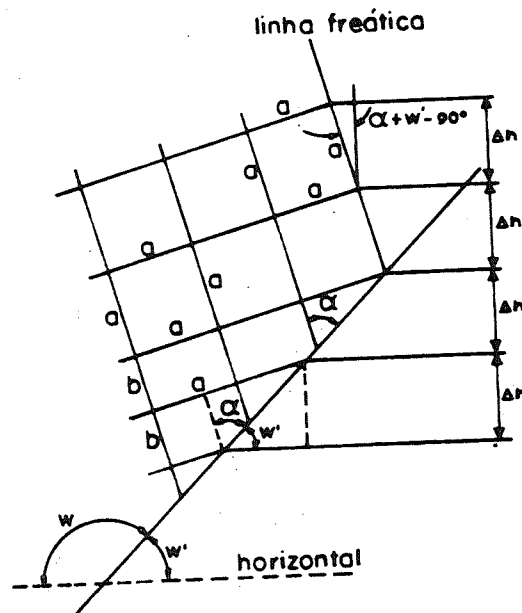


Figura 50 - Condições de saída da Linha Freática para o Limite de jusante com um ângulo  $\omega > 90^\circ$

Na figura 50 é mostrada a saída de uma rede ampliada. O gradiente  $(\Delta h/a)$  é assumido arbitrariamente, então a rede é traçada, começando por uma série de linhas horizontais equidistantes que representam as diversas equipotenciais. Como se pode ver pela figura 50, o gradiente assumido não pode estar correto, porque é impossível desenhar quadrados na porção mais baixa da rede a não ser que se imponha que  $a = b$ .

Projetando-se esses parâmetros, pode-se chegar à seguinte relação:

$$\frac{b}{\cos\alpha} \sin \omega' = a \cos(\alpha + \omega' - 90^\circ) = \Delta h$$

Para se cumprir a condição de  $a = b$ , a solução só é possível se  $\alpha = 90^\circ - \omega'$ , isto significa que a Linha Freática deve ser vertical no talude.

## 17.2 - Anexo 2 - Condições de Transferência das Linhas de Fluxo

Se analisará nos parágrafos seguintes alguns dos diversos casos ilustrados na figura 39. Quando se passa de um meio de permeabilidade  $K_1$ , para um meio de permeabilidade  $K_2$ ; sendo plana a fronteira entre eles, é suposta válida integralmente a condição que

$$\frac{\text{tg}\beta}{\text{tg}\alpha} = \frac{K_1}{K_2} = \frac{c}{d}$$

Onde  $\alpha$  e  $\beta$  são os ângulos de entrada e saída e  $c$  e  $d$  são respectivamente a largura e o comprimento dos retângulos na rede do segundo meio, supostos elementos quadrados no primeiro meio ( $a = b$ ).

CASO 1 -  $\omega < 90^\circ$  e  $K_1 < K_2$  (figura 51)

Considera-se neste caso que a fronteira entre dois meios, forma com a horizontal um ângulo menor que  $90^\circ$  e que  $K_1 < K_2$ , o fluxo se dando da esquerda para a direita.

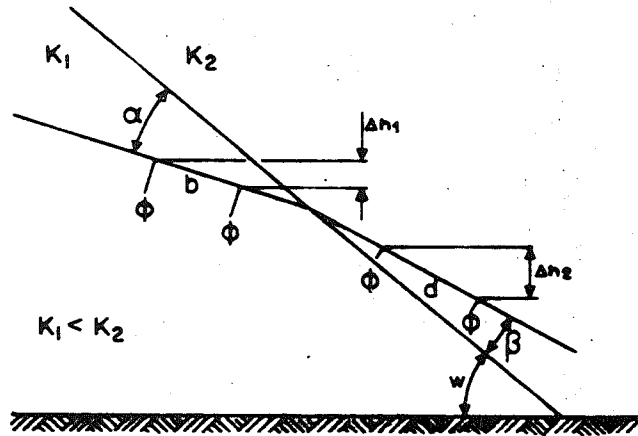


Figura 51 - Transferência das linhas de fluxo entre meios de diferentes permeabilidades ( $K_1 < K_2$ ) e a fronteira formando um ângulo  $\omega < 90^\circ$ .

Das condições normais de transferência de qualquer linha de fluxo segue-se que neste caso  $\beta < \alpha$  e  $d > b = a$  (figura 38) portanto, só será possível  $\Delta h_1 = \Delta h_2$  quando  $\alpha = \beta = 0$

Com efeito

$$\Delta h_1 = b \operatorname{sen}(\omega - \alpha)$$

$$\Delta h_2 = d \operatorname{sen}(\omega - \beta)$$

Mas,

$$\frac{b}{\cos \alpha} = \frac{d}{\cos \beta},$$

portanto para  $\Delta h_1 = \Delta h_2$ ,  $\operatorname{sen}(\omega - \alpha) \cos \alpha = \operatorname{sen}(\omega - \beta) \cos \beta$

Mas  $\alpha < \beta$ , então  $\operatorname{sen}(\omega - \beta) > \operatorname{sen}(\omega - \alpha)$ , e por outro lado  $\cos \alpha < \cos \beta$ . Não se pode, para  $\alpha$  e  $\beta$  diferentes, chegar a valores de  $\Delta h_1 = \Delta h_2$ .

Para se cumprir essa hipótese é necessário que  $\alpha = \beta$ ; mas também

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{K_2}{K_1}$$

Como  $K_1 \neq K_2$  então só se atinge a igualdade para  $\alpha = \beta = 0$

Uma solução especial para esse caso ocorre quando  $\alpha = \omega$ , ou seja, a linha de fluxo entra horizontalmente. Neste caso a solução será  $\alpha = \beta = \omega$

CASO 2 -  $\omega < 90^\circ$  e  $K_1 > K_2$

Neste caso resulta  $\beta > \alpha$  e  $d < b = a$  (figura 37), se levar em conta as condições de transferência de uma linha de fluxo qualquer.

Com tratamento similar ao do caso 1 as únicas soluções possíveis serão:

$$\alpha = \beta = 0 \quad \text{e}$$

$$\alpha = \beta = \omega \quad (\text{quando a entrada for horizontal})$$

CASO 3 -  $\omega > 90^\circ$  e  $K_1 > K_2$  (figura 52)

Da mesma forma anterior, as hipóteses básicas são que  $\beta > \alpha$  e  $d < b = a$ , e as condições de permeabilidade ( $K_1 > K_2$ ) (figura 37).

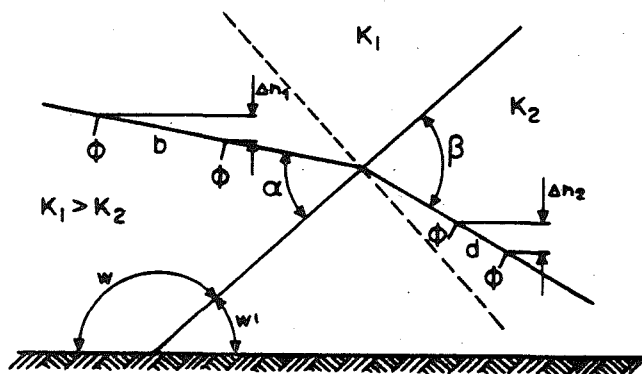


Figura 52 - Transferência das linhas de fluxo entre meios de diferentes permeabilidades ( $K_1 > K_2$ ) e a fronteira formando um ângulo  $\omega > 90^\circ$ .

Da simples observação da figura, conclue-se agora que existe a possibilidade de  $\Delta h_1 = \Delta h_2$  para valores de  $\alpha$  e  $\beta$  diferentes de zero ou de  $\omega$ . Com efeito, agora

$$\Delta h_1 = b \operatorname{sen}(\alpha - \omega')$$

$$\Delta h_2 = d \operatorname{sen}(\beta - \omega')$$

$$\frac{b}{\cos \alpha} = \frac{d}{\cos \beta}$$

Para  $\Delta h_1 = \Delta h_2$ , então

$$\operatorname{sen}(\alpha - \omega') \cos \alpha = \operatorname{sen}(\beta - \omega') \cos \beta$$

Então:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha - \omega')}{\operatorname{sen}(90^\circ - \beta)} = \frac{\operatorname{sen}(\beta - \omega')}{\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha)}$$

A única possibilidade é que

$$\alpha - \omega' = 90^\circ - \beta$$

$$\beta - \omega' = 90^\circ - \alpha$$

Qualquer dessas equações conduz à condição que  $\alpha + \beta = 90^\circ + \omega'$  ou  $\alpha + \beta = 270^\circ - \omega'$ . Além disso naturalmente

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{K_2}{K_1}$$

CASO 4 -  $\omega > 90^\circ$  e  $K_1 < K_2$

Semelhante ao caso 1, resulta de  $\beta < \alpha$  e  $d > b = a$ , para as condições de  $K_1 < K_2$  (figura 38).

Com tratamento similar ao caso 3, a solução só será possível se  $\beta = 270^\circ - \alpha - \omega$ .

18. BIBLIOGRAFIA

- Badillo, E.J. e Rodrigues, A.R. - Mecânica de Suelos - Tomo III - México, 1969
- Casagrande, Arthur - "Seepage Through Dams"- Contributions to Soil Mechanics - Boston Society of Civil Engineers 1925 - 1940
- Cedergren, Harry R. - "Seepage, Drainage and Flow Nets" - John Wiley e Sons - 1968
- Cruz, Paulo T. e Saes, José L. - Problemas de Mecânica dos Solos - EPUSP, 1970
- Lambe, T.W. e Whitman, R.V. - "Mecânica de Suelos" - Editorial Lamusa - México, 1974
- Mello, Victor F.B. e Teixeira, A.H. - "Fundações e Obras de Terra" - EESC-USP, 1971
- Mello, Victor F.B. - "Maciços e Obras de Terra" - EP-USP, 1975
- Sherard, James L. e outros - "Earth and Earth-Rock Dams" - John Wiley and Sons, Inc., 1967
- Taylor, Donald W. - "Fundamentos de la Mecânica de Suelos" Compañia Editorial Continental S.A. - México, 1968
- Terzaghi, K. e Peck, R.B. - "Mecanica de Suelos en la Ingeniería Practica" - Libreria "El Ateneo" Editorial Buenos Aires, 1973.