



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO

# Modelagem de Máquinas Síncronas Aplicada ao Estudo de Estabilidade de Sistemas Elétricos de Potência

RODRIGO ANDRADE RAMOS  
LUÍS FERNANDO COSTA ALBERTO  
NEWTON GERALDO BRETAS

SÃO CARLOS  
2020

Universidade de São Paulo  
Escola de Engenharia de São Carlos  
Departamento de Engenharia Elétrica

**Modelagem de Máquinas Síncronas  
Aplicada ao Estudo de Estabilidade  
de Sistemas Elétricos de Potência**



**Rodrigo Andrade Ramos  
Luís Fernando Costa Alberto  
Newton Geraldo Bretas**

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTOS DA TEORIA DE MÁQUINAS ELÉTRICAS SÍNCRONAS</b>	<b>3</b>
2.1	Introdução . . . . .	3
2.2	Transformação de Park . . . . .	5
2.3	Equações elétricas - circuitos equivalentes . . . . .	8
2.4	Equações mecânicas . . . . .	13
2.5	Indutâncias e constantes de tempo transitórias e subtransitórias	19
2.6	Correspondência entre grandezas no rotor e tensões equivalentes no estator . . . . .	26
2.7	Modelos simplificados . . . . .	28
2.7.1	Modelo $E'_q$ . . . . .	28
2.7.2	Modelo $E''$ . . . . .	29
2.7.3	Modelos de um e dois eixos . . . . .	33
2.7.4	Modelo clássico . . . . .	34
<b>3</b>	<b>MODELOS PARA O ESTUDO DE FENÔMENOS TRANSITÓRIOS</b>	<b>36</b>
3.1	Escolha dos valores de base . . . . .	37

## CONTEÚDO

---

3.2	Diagramas Vetoriais . . . . .	38
3.3	Modelo de dois eixos . . . . .	47
3.4	Modelo de um eixo . . . . .	50
3.5	Modelo Clássico . . . . .	51
<b>4</b>	<b>EQUAÇÕES DO SISTEMA ELÉTRICO SEM CONTRO-</b>	
	<b>LADORES</b>	<b>53</b>
4.1	Cálculo das condições iniciais . . . . .	54
4.2	Máquina em condições transitórias . . . . .	59
4.3	Cálculo da potência e do torque elétricos . . . . .	62
4.4	Modelagem final do sistema sem controladores . . . . .	64
4.4.1	Modelo de dois eixos . . . . .	65
4.4.2	Modelo de um eixo . . . . .	65
4.4.3	Modelo clássico . . . . .	65
	<b>APÊNDICE A</b>	<b>68</b>
	<b>APÊNDICE B</b>	<b>75</b>

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

Desde a construção dos primeiros geradores e motores elétricos síncronos, a modelagem de máquinas síncronas é um problema de engenharia bastante estudado. Atualmente, diversas pesquisas vêm sendo conduzidas nesta área, gerando até propostas de novas e promissoras abordagens para o problema, como por exemplo em [8].

Entretanto, a evolução da pesquisa ao longo do anos levou ao estabelecimento de alguns padrões, que passaram a ser largamente utilizados em simulações e projetos envolvendo este tipo de máquinas elétricas. Criaram-se alguns modelos bastante simples para descrever estas máquinas, baseados em considerações físicas sobre o comportamento das mesmas.

A simplicidade aparente destes modelos esconde uma série de detalhes, considerações e até mesmo aproximações presentes nos mesmos. Especialmente nas pesquisas em estabilidade de sistemas de potência, estes modelos padronizados vêm sendo amplamente utilizados, sem que se dê atenção aos fundamentos físicos que embasam tais modelos. Por vezes o usuário não possui um bom conhecimento desses fundamentos, e por isso nem sempre os modelos são utilizados de forma correta.

O objetivo deste texto é esclarecer uma série de questões relacionadas à modelagem de máquinas síncronas para estudos de estabilidade em sistemas multimáquinas de grande porte. O texto não pretende fazer uma descrição e um equacionamento detalhados das diversas máquinas síncronas existentes, mas sim apresentar os fundamentos físicos e matemáticos e as equações básicas, necessários para um bom entendimento da modelagem destas máquinas para o estudo de estabilidade. Além disso, ao longo de todo o texto são fornecidas referências para que o leitor interessado possa aprofundar seu conhecimento a respeito do assunto em questão.

O capítulo 2 faz uma revisão da teoria de Park, que teve grande impacto na modelagem de máquinas elétricas em geral, e apresenta um equacionamento geral de máquina síncrona baseado nesta teoria. Além disso, mostra algumas considerações teóricas e práticas que levaram à construção de modelos simplificados para o estudo de problemas específicos e apresenta alguns destes modelos.

Três modelos simplificados, direcionados para a aplicação em estudos de estabilidade de sistemas de potência, são estudados com mais detalhes no capítulo 3. As equações para o sistema multimáquinas, sendo os geradores equacionados através dos três modelos estudados anteriormente, são obtidas no capítulo 4.

O apêndice A trata de um problema pouco abordado na literatura: a conversão das equações da máquina para o sistema por unidade. Este apêndice tenta esclarecer uma série de dúvidas referentes a este problema, devidas à falta de informação e à pouca atenção que este assunto tem recebido. Por fim, o apêndice B apresenta algumas informações e detalhes construtivos dos enrolamentos amortecedores, componentes freqüentemente encontrados em máquinas síncronas.

## Capítulo 2

# FUNDAMENTOS DA TEORIA DE MÁQUINAS ELÉTRICAS SÍNCRONAS

Este capítulo tem como objetivo apresentar fundamentos provenientes da teoria de máquinas síncronas, que servirão como embasamento para a construção de modelos de máquinas direcionados para o estudo de estabilidade em sistemas elétricos de potência.

### 2.1 Introdução

Uma máquina síncrona é geralmente constituída por um elemento girante, chamado de rotor, envolvido por um elemento fixo denominado estator. Uma corrente contínua, aplicada a uma bobina no rotor denominada enrolamento de campo, produz um campo magnético que induz uma tensão senoidal nas bobinas presas ao estator, sendo a frequência desta tensão determinada pela velocidade angular e pelo número de pólos magnéticos do rotor. Além do

enrolamento de campo, um enrolamento ou conjunto de enrolamentos curto-circuitados, chamados enrolamentos amortecedores, são comumente projetados no rotor, com o intuito principal de amortecer oscilações resultantes de perturbações nas condições normais de operação da máquina, dentre outros.

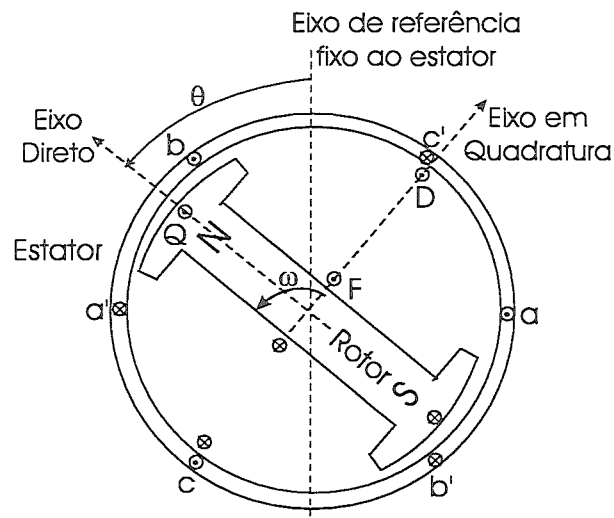


Figura 2.1: Máquina síncrona de dois pólos

Por simplicidade, considera-se inicialmente uma máquina com um rotor de dois pólos salientes (uma máquina com um número maior de pólos pode ser modelada por uma máquina equivalente de dois pólos) com três enrolamentos no estator, correspondentes às fases  $a$ ,  $b$  e  $c$ , e um enrolamento de campo (designado por F na figura 2.1). O efeito do enrolamento amortecedor será modelado por dois enrolamentos equivalentes (designados por D e Q), sendo que no primeiro (D) o eixo magnético é paralelo ao do enrolamento de campo e no segundo (Q) este eixo está defasado de  $90^\circ$  em relação ao do enrolamento de campo (admitindo como positivo o sentido de rotação da máquina). Para uma discussão mais detalhada sobre estes enrolamentos e

seus efeitos na operação da máquina, veja o Apêndice B. A figura 2.1 mostra uma representação desta máquina com os seus respectivos enrolamentos equivalentes.

## 2.2 Transformação de Park

Quando adotamos uma referência fixa ao estator para medir as grandezas eletromagnéticas da máquina, estas apresentam uma variação no tempo, devida ao movimento do rotor. Se tomarmos, por exemplo, o eixo magnético da fase  $a$  como referência, as tensões, correntes e indutâncias próprias e mútuas do estator serão funções do ângulo  $\theta$ , mostrado na figura 2.1.

Uma grande simplificação é obtida se adotarmos uma referência girante que acompanha o movimento do rotor, criando para o estator novas variáveis que são independentes do tempo. Isso pode ser feito com uma mudança de variáveis chamada Transformação de Park.

Com a Transformação de Park criam-se três novas correntes  $i_0, i_d$  e  $i_q$ , sendo que  $i_d$  corresponde à “projeção” das correntes de fase ao longo de um eixo paralelo ao eixo magnético do enrolamento de campo, chamado de **eixo direto** (eixo  $d$ ), e  $i_q$  corresponde a essa mesma “projeção” ao longo de um eixo atrasado de  $90^\circ$  em relação a este último, chamado de **eixo em quadratura** (eixo  $q$ ). A variável  $i_0$  é uma corrente estacionária, proporcional à corrente de seqüência zero. É como se os enrolamentos  $a, b$  e  $c$  do estator fossem substituídos por dois enrolamentos fictícios nos eixos  $d$  e  $q$ , e as correntes  $i_0, i_d$  e  $i_q$  seriam as correntes que, circulando nestes enrolamentos fictícios, produziram o mesmo efeito das correntes  $i_a, i_b$  e  $i_c$  (correntes nos enrolamentos das fases  $a, b$  e  $c$ , respectivamente).

A Transformação de Park é definida por

$$\begin{bmatrix} i_0 \\ i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Na transformação originalmente introduzida por Park [10], ao invés da matriz  $\mathbf{P}$ , uma matriz  $\mathbf{P}'$  era usada, dada por

$$\mathbf{P}' = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ \cos \theta & \cos(\theta - 2\pi/3) & \cos(\theta + 2\pi/3) \\ -\sin \theta & -\sin(\theta - 2\pi/3) & -\sin(\theta + 2\pi/3) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

sendo  $\theta$  o ângulo mostrado na figura 2.1. Apesar da grande simplificação proporcionada, esta transformação apresenta uma característica indesejável: os valores da potência trifásica calculados antes e depois da transformação são diferentes.

Definindo a matriz  $\mathbf{P}$  como

$$\mathbf{P} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ \cos \theta & \cos(\theta - 2\pi/3) & \cos(\theta + 2\pi/3) \\ \sin \theta & \sin(\theta - 2\pi/3) & \sin(\theta + 2\pi/3) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

pode-se mostrar que a potência trifásica é agora invariante a essa transformação. É fácil ver que esta nova matriz satisfaz  $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$ , sendo portanto ortogonal. A potência aparente  $\mathbf{S}$ , definida por

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}^T \bar{\mathbf{I}} \quad (2.4)$$

pode ser vista como o produto interno usual (neste caso, no  $\mathbb{R}^3$ ) entre os vetores tensão  $\mathbf{V}$  e corrente  $\mathbf{I}$  ( $\bar{\mathbf{I}}$  representa o vetor complexo conjugado do vetor  $\mathbf{I}$ ). Assim, uma transformação ortogonal aplicada a estes vetores irá preservar o produto interno, o que resulta na invariância de potência. Por

essa razão, a transformação ortogonal, dada pela matriz  $\mathbf{P}$  da equação (2.3) será adotada neste texto.

Pode-se fazer o mesmo com tensões e fluxos concatenados, e com isso definem-se três circuitos equivalentes para o estator, chamados de circuito de **seqüência zero**, circuito de **eixo direto** e circuito de **eixo em quadratura**.

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ v_d \\ v_q \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_d \\ \lambda_q \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

As variáveis  $v_0$ ,  $\lambda_0$ ,  $v_d$ ,  $\lambda_d$ ,  $v_q$  e  $\lambda_q$  representam as tensões e os fluxos concatenados equivalentes nestes circuitos, respectivamente.

Suponha que a tensão  $v_a$  tenha a forma

$$v_a = \sqrt{2}V \text{sen}(\theta + \alpha) \quad (2.6)$$

sendo  $V$  o valor rms desta tensão, e que as tensões nas fases  $b$  e  $c$  formem com  $v_a$  um trifásico balanceado. Pode-se mostrar facilmente que, aplicando-se a transformação de Park  $\mathbf{P}$  adotada neste texto, obtêm-se

$$v_0 = 0 \quad (2.7)$$

$$v_d = \sqrt{3}V \text{sen}\alpha \quad (2.8)$$

$$v_q = \sqrt{3}V \text{cos}\alpha \quad (2.9)$$

Fica óbvio então, a partir das equações (2.8) e (2.9), que

$$v_d^2 + v_q^2 = 3V^2 \quad (2.10)$$

Dessa forma, pode-se concluir que, utilizando a transformação de Park ortogonal  $\mathbf{P}$ , as tensões equivalentes de eixo direto  $v_d$  e de eixo em quadratura  $v_q$  são iguais à projeção da grandeza  $\sqrt{3}V$  no eixo correspondente, sendo  $V$  o valor rms da tensão terminal.

### 2.3 Equações elétricas - circuitos equivalentes

O comportamento das grandezas elétricas da máquina mostrada na figura 2.1 pode ser descrito em termos do circuito equivalente da figura 2.2, onde as indutâncias mútuas foram omitidas para preservar a clareza do desenho.

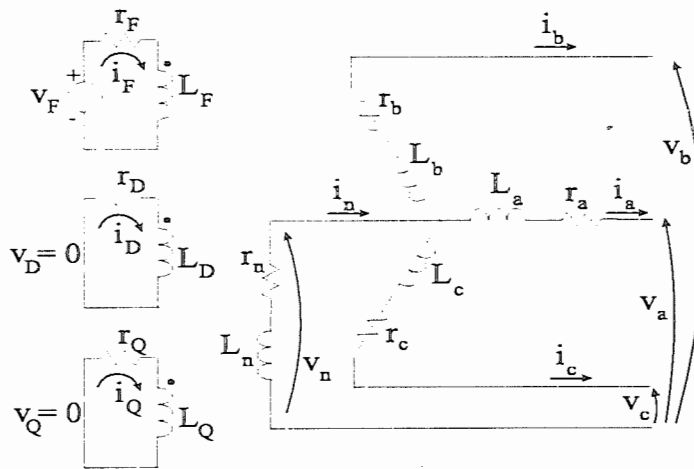


Figura 2.2: Circuito equivalente da máquina (referência  $abc$ )

Para este circuito, podemos escrever a equação matricial

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{abc} \\ \mathbf{v}_{FDQ} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{abc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{FDQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{abc} \\ \mathbf{i}_{FDQ} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{abc} \\ \dot{\lambda}_{FDQ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

sendo  $\mathbf{v}_{abc}$ ,  $\mathbf{i}_{abc}$  e  $\dot{\lambda}_{abc}$  vetores com as tensões, correntes e fluxos concatenados nas fases  $a$ ,  $b$  e  $c$ , respectivamente,  $\mathbf{v}_{FDQ}$ ,  $\mathbf{i}_{FDQ}$  e  $\dot{\lambda}_{FDQ}$  vetores com as tensões, correntes e fluxos concatenados nos circuitos  $F$ ,  $D$  e  $Q$ , respectivamente,  $\mathbf{R}_{abc}$  e  $\mathbf{R}_{FDQ}$  matrizes diagonais com as resistências dos circuitos  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $F$ ,  $D$  e  $Q$ , respectivamente, e  $\mathbf{v}_n$  um vetor com a tensão de neutro. A equação (2.11) é bastante complicada, devido à presença de indutâncias

variantes no tempo (funções do ângulo  $\theta$ ) nos termos  $\dot{\lambda}$ . Além disso, a distribuição dos fluxos obtida com um sistema de coordenadas estacionário faz com que os circuitos do estator e do rotor sejam acoplados magneticamente. Aplicando a transformação de Park na equação (2.11), podemos simplificá-la, obtendo [3]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{0dq} \\ \mathbf{v}_{FDQ} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{0dq} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{FDQ} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{0dq} \\ \mathbf{i}_{FDQ} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{0dq} \\ \dot{\lambda}_{FDQ} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1}\lambda_{0dq} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{0dq} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

sendo  $\mathbf{R}_{0dq}$  uma matriz diagonal com as resistências equivalentes e  $\mathbf{v}_{0dq}$ ,  $\mathbf{i}_{0dq}$  e  $\lambda_{0dq}$  vetores com as tensões, correntes e fluxos concatenados nos enrolamentos fictícios 0,  $d$  e  $q$ , respectivamente, e  $\mathbf{n}_{0dq}$  a tensão de neutro nesta referência.

No novo sistema de coordenadas obtido após a transformação de Park, as indutâncias próprias e mútuas dos enrolamentos fictícios 0,  $d$  e  $q$  não dependem do ângulo  $\theta$ . A relação entre os fluxos magnéticos e as correntes nos respectivos circuitos pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_d \\ \lambda_q \\ \lambda_F \\ \lambda_D \\ \lambda_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_d & 0 & kM_F & kM_D & 0 \\ 0 & 0 & L_q & 0 & 0 & kM_Q \\ 0 & kM_F & 0 & L_F & M_R & 0 \\ 0 & kM_D & 0 & M_R & L_D & 0 \\ 0 & 0 & kM_Q & 0 & 0 & L_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_0 \\ i_d \\ i_q \\ i_F \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

sendo  $L_i$  a indutância própria do enrolamento  $i$ ,  $M_F$  a indutância mútua entre os enrolamentos  $F$  e  $d$ ,  $M_D$  a indutância mútua entre os enrolamentos  $D$  e  $d$ ,  $M_Q$  a indutância mútua entre os enrolamentos  $Q$  e  $q$ ,  $M_R$  a indutância

mútua entre os enrolamentos  $F$  e  $D$  e  $k$  uma constante igual a  $\sqrt{3/2}$ . Como as indutâncias são agora constantes, podemos escrever os termos  $\dot{\lambda}$  em função das correntes, a partir de (2.13). Fazendo isso, e rearranjando as equações, obtêm-se um bloco para as equações de eixo direto e outro para as de eixo em quadratura. De acordo com [3], pode-se admitir que as resistências dos circuitos do estator são iguais, e dessa forma obtemos:

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ v_d \\ -v_F \\ v_D = 0 \\ v_q \\ v_Q = 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r + 3r_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 & \omega_m L_q & \omega_m k M_Q \\ 0 & 0 & r_F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_D & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_m L_d & -\omega_m k M_F & -\omega_m k M_D & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_0 \\ i_d \\ i_F \\ i_D \\ i_q \\ i_Q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_0 + 3L_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_d & kM_F & kM_D & 0 & 0 \\ 0 & kM_F & L_F & M_R & 0 & 0 \\ 0 & kM_D & M_R & L_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_q & kM_Q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & kM_Q & L_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_0 \\ \dot{i}_d \\ \dot{i}_F \\ \dot{i}_D \\ \dot{i}_q \\ \dot{i}_Q \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

sendo  $v_j$ ,  $i_j$  e  $r_j$  a tensão, a corrente e a resistência do enrolamento  $j$ ,  $r_n$  e  $L_n$  as respectivas resistência e indutância do neutro e  $\omega_m$  a velocidade angular absoluta (em relação à referência fixa) do rotor.

Isolando-se o vetor composto pelos termos  $\dot{i}$ , pode-se escrever o conjunto de equações que compõem (2.14) na forma de um espaço de estados, e acrescentando-se duas equações mecânicas a este conjunto, obtem-se um modelo em espaço de estados para a máquina (o que será visto mais detalhadamente na seção 2.4).

Se admitimos condições balanceadas, a equação matricial (2.14) pode ser

escrita sem a equação de seqüência zero (pois esta equação é desacoplada das demais, e pode ser resolvida separadamente no caso de condições não balanceadas).

O conjunto de equações (2.14) pode ser representado por um circuito equivalente, mostrado na figura 2.3. Devido ao novo sistema de coordenadas criado pela Transformação de Park, pode-se agora obter uma nova representação na qual os circuitos do estator ( $d$  e  $q$ ) são desacoplados.

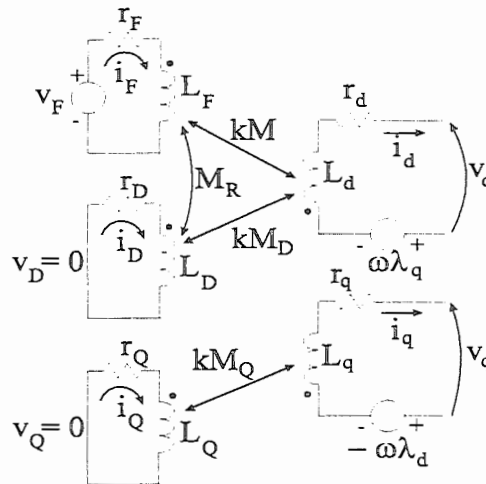


Figura 2.3: Circuito equivalente da máquina (referência 0dq).

A grande maioria das referências de modelagem de máquinas síncronas para estudos de estabilidade aborda de maneira muito vaga (ou simplesmente não aborda) o problema da conversão de grandezas para o sistema p.u. A referência [3] é uma exceção, pois esta adota um sistema de grandezas de base diferente do usual, para proporcionar que o fluxo mútuo concatenado em qualquer um dos enrolamentos seja, em p.u., igual a todos os demais. Por essa razão, a indutância mútua entre dois enrolamentos quaisquer pode ser representada por um circuito T, o que por sua vez permite que o conjunto de equações (2.14) possa ser representado por apenas dois circuitos equivalentes,

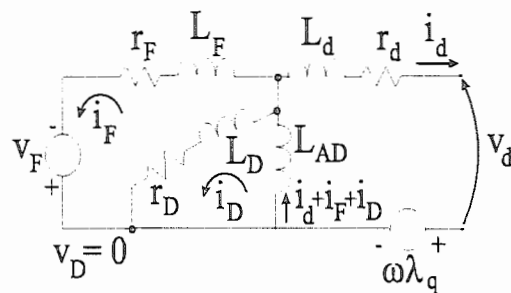


Figura 2.4: Circuito equivalente do eixo d.

mostrados nas figuras 2.4 e 2.5 (nas quais, em p.u.,  $L_{AD} = kM_F = kM_D = M_R$  e  $L_{AQ} = kM_Q$ ).

Os valores de base que serão adotados no capítulo 3 são diferentes dos valores adotados na referência [3], pois estaremos trabalhando com modelos simplificados que não exigem mais a modelagem das indutâncias mútuas como circuitos T. Entretanto, deve-se ter em mente que, quando é necessário utilizar os modelos de circuitos equivalentes dados nas figuras 2.4 e 2.5 em conjunto com as equações (2.14), os valores de base dados nesta referência (ou um sistema de valores coerente com estes) devem ser adotados. Mais informações sobre este assunto podem ser encontradas no apêndice C em [3], ou no apêndice A deste texto.

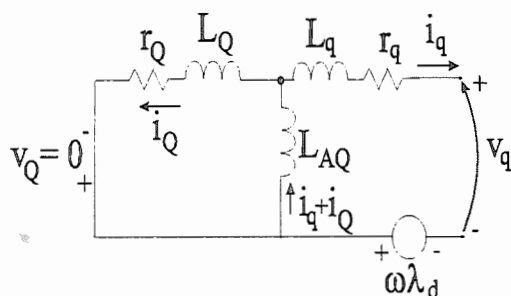


Figura 2.5: Circuito equivalente do eixo q.

## 2.4 Equações mecânicas

O próximo passo consiste em obter as equações que relacionam o balanço de potência na máquina com a variação de sua velocidade angular, e com isso obter um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem para uma máquina isolada. Este conjunto será denominado **modelo em espaço de estados** para a máquina síncrona. Para isso, considere inicialmente a máquina representada na figura 2.6.

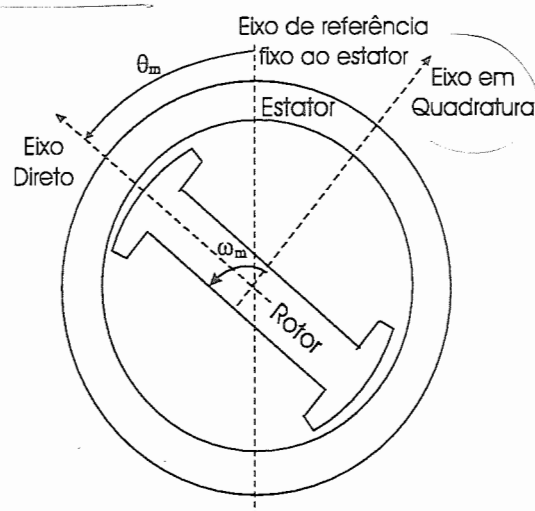


Figura 2.6: Rotor girante com eixo de referência fixo.

Para o movimento rotacional desta máquina, podemos escrever a seguinte equação:

$$J\ddot{\theta}_m = T_a \quad (2.15)$$

Na equação (2.15),  $J$  é o momento de inércia do rotor,  $T_a$  é o torque de aceleração do rotor e  $\theta_m$  é o ângulo mecânico do eixo direto do rotor com relação a um eixo de referência estacionário.

O torque  $T_a$  resulta da diferença entre os torques mecânico e elétrico aplicados no rotor. O torque mecânico  $T_m$  é composto pelo torque aplicado pelo agente motor (água ou vapor, por exemplo) descontando-se todas as perdas rotacionais significativas (atrito mecânico e viscoso). Este torque é contrabalanceado por um torque elétrico  $T_e$ , devido à potência elétrica fornecida pelo gerador ao sistema.

Convenciona-se que, para uma máquina funcionando como gerador, ambos os torques são positivos, sendo que o torque mecânico (de entrada) atua no sentido de acelerar o rotor, enquanto que o torque elétrico (de saída) atua no sentido contrário, desacelerando o rotor. Sendo assim:

$$T_a = T_m - T_e \quad (2.16)$$

Como o ângulo  $\theta_m$  é medido em relação a uma referência estacionária, este será uma função senoidal do tempo em condições de regime permanente. Isso torna a equação (2.15) inconveniente aos estudos de estabilidade, quando esta referência é adotada. Para evitar este inconveniente, podemos utilizar um outro sistema de referência, não mais fixo, mas girando agora à velocidade síncrona. O ângulo do rotor, medido em relação a esta nova referência, será chamado de  $\delta_m$  e será dado por:

$$\delta_m(t) = \theta_m(t) - (\omega_{0m}t + \pi/2 + \alpha) \quad (2.17)$$

Na equação acima,  $\omega_{0m}$  é a velocidade síncrona e  $(\omega_{0m}t + \pi/2 + \alpha)$  define a referência girante. Se tomarmos  $t = 0$  como sendo o instante em que o eixo em quadratura está alinhado com o eixo de referência fixo ao estator,  $\alpha$  será o ângulo de defasagem entre a referência fixa e a referência girante no tempo  $t = 0$ . Por sua vez, o ângulo do rotor  $\delta_m(t)$ , com as hipóteses acima, será o ângulo entre o eixo em quadratura e a referência girante.

Pode-se ver que, nesta nova referência,  $\delta_m(t)$  será uma constante em condições de regime permanente. Esta mudança de variáveis proporciona uma grande simplificação matemática, pois transforma um problema de soluções de equilíbrio em um problema de pontos de equilíbrio de um conjunto de equações diferenciais.

Apesar do novo sistema de referência estar em movimento, ele continua sendo um sistema de referência inercial. Com isso, as equações de aceleração não se alteram ao passarmos para este novo sistema de referência. Isso pode ser verificado facilmente, pois:

$$\dot{\delta}_m = \dot{\theta}_m - \omega_{0m} \quad (2.18)$$

$$\ddot{\delta}_m = \ddot{\theta}_m \quad (2.19)$$

Sendo assim, podemos escrever a equação (2.15), na nova referência, como:

$$J\ddot{\delta}_m = T_m - T_e \quad (2.20)$$

Nota-se que as equações (2.15) e (2.20) possuem a mesma forma, o que deriva do fato de ambas possuírem referenciais inerciais.

Para obter um conjunto de equações diferenciais que defina um espaço de estados para a máquina, é mais conveniente escrever a equação (2.20) em termos do ângulo  $\delta_e$ , que é o ângulo formado entre a referência girante e o eixo do campo magnético que envolve o rotor, pois o torque elétrico  $T_e$  será uma função deste ângulo. O ângulo do rotor  $\delta_m$  e o ângulo elétrico  $\delta_e$  estão relacionados por:

$$\delta_e = \frac{p}{2}\delta_m \quad (2.21)$$

sendo  $p$  o número de pólos do rotor. Pode-se, da mesma maneira, definir

a velocidade do campo girante da seguinte forma:

$$\omega_e = \dot{\delta}_e = \frac{p}{2} \dot{\delta}_m \quad (2.22)$$

Nestas novas variáveis, a equação (2.20) pode ser escrita como:

$$\frac{2J}{p} \ddot{\delta}_e = \frac{2J}{p} \dot{\omega}_e = T_m - T_e \quad (2.23)$$

A equação acima é uma equação já razoavelmente adequada para estudos de estabilidade do sistema. Entretanto, o momento de inércia  $J$  da máquina é um parâmetro que não é comumente fornecido pelos fabricantes. Usualmente, os fabricantes fornecem um outro parâmetro, chamado de constante de inércia  $H$ . Esta constante é definida como a energia armazenada no rotor  $W_k$ , quando este gira à velocidade síncrona, dividida pela potência base trifásica da máquina  $S_B$ , ou seja,

$$H = \frac{W_k}{S_B} = \frac{J\omega_{0m}^2}{2S_B} \implies J = \frac{2HS_B}{\omega_{0m}^2} \quad (2.24)$$

sendo  $\omega_{0m}$  a velocidade mecânica síncrona do sistema. Notando que  $S_B/\omega_{0m}$  define um torque base  $T_B$  e definindo a velocidade síncrona do campo girante através de

$$\omega_{0e} = \frac{p}{2} \omega_{0m} \quad (2.25)$$

podemos escrever a equação (2.23) como:

$$\frac{2H}{\omega_{0e}} \dot{\omega}_e = \frac{T_m}{T_B} - \frac{T_e}{T_B} \quad (2.26)$$

Definindo agora  $\omega_u = \omega_e/\omega_{0e}$ ,  $T_{mu} = T_m/T_B$  e  $T_{eu} = T_e/T_B$  como sendo os valores em p.u. de velocidade angular do campo (em relação à referência girante), torque mecânico e torque elétrico, respectivamente, obtemos a equação usualmente empregada para estudos de estabilidade em sistemas elétricos de potência:

$$2H\dot{\omega}_u = T_{mu} - T_{eu} \quad (2.27)$$

Esta equação é chamada de **equação de oscilação** ou **equação de “swing”**, e é recomendada em [9], pois não introduz erros decorrentes de aproximações na modelagem da oscilação da máquina. Outros tipos de equação de “swing” têm sido utilizados, baseados na consideração de que a velocidade angular  $\omega_m$  tem uma variação muito pequena durante o período transitório (caso contrário, ocorreria a perda de sincronismo rapidamente, e o sistema tornar-se-ia instável). Com isso, pode-se considerar que o momento angular do rotor  $M_m = J\omega_m$  é constante. Multiplicando ambos os lados da equação (2.20) por  $\omega_m$ , podemos obter uma nova equação de “swing” que tem como parâmetro o momento angular  $M_m$ , constante por hipótese. Obviamente, um erro decorrente desta hipótese estará presente neste equacionamento, e as referências [3], [9] sugerem que um termo de amortecimento  $D\omega_m$  pode ser incluído na nova equação para compensar este erro, resultando

$$M_m \dot{\omega}_m + D\omega_m = P_m - P_e \quad (2.28)$$

Não existe nenhum procedimento padronizado para se encontrar um valor apropriado para a constante de amortecimento  $D$  neste caso. O leitor interessado pode, no entanto, obter indicativos para o cálculo desta constante em [9], [3] e [2].

Por outro lado, se não quisermos introduzir nenhum erro no equacionamento da oscilação da máquina, a equação (2.27) deve ser usada. Como estamos interessados em relacionar o balanço de potência na máquina síncrona com a oscilação da mesma, podemos escrever a equação (2.27) na forma

$$2H\dot{\omega}_u = \frac{P_{mu}}{\omega_{mu}} - \frac{P_{eu}}{\omega_{mu}} \quad (2.29)$$

sendo  $P_{mu}$  e  $P_{eu}$  os valores em p.u. das potências mecânica e elétrica, respectivamente, e  $\omega_{mu}$  o valor em p.u. da velocidade angular absoluta. Esta

equação, juntamente com a definição da velocidade angular do campo girante (em relação à referência girante)

$$\omega_e = \dot{\delta}_e = \dot{\delta} \quad (2.30)$$

e com as cinco equações elétricas em (2.14)

$$\begin{aligned} v_d &= -r i_d - \omega_m L_q i_q - \omega_m k M_Q i_Q - \\ &\quad - L_d \dot{i}_d - k M_F \dot{i}_F - k M_D \dot{i}_D \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$-v_F = -r_F i_F - k M_F \dot{i}_F - L_F \dot{i}_F - M_R \dot{i}_D \quad (2.32)$$

$$0 = -r_D i_D - k M_D \dot{i}_d - M_R \dot{i}_F - L_D \dot{i}_D \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} v_q &= -r i_q + \omega_m L_d i_d + \omega_m k M_F i_F + \\ &\quad + \omega_m k M_D i_D - L_q \dot{i}_q - k M_Q \dot{i}_Q \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$0 = -r_Q i_Q - k M_Q \dot{i}_q - L_Q \dot{i}_Q \quad (2.35)$$

fornece um modelo de espaço de estados para uma máquina síncrona. É importante salientar que até agora apenas a equação de “swing” foi normalizada. Para mais informações sobre a normalização das equações, o leitor deve consultar o apêndice A.

Devemos agora explicitar no equacionamento a relação entre as variáveis de estado  $\delta_e$ ,  $\omega_e$ ,  $i_d$ ,  $i_F$ ,  $i_D$ ,  $i_q$  e  $i_Q$  das diversas máquinas do sistema, e isso pode ser feito através das equações da rede de transmissão e das cargas.

Entretanto, o modelo de sétima ordem considerado até o momento descreve a máquina síncrona com um alto grau de detalhamento, e por isso mesmo é razoavelmente complicado. Sendo assim, é interessante fazer algumas simplificações neste modelo, baseadas em considerações físicas sobre os problemas a serem estudados, antes de equacionar o espaço de estados final.

Como iremos trabalhar com modelos simplificados adiante no texto, o sistema de normalização foi escolhido de maneira coerente com estes modelos,

razão pela qual não será feita aqui a conversão das equações elétricas (2.31) a (2.35) para o sistema p.u. A normalização destas equações é abordada com detalhes no apêndice C da referência [3].

## 2.5 Indutâncias e constantes de tempo transitórias e subtransitórias

Um dos problemas existentes no modelo de sétima ordem construído na seção anterior é a dificuldade de obtenção de seus parâmetros, através de testes ou experimentos. Nesta seção, parâmetros que caracterizam melhor a máquina serão apresentados, para que em seguida sejam feitas simplificações na modelagem baseadas nestes parâmetros.

Entretanto, antes de apresentar tais parâmetros, é importante definir dois conceitos que serão freqüentemente usados no decorrer deste texto. Em estudos de estabilidade de sistemas de potência, o intervalo de tempo após a ocorrência de uma perturbação (curto-circuito na rede de transmissão ou variação brusca da carga demandada, por exemplo) no sistema até o estabelecimento de novas condições de regime permanente é usualmente subdividido em dois períodos: **transitório** e **subtransitório**.

O fluxo magnético estabelecido nos instantes iniciais após a perturbação faz com que circulem correntes nos enrolamentos amortecedores. O período **subtransitório** está relacionado com o decaimento destas correntes, que é geralmente bastante rápido, e estende-se até que tais correntes tenham praticamente desaparecido.

O período que se segue está relacionado ao decaimento do fluxo no circuito de campo e, eventualmente, nos circuitos formados através do ferro do rotor cilíndrico (estes circuitos serão explicados com mais detalhes posteriormente

nesta seção). Este período é chamado de **transitório**, e termina com o estabelecimento de um novo regime permanente. Uma caracterização e uma diferenciação mais rigorosas entre estes dois períodos podem ser encontradas na referência [6].

Queremos saber como a máquina se comporta durante estes períodos, ou seja, após a ocorrência de mudanças bruscas na rede. Estas mudanças provocam alterações quase instantâneas nas correntes e tensões da armadura. Para estudar o comportamento das máquinas síncronas nestas situações, usualmente efetuam-se alguns experimentos.

Um destes experimentos consiste em aplicar instantaneamente ao estator tensões trifásicas balanceadas, de forma que o eixo do campo magnético produzido por estas coincida com o eixo direto. Como o fluxo nos enrolamentos F e D não pode variar instantaneamente após a aplicação das tensões, temos, a partir de (2.13):

$$\lambda_F = 0 = kM_F i_d + L_F i_F + M_R i_D \quad (2.36)$$

$$\lambda_D = 0 = kM_D i_d + M_R i_F + L_D i_D \quad (2.37)$$

Isolando  $i_F$  e  $i_D$  em função de  $i_d$  e substituindo em (2.13), obtemos (em  $t = 0^+$ ):

$$\lambda_d = \left( L_d - \frac{k^2 M_F^2 L_D + L_F k^2 M_D^2 - 2k M_F k M_D M_R}{L_F L_D - M_R^2} \right) i_d \quad (2.38)$$

O termo entre parênteses na equação (2.38) é definido como o fluxo *inicial* por unidade de corrente no estator, com todos os circuitos do rotor desenergizados e curto-circuitados. Este termo recebe o nome de **indutância subtransitória de eixo direto**  $L_d''$ , e é menor do que a indutância síncrona  $L_d$  pois, nos primeiros instantes após a aplicação da tensão, o fluxo produzido pelo estator é obrigado a circular por caminhos de relutância elevada.

Se as mesmas tensões balanceadas forem aplicadas a uma máquina *sem* enrolamentos amortecedores, (2.13) fornece:

$$i_F = -\frac{kM_F}{L_F}i_d \tag{2.39}$$

$$\lambda_d = \left( L_d - \frac{k^2M_F^2}{L_F} \right) i_d \tag{2.40}$$

O termo entre parênteses em (2.40) é chamado de **indutância transitória de eixo direto**  $L'_d$ .

Numa máquina com enrolamentos amortecedores, a corrente nestes enrolamentos irá decair rapidamente a zero, poucos ciclos após a aplicação das tensões. Portanto, após esse período inicial, mas ainda antes da máquina atingir as condições de regime permanente (ou seja, durante o período transitório), a indutância efetiva do estator será a indutância  $L'_d$ . Esta indutância também será menor do que a indutância síncrona  $L_d$ , pois o fluxo ainda é forçado por caminhos de relutância mais elevada do que os de regime permanente. No entanto,  $L'_d$  será maior do que  $L''_d$ . A figura 2.7 ilustra essa situação, mostrando uma máquina de 4 pólos, sem enrolamento amortecedor, quando uma tensão é subitamente aplicada ao estator.

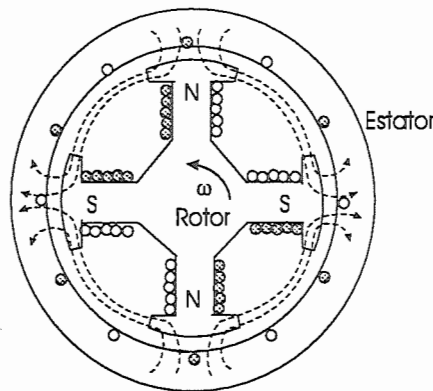


Figura 2.7: Fluxo durante o período transitório.

De maneira similar, podem-se definir as **indutâncias transitória**  $L'_q$  e **subtransitória**  $L''_q$  para o eixo em quadratura, realizando o mesmo experimento anterior, porém com as tensões aplicadas defasadas de  $90^\circ$  (para mais detalhes sobre a obtenção experimental dos parâmetros apresentados nesta seção, veja [5]). Entretanto, é importante observar a diferença da indutância  $L'_q$  de uma máquina de pólos salientes para a de uma máquina de rotor cilíndrico.

Na máquina de pólos salientes, não existe outro circuito de rotor no eixo  $q$ , além do circuito equivalente  $Q$  do enrolamento amortecedor. Dessa forma, após o período subtransitório, a indutância efetiva no eixo  $q$  será essencialmente igual à indutância após o estabelecimento de condições de regime permanente, que é a indutância síncrona  $L_q$ , ou seja,

$$L'_q = L_q \quad (2.41)$$

Em máquinas de pólos lisos a situação é um pouco diferente, pois a circulação de correntes de Foucault na laminação de ferro do rotor cilíndrico é muito mais intensa do que na máquina de pólos salientes. Sendo assim, deve-se utilizar um circuito equivalente no eixo  $q$  para modelar os efeitos destas correntes. Portanto, deve-se enfatizar que a máquina de rotor cilíndrico terá uma indutância transitória  $L'_q$ , que será menor em magnitude do que sua indutância síncrona  $L_q$ .

Também é geralmente fornecida uma indutância de seqüência negativa  $L_2$ . Esta indutância é obtida fazendo-se o rotor girar à velocidade síncrona sem excitação no circuito de campo, e aplicando-se correntes de seqüência negativa aos circuitos do estator. Estas correntes geram um fluxo magnético de freqüência igual a duas vezes a freqüência síncrona, que encontra alternadamente as permeâncias dos dois eixos do rotor, correspondendo às indutâncias  $L''_d$  e  $L''_q$ . Portanto, o valor da indutância  $L_2$  varia entre  $L''_d$  e  $L''_q$ , sendo usual-

mente admitido constante e dado por

$$L_2 = \frac{L_d'' + L_q''}{2} \quad (2.42)$$

Podem também ser realizados testes para a obtenção da indutância de seqüência zero  $L_0$  e das resistências de seqüência positiva, negativa e zero. Estes experimentos não serão descritos aqui, pois tais parâmetros não serão utilizados na construção dos modelos simplificados, nas seções seguintes. Entretanto, o leitor interessado pode encontrar informações sobre a obtenção e aplicações destes parâmetros em [5] e [4].

Outro conjunto de parâmetros de grande importância na modelagem de máquinas síncronas é o de constantes de tempo, que determinam as taxas de variação de correntes e tensões na máquina durante os períodos subtransitório e transitório.

Deixando os circuitos do estator abertos e aplicando um degrau de tensão ao circuito de campo, o comportamento dinâmico da máquina será dado por:

$$\tau_F i_F + \dot{\lambda}_F = V_F u(t) \quad (2.43)$$

$$\tau_D i_D + \dot{\lambda}_D = 0 \quad (2.44)$$

sendo  $V_F u(t)$  um degrau de tensão de amplitude  $V_F$  aplicado em  $t = 0^+$ . As equações (2.43) e (2.44) podem ser deduzidas combinando-se as equações (2.14) e (2.13), nas condições acima mencionadas. Nestas condições, utilizando as relações entre fluxo e corrente definidas em (2.13), podemos escrever (veja [3]):

$$\dot{i}_D + \frac{\tau_D L_F + \tau_F L_D}{L_F L_D - M_R^2} i_D = -V_F \frac{M_R}{L_F L_D - M_R^2} \quad (2.45)$$

O inverso do termo que multiplica  $i_D$  na equação (2.45) é uma constante de tempo que controla a taxa de decaimento da corrente no circuito  $D$  durante

o período subtransitório. Observando-se que, usualmente, a resistência do circuito  $D$  é muito maior do que a resistência do circuito de campo  $F$  [5], enquanto que as indutâncias destes circuitos ( $L_D$  e  $L_F$ ) são muito próximas, podemos escrever

$$\tau_{do}'' = \frac{L_D - M_R^2/L_F}{r_D} \quad (2.46)$$

O parâmetro  $\tau_{do}''$  recebe o nome de **constante de tempo de circuito aberto subtransitória de eixo direto**. Nas mesmas condições do experimento anterior (estator em aberto, degrau de tensão no campo), para uma máquina sem enrolamento amortecedor, ou após o decaimento da corrente subtransitória neste enrolamento, a corrente de campo passa a ser afetada apenas pelos parâmetros do próprio circuito de campo, ou seja:

$$r_F i_F + L_F \dot{i}_F = V_F u(t) \quad (2.47)$$

Dividindo-se a equação (2.47) por  $L_F$ , obtemos a **constante de tempo de circuito aberto transitória de eixo direto**  $\tau_{do}'$ , dada por:

$$\tau_{do}' = \frac{L_F}{r_F} \quad (2.48)$$

As constantes  $\tau_{do}''$  e  $\tau_{do}'$  controlam o decaimento das correntes nos circuitos  $D$  e  $F$  com o estator em aberto. No outro extremo, pode-se fazer um experimento aplicando-se o mesmo degrau de tensão no campo com o estator em curto-circuito, e obtendo-se novas constantes  $\tau_d''$  e  $\tau_d'$ .

A referência [5] mostra que as relações entre estas constantes de circuito aberto e de curto-circuito são dadas por:

$$\tau_d''/\tau_{do}'' = L_d''/L_d' \quad (2.49)$$

$$\tau_d'/\tau_{do}' = L_d'/L_d \quad (2.50)$$

Em situações normais, a máquina opera numa condição intermediária entre os dois experimentos descritos, e portanto o valor das constantes de tempo nesta condição estará entre os valores de circuito aberto e de curto-circuito. Mostra-se em [5], no entanto, que a operação da máquina pode ser equacionada em termos das constantes de circuito aberto  $\tau''_{do}$  e  $\tau'_{do}$ .

Com os mesmos experimentos realizados anteriormente, pode-se observar as grandezas relacionadas ao eixo em quadratura e obter constantes de tempo semelhantes para o mesmo. Entretanto, assim como no caso da indutância, é importante ressaltar as diferenças existentes entre máquinas de pólos lisos e máquinas de pólos salientes.

Nas máquinas de rotor cilíndrico, a variação da amplitude das tensões de eixo direto no estator pode ser representada de maneira bastante precisa por uma soma de duas exponenciais (veja [5]). Com o estator em aberto, as constantes de tempo destas exponenciais serão  $\tau''_{qo}$  e  $\tau'_{qo}$ , e em condições de curto-circuito as constantes serão  $\tau''_q$  e  $\tau'_q$ . De maneira similar ao eixo direto, a variação das grandezas relacionadas ao eixo em quadratura pode ser equacionada em termos das constantes de circuito aberto.

Em máquinas de pólos salientes não há variação significativa das tensões de eixo direto durante o período transitório, e portanto  $\tau'_q$  não terá muita importância neste caso. Entretanto, quando estas máquinas possuem enrolamento amortecedor, o decaimento da corrente neste enrolamento terá um efeito significativo na grandezas do estator, durante o período subtransitório, e dessa forma  $\tau''_q$  estará presente e terá a mesma ordem de grandeza de  $\tau''_d$  nestas máquinas.

Por fim, outra constante comumente fornecida pelos fabricantes é a **constante de tempo de armadura em curto-circuito**  $\tau_a$ . Esta constante é obtida medindo-se o decaimento de uma corrente dc no estator ou, equiva-

lentamente, da amplitude de uma corrente alternada no rotor, estando todos os circuitos fechados. Nestas condições, a constante  $\tau_a$  será dada pela razão entre a indutância do estator, que neste caso será a indutância de seqüência negativa  $L_2$  (veja [5]), e a resistência do estator, ou seja:

$$\tau_a = L_2/r \quad (2.51)$$

Considerações físicas e aproximações baseadas nos parâmetros dados nesta seção podem agora ser feitas, visando a obtenção de modelos simplificados, adequados ao estudo de problemas específicos.

## 2.6 Correspondência entre grandezas no rotor e tensões equivalentes no estator

Na construção dos modelos simplificados, é também usual expressar grandezas referidas ao rotor em termos de forças eletromotrizes equivalentes, produzidas no estator por estas grandezas. Isto é feito pois uma força eletromotriz no estator pode ser relacionada de maneira muito mais fácil à tensão terminal da máquina, que é uma grandeza bastante importante para o engenheiro ou para o operador do sistema.

Esta conversão de grandezas baseia-se no fato de que, em regime permanente e com o estator em aberto, uma corrente de campo de  $i_F$  A corresponde a uma FEM com  $i_F \omega_{0m} M_F$  V de pico no estator, sendo  $\omega_{0m}$  a velocidade síncrona absoluta do rotor. Se denotamos por  $E_q$  o valor rms desta FEM, a relação entre esta e a corrente de campo  $i_F$  que a produz é dada por

$$i_F \omega_m M_F = \sqrt{2} E_q \quad (2.52)$$

Com a Transformação de Park adotada neste texto, o acoplamento entre circuitos de rotor e estator envolve o fator  $k = \sqrt{3/2}$ . Sendo assim, vemos

que a parcela  $i_F \omega_m k M_F$  presente na equação de  $v_q$  em (2.14) pode ser escrita como

$$i_F \omega_m k M_F = \sqrt{3} E_q \quad (2.53)$$

Dessa forma,  $E_q$  é o valor rms da tensão no estator correspondente a uma corrente de campo  $i_F$ .

Nas mesmas condições anteriores, pode-se também converter um fluxo  $\lambda_F$  em uma FEM equivalente  $E'_q$ , lembrando-se que, em condições de regime permanente e com o estator em aberto, este fluxo equivale a uma corrente  $\lambda_F / L_F$ . Dessa forma,

$$\lambda_F \frac{\omega_m k M_F}{L_F} = \sqrt{3} E'_q \quad (2.54)$$

Da mesma maneira, uma tensão  $v_F$  aplicada ao circuito de campo irá corresponder, nas mesmas condições, a uma corrente de campo  $v_F / r_F$ , e portanto

$$\frac{v_F}{r_F} \omega_m k M_F = \sqrt{3} E_{FD} \quad (2.55)$$

Nas máquinas de rotor cilíndrico, podem-se definir também tensões equivalentes no eixo direto. Em condições transitórias ou subtransitórias, estas e outras tensões equivalentes no estator irão variar de acordo com equações diferenciais que envolvem as constantes de tempo e as indutâncias descritas na seção anterior. Sendo assim, estas equações podem ser utilizadas para a modelagem em espaço de estados da máquina. Nos modelos simplificados apresentados a seguir, estas equações são usadas e as tensões equivalentes no estator passam a ser variáveis de estado.

## 2.7 Modelos simplificados

Em estudos de estabilidade, é freqüentemente necessário obter a resposta de um grande número de máquinas síncronas a uma determinada perturbação numa condição estável de operação do sistema. Uma modelagem detalhada, tal como a fornecida na seção 2.4, para cada uma destas máquinas resultaria em uma complexidade que inviabilizaria a maioria dos estudos, devido ao grande número de equações diferenciais a serem resolvidas. Sendo assim, algumas simplificações se fazem necessárias.

Como ressaltado anteriormente, com base em considerações físicas, de acordo com o problema em estudo, pode-se obter novas equações diferenciais para a máquina, e com isso, eventualmente, reduzir a dimensão do espaço de estados usado para descrever o sistema. Além disso, é comum utilizar uma modelagem detalhada apenas nas máquinas que estão eletricamente mais próximas da perturbação em estudo.

Nesta seção, alguns dos modelos simplificados mais freqüentemente usados, bem como os fenômenos ou condições aos quais estes modelos se aplicam, são apresentados. Entretanto, o objetivo da seção não é fazer uma discussão detalhada de tais modelos (isto será feito apenas com os modelos de um e dois eixos, no capítulo seguinte), mas sim apresentá-los brevemente e fornecer referências para o leitor interessado.

### 2.7.1 Modelo $E'_q$

Este modelo admite que os efeitos do enrolamento amortecedor são suficientemente pequenos para poderem ser desprezados. Esta hipótese é adequada quando o amortecimento entre máquinas fortemente acopladas não é o interesse principal do estudo. Em [3] é sugerido que este efeito de amortecimento

pode ser incluído na equação de “swing”, aumentando-se o valor da constante de amortecimento  $D$ . Entretanto, o torque assíncrono proporcionado pelo enrolamento amortecedor depende das diferenças de velocidade entre as máquinas (ver [2]), e por isso produz um efeito sincronizante. Por sua vez, o torque modelado com a constante de amortecimento  $D$  depende da velocidade absoluta de uma máquina. Devido à natureza diferente destes dois torques, deve-se ter cuidado ao fazer a aproximação sugerida em [3].

As equações de estado para este modelo podem ser obtidas simplesmente eliminando-se as equações (2.33) e (2.35) do conjunto dado na seção 2.4. Em máquinas de rotor cilíndrico, como já discutido na seção 2.5, os caminhos de corrente formados através do rotor sólido podem justificar a inclusão de um circuito equivalente no eixo em quadratura, mesmo quando o efeito do enrolamento amortecedor é desprezado.

Alternativamente, a referência [3] fornece um modelo baseado nas indutâncias e constantes de tempo dadas na seção 2.5, para o qual as variáveis de estado são  $\delta$ ,  $\omega_e$ ,  $\lambda_d$ ,  $\lambda_q$  e  $E'_q$ .

Levando em conta a variação dos fluxos  $\lambda_d$  e  $\lambda_q$  (tensões transformatórias) no estator, este modelo ainda preserva um grau considerável de complexidade, sendo utilizado apenas em estudos muito particulares. Em geral, os modelos simplificados desprezam esta variação dos fluxos, como veremos adiante.

### 2.7.2 Modelo $E''$

Este modelo inclui os efeitos do enrolamento amortecedor, mas as tensões transformatórias  $\dot{\lambda}_d$  e  $\dot{\lambda}_q$  são desprezadas por serem pequenas em comparação com as tensões rotacionais  $\omega_m \lambda_d$  e  $\omega_m \lambda_q$ . Desta forma, os termos  $\dot{\lambda}_d$  e  $\dot{\lambda}_q$  são retirados das equações de  $v_d$  e  $v_q$ , que se transformam nas seguintes equações

algébricas:

$$v_d = -\omega_m \lambda_q - r i_d \quad (2.56)$$

$$v_q = \omega_m \lambda_d - r i_q \quad (2.57)$$

Portanto, reduz-se a ordem do sistema de equações diferenciais, que neste caso passa a ter 5 equações ou variáveis de estado.

Quando os termos  $\dot{\lambda}_d$  e  $\dot{\lambda}_q$ , que representam os transitórios que ocorrem nos circuitos do estator, são considerados, os transitórios existentes na rede de transmissão devem também ser considerados para a obtenção de um conjunto consistente de equações. Isso implica em modelar a rede através das equações diferenciais das linhas de transmissão e das cargas, o que gera modelos de ordem muito elevada mesmo para sistemas não muito grandes.

Os transitórios existentes no estator e na rede de transmissão após a ocorrência de uma perturbação têm decaimentos rápidos, quando comparados com os transitórios eletromecânicos existentes no rotor. Por esta razão, é comum omitir os termos  $\dot{\lambda}_d$  e  $\dot{\lambda}_q$ , assim como as equações diferenciais da rede, assumindo que ambos estão em regime permanente e modelando-os através de equações algébricas. Ainda não estão completamente esclarecidas as implicações desta hipótese na resposta do sistema, mas um estudo sobre tais implicações pode ser encontrado em [6]. Em [9] é também salientado que a modelagem algébrica da rede de transmissão, omitindo o efeito da frequência nos elementos da mesma, introduz um erro na medida em que nem todos estes elementos respondem da mesma maneira à variação da frequência.

Outra simplificação adotada na construção deste modelo é a hipótese de que  $\omega_m = 1.0$  p.u. nas equações (agora algébricas) das tensões  $v_d$  e  $v_q$ . Isto não significa que a velocidade do rotor esteja sendo considerada constante, mas apenas que sua variação é suficientemente pequena para que o *efeito*

desta variação nas tensões  $v_d$  e  $v_q$  possa ser desprezado. Com isso, as equações (2.56) e (2.57) tornam-se, em p.u.:

$$v_d = -\lambda_q - r i_d \quad (2.58)$$

$$v_q = \lambda_d - r i_q \quad (2.59)$$

Do ponto de vista computacional, nenhuma grande simplificação é conseguida a partir desta hipótese. A principal razão para que ela seja adotada é que este procedimento atua no sentido de contrabalancear o erro cometido ao desprezarem-se as tensões transformatórias  $\dot{\lambda}_d$  e  $\dot{\lambda}_q$  (isto é demonstrado em [6], através de uma análise linearizada baseada na teoria de pequenas perturbações).

Apesar do efeito da variação da velocidade estar sendo desprezado nas equações do estator, recomenda-se em [9] que esta variação seja levada em conta na amplitude de tensão que é realimentada ao sistema de excitação. Além disso, pode-se observar que a potência elétrica e o torque elétrico tornam-se iguais em p.u. com esta hipótese, pois

$$P_t = v_d i_d + v_q i_q \quad (2.60)$$

sendo  $P_t$  a potência de saída nos terminais do estator. Substituindo  $v_d$  e  $v_q$  pelas expressões dadas em (2.58) e (2.59), podemos escrever:

$$\begin{aligned} P_t &= (-\lambda_q - r i_d) i_d + (\lambda_d - r i_q) i_q \\ &= (\lambda_d i_q - \lambda_q i_d) - r (i_d^2 + i_q^2) \\ &= T_e - r I_t^2 \end{aligned} \quad (2.61)$$

sendo  $I_t$  a corrente vista nos terminais do estator. Por outro lado, a potência elétrica no entreferro da máquina, medida atrás da resistência da armadura  $r$ , é dada por:

$$P_e = P_t + r I_t^2 = T_e \quad (2.62)$$

e com isso vemos que a hipótese de que  $\omega_m = 1.0$  p.u. faz com que a potência e o torque elétricos sejam iguais em p.u., podendo-se usar ambos sem distinção na equação de “swing”. Entretanto, a referência [9] chama a atenção para o fato de que, adotando-se esta hipótese, é errado substituir  $T_e$  por  $P_e/\omega_m$  na equação de “swing”, pelas razões descritas anteriormente.

Por fim, a última hipótese simplificadora presente no modelo  $E''$  é a de que as indutâncias subtransitórias  $L_q''$  e  $L_d''$  são numericamente iguais em p.u. Isto permite que o estator possa ser modelado por apenas um circuito equivalente (veja [3]), mostrado na figura 2.8, consistindo de uma força eletromotriz  $E''$  atrás de uma resistência  $r$  e de uma reatância subtransitória  $x''$ , sendo que  $x''$  é dada por:

$$x'' = \omega_m L_d'' = \omega_m L_q'' \quad (2.63)$$

Na referência [3], o equacionamento do modelo  $E''$  tem como variáveis de estado  $\delta$ ,  $\omega_e$ ,  $E_q'$ ,  $E_d''$  e  $\lambda_D$ . Um conjunto diferente de equações, baseadas nas mesmas hipóteses descritas anteriormente, levando em conta a variação da componente de eixo direto  $E_d'$  da tensão  $E'$  e incluindo um circuito equivalente amortecedor no eixo  $Q$ , pode ser encontrado em [14] (modelo III).

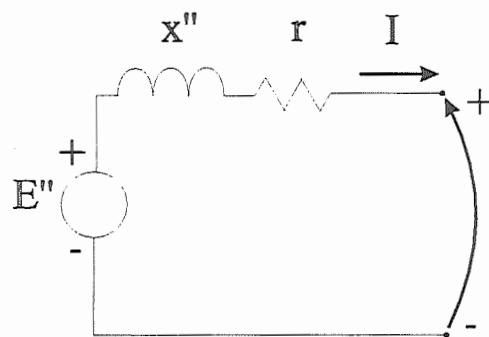


Figura 2.8: Circuito equivalente para o modelo  $E''$

### 2.7.3 Modelos de um e dois eixos

Os dois modelos seguintes desprezam fenômenos ocorridos durante o período subtransitório, levando em conta apenas os efeitos transitórios (veja [11]). As mesmas hipóteses feitas para o modelo  $E''$  (desprezar as tensões transformatórias e considerar  $\omega_m = 1.0$  p.u. na equações elétricas do estator) são também adotadas aqui, e além disso os efeitos do enrolamento amortecedor são desprezados.

Como discutido anteriormente, mesmo quando se despreza o efeito do enrolamento amortecedor, pode ser necessário incluir um circuito equivalente adicional no eixo  $Q$  para modelar as correntes de Foucault que fluem através do rotor sólido de pólos lisos. O modelo que inclui este circuito equivalente é chamado de **modelo de dois eixos** [3], e aplica-se à máquina de pólos lisos. Na máquina de pólos salientes, os caminhos de corrente formados através da laminação de ferro do rotor são bem menores, e por isso estas correntes podem ser desprezadas. O modelo aplicado a este tipo de máquina, com as hipóteses mencionadas acima, é chamado de **modelo de um eixo** [3].

Da mesma maneira que no modelo  $E''$ , pode-se representar o modelo de dois eixos por uma força eletromotriz atrás de uma resistência e de uma reatância. Como o modelo despreza os efeitos transitórios, a hipótese feita aqui é a de que a diferença entre as indutâncias transitórias  $L'_q$  e  $L'_d$  é suficientemente pequena, para que se possa representar este modelo pelo circuito equivalente da figura 2.9. Os detalhes do equacionamento do modelo e da construção do circuito equivalente são mostrados no capítulo seguinte.

No modelo de um eixo o mesmo circuito equivalente pode ser obtido, com algumas diferenças que (serão apresentadas no capítulo seguinte), utilizando-se a mesma hipótese anterior sobre as indutâncias transitórias.

Estes dois modelos serão adotados até o final do texto, e serão descritos

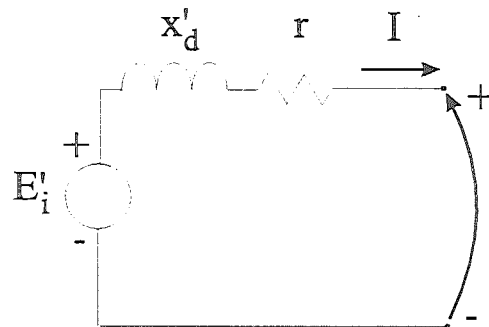


Figura 2.9: Circuito equivalente para os modelos de um e dois eixos

detalhadamente no capítulo seguinte. Mais informações sobre estas modelagens podem ser também encontradas em [3], [11], [14] e [6].

#### 2.7.4 Modelo clássico

Além de incorporar todas as hipóteses simplificadoras feitas para o modelo de um eixo, a modelagem clássica admite também que a variação da tensão  $E'_q$  durante o período transitório não é muito grande, e que a tensão  $E_{FD}$  não tem variações muito rápidas. Dessa forma, pode-se considerar o fluxo no eixo direto, e portanto também a tensão  $E'_q$ , como constantes, e a tensão  $E'_q$  pode ser considerada aproximadamente igual à tensão  $E'$ .

O circuito equivalente associado a este modelo é essencialmente igual ao mostrado na figura 2.8. Entretanto, a força eletromotriz atrás da resistência e da reatância é agora constante e designada por  $E'$ . As únicas variáveis de estado presentes são o ângulo  $\delta$  e a velocidade  $\omega_e$ .

Este modelo é chamado de *modelo clássico*, pois foi um dos primeiros modelos a ser usado em estudos de estabilidade, tendo sido amplamente utilizado desde a época em que surgiram os primeiros trabalhos na área até os dias de hoje. Dentre suas aplicações, podemos destacar a modelagem de máquinas

eletricamente distantes do distúrbio estudado (reduzindo a dimensão e a complexidade do espaço de estados resultante) e o estudo de estabilidade através de métodos energéticos. Este modelo é descrito com detalhes em [3], [6] e [14].

## Capítulo 3

# MODELOS PARA O ESTUDO DE FENÔMENOS TRANSITÓRIOS

O objetivo deste capítulo é apresentar com mais detalhes alguns dos modelos simplificados de máquinas síncronas, adequados para o estudo de fenômenos que ocorrem durante o período transitório, que foram introduzidos no final do capítulo anterior. O modelo de dois eixos, para a máquina de pólos lisos, e o modelo de um eixo, para a máquina de pólos salientes, são apresentados. O modelo clássico é também comentado, como uma alternativa para a modelagem de geradores eletricamente distantes do distúrbio em estudo. Antes, porém, um breve comentário a respeito dos valores de base adotados no texto é feito. Os modelos aqui apresentados serão adotados e utilizados até o final do texto.

### 3.1 Escolha dos valores de base

Como já foi mencionado anteriormente, na seção 2.3, este texto irá adotar um sistema de normalização adequado para as modelagens de um e dois eixos e para a modelagem clássica da rede. Como será visto mais adiante, estes modelos possuem apenas grandezas referidas ao estator. Sendo assim, não há necessidade de representação das indutâncias mútuas entre estator e rotor como circuitos T. Desta forma, os valores de base do rotor não têm influência nestas modelagens.

Como os valores de base geralmente escolhidos para um determinado ramo de circuito do sistema de transmissão são uma potência trifásica  $3S$  e uma tensão de linha  $\sqrt{3}V$ , é interessante manter estas bases para a máquina síncrona, pois assim não há necessidade de mudança de bases quando o sistema é equacionado tomando-se uma referência comum. A base de tensão pode ser adotada para o gerador sem maiores problemas, pois a barra terminal à qual este gerador estará conectado faz parte de um ramo do sistema de transmissão e, por isso, as tensões do gerador não irão diferir muito do valor da tensão de base deste ramo.

Entretanto, a potência base do sistema é geralmente muito maior do que a potência nominal do gerador. A menos que os dados do gerador tenham sido fornecidos na base pré-especificada do sistema de transmissão, uma conversão de valores deve ser feita. Este procedimento é razoavelmente simples e está decrito no apêndice A.

Sendo assim, as grandezas de base que serão adotadas neste texto são

- $S_B = 3S$  : Potência base trifásica do estator;
- $V_B = \sqrt{3}V$  : Tensão de linha do estator.

Escolhidas estas duas grandezas (além da base de tempo, que pode ser

tomada como  $t_B = 1$  s, todas as outras grandezas ficam automaticamente determinadas, a não ser que seja conveniente introduzir constantes nas relações entre as duas grandezas acima e as demais (isso é feito, por exemplo, pelos fabricantes de máquinas dos Estados Unidos, como pode ser visto no apêndice C da referência [3]).

As outras grandezas necessárias para a normalização dos modelos que serão apresentados neste capítulo são:

- $I_B = \sqrt{3}I$  :  $\sqrt{3}$  vezes a corrente de linha do estator;
- $Z_B = \sqrt{3}V/\sqrt{3}I$  : Impedância de base do estator.

## 3.2 Diagramas Vetoriais

Uma ferramenta muito útil para o entendimento dos modelos apresentados nesta seção (e adotados até o final deste texto) é o chamado *diagrama vetorial* de operação da máquina síncrona, que fornece graficamente a relação entre as tensões equivalentes no estator, tais como as tensões  $E_q$  ou  $E'_q$  definidas na seção 2.6, e a tensão terminal da máquina.

Nos diagramas vetoriais que serão apresentados neste capítulo e no seguinte, o efeito do enrolamento amortecedor foi omitido. Sendo assim, os diagramas que representam a operação do gerador após a ocorrência de uma perturbação referem-se a uma máquina sem enrolamentos amortecedores *ou* a uma máquina durante o período transitório.

Em condições de regime permanente, estas tensões equivalentes variam senoidalmente no tempo, por hipótese. A máquina é, inclusive, construída de forma a proporcionar esta variação senoidal. Neste caso, os vetores do diagrama podem ser identificados com fasores de frequência igual à frequência síncrona. Em condições transitórias ou subtransitórias, onde a velocidade da

máquina estará oscilando em torno da velocidade síncrona, tanto o ângulo quanto o módulo das tensões terão dinâmicas dadas por equações diferenciais. Sendo assim, a variação das tensões não será exatamente senoidal, e os vetores do diagrama passam a representar apenas um determinado instante no tempo. Apesar disso, o diagrama vetorial continua sendo útil, por proporcionar uma visualização das relações entre as tensões equivalentes e a tensão terminal.

Com o sistema em regime permanente, os fluxos, tensões e correntes equivalentes nos eixos  $d$  e  $q$  das máquinas, assim como as velocidades de seus rotores, são constantes. Nestas condições, pode-se escrever, para uma determinada máquina, a partir de (2.14):

$$v_d = -ri_d - \omega_m L_q i_q \quad (3.1)$$

$$v_q = -ri_q + \omega_m L_d i_d + \omega_m k M_F i_F \quad (3.2)$$

Como a velocidade da máquina é constante e igual à velocidade síncrona em regime permanente, podemos escrever as equações (3.1) e (3.2) como:

$$v_d = -ri_d - x_q i_q \quad (3.3)$$

$$v_q = -ri_q + x_d i_d + \sqrt{3} E_q \quad (3.4)$$

nas quais  $x_d$  e  $x_q$  são chamadas de **reatância síncrona de eixo direto** e **reatância síncrona de eixo em quadratura**, respectivamente, e  $E_q$  é a tensão definida na seção 2.6.

Definimos agora três “fasores”, a partir das equações mostradas anteriormente. Por simplicidade, as notações indicativas de grandezas fasoriais foram

omitidas, pois estes símbolos serão largamente utilizados ao longo do texto.

$$\mathbf{E} = E_q + j0 \quad (3.5)$$

$$\mathbf{V} = V_q + jV_d = (v_q + jv_d)/\sqrt{3} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{I} = I_q + jI_d = (i_q + ji_d)/\sqrt{3} \quad (3.7)$$

Lembrando da discussão feita no final da seção 2.2, podemos definir as notações  $V_q = v_q/\sqrt{3}$ ,  $V_d = v_d/\sqrt{3}$ ,  $I_q = i_q/\sqrt{3}$ ,  $I_d = i_d/\sqrt{3}$  contidas nas equações (3.6) e (3.7). Estas notações representam os valores rms das tensões equivalentes  $v_q$  e  $v_d$  e das correntes equivalentes  $i_q$  e  $i_d$ , respectivamente, quando vistas a partir de uma referência fixa ao estator. Com isso, pode-se identificar os “fasores”  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{I}$ , definidos em (3.6) e (3.7), com as respectivas tensão e corrente na barra terminal do gerador.

É importante chamar a atenção para o fato que as grandezas multiplicadas por  $j$  nas equações (3.5) a (3.7) estão dispostas ao longo do eixo direto e, portanto, são referidas aos eixos criados pela transformação de Park. Não se deve confundir esta referência com a referência das equações da rede (que será mais tarde definida como referência síncrona comum). Tendo em mente essa diferenciação, podemos escrever uma equação que relaciona os “fasores” definidos acima:

$$\sqrt{3}\mathbf{V} = \sqrt{3}\mathbf{E} - r\sqrt{3}\mathbf{I} + x_d\sqrt{3}I_d - jx_q\sqrt{3}I_q \quad (3.8)$$

Normalizando a equação (3.8) com os valores de base fornecidos na seção 3.1, vemos que desaparecem as constantes  $\sqrt{3}$ . Temos então, em p.u., uma relação entre as tensões rms equivalentes no estator:

$$\mathbf{V} = \mathbf{E} - r\mathbf{I} + x_dI_d - jx_qI_q \quad (3.9)$$

Esta equação pode ser representada pelo diagrama vetorial da figura 3.1, que mostra a operação de uma máquina síncrona como gerador (fornecendo potência) e com uma corrente atrasada (desmagnetizante) em relação à

tensão. Nota-se que a corrente  $I_d$  é negativa, de acordo com a orientação adotada para o eixo  $d$ . Alguns autores, como por exemplo em [5], adotam o sentido oposto para este eixo, e invertem o sinal da corrente  $I_d$  nas equações da máquina. Entretanto, é importante salientar novamente que existe uma distinção entre a referência  $0dq$  e a referência comum da rede, e que por essa razão não há nenhuma incoerência quando se considera a corrente  $I_d$  negativa.

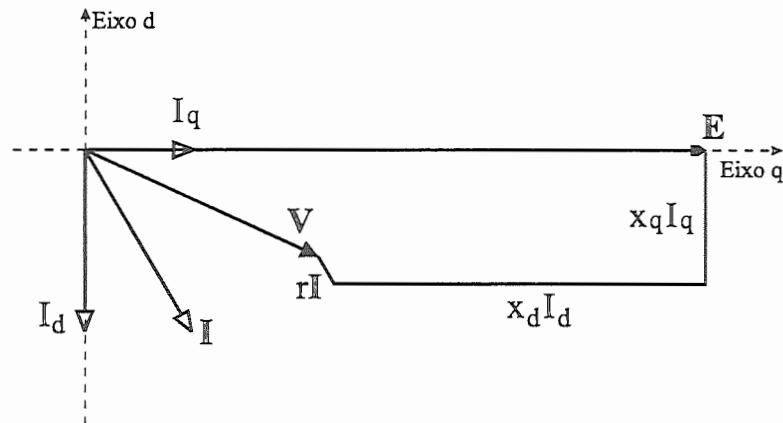


Figura 3.1: Diagrama vetorial de regime permanente

Admita agora que ocorre uma perturbação num sistema que operava em equilíbrio. Tal perturbação pode ser, por exemplo, um curto-circuito na rede de transmissão. As condições de regime permanente são perdidas, e as grandezas do gerador deixam de ser constantes. Em particular, a corrente e o fluxo no enrolamento de campo irão variar, devido às variações bruscas nas correntes e tensões da armadura. Conforme foi dito anteriormente, podemos construir um diagrama vetorial para esta situação, com a ressalva de que os vetores deste diagrama não podem mais ser identificados com fasores, mas continuam fornecendo as relações instantâneas entre as tensões equivalentes no estator e a tensão terminal. Para construir este diagrama utilizamos, além

da tensão  $E_q$  (proporcional à corrente de campo  $i_F$ ), uma tensão proporcional ao fluxo no enrolamento de campo  $\lambda_F$ , já definida na seção 2.6 como:

$$\sqrt{3}E'_q = \omega_m \frac{kM_F}{L_F} \lambda_F \quad (3.10)$$

Por ser proporcional ao fluxo  $\lambda_F$ , a tensão  $E'_q$  sofre uma variação muito mais suave do que a tensão  $E_q$ , especialmente no instante  $t = 0^+$  após a ocorrência de uma perturbação.

Para obter a relação entre a tensão  $E'_q$  e a tensão terminal  $V_q$ , vamos primeiro relacioná-la com a tensão  $E_q$ . A diferença entre estas duas tensões pode ser equacionada da seguinte forma:

$$\sqrt{3}E_q - \sqrt{3}E'_q = \omega_m k M_F i_F - \omega_m \frac{kM_F}{L_F} \lambda_F = \omega_m k M_F \left( i_F - \frac{\lambda_F}{L_F} \right) \quad (3.11)$$

Fazendo  $i_D = 0$  na equação de  $\lambda_F$  dada em (2.13), obtemos o fluxo  $\lambda_F$  durante o período transitório. Substituindo este fluxo na equação (3.11), obtemos:

$$\sqrt{3} (E_q - E'_q) = -\omega_m \frac{k^2 M_F^2}{L_F} i_d \quad (3.12)$$

Lembrando que a indutância transitória de eixo direto  $L'_d$  é definida por

$$L'_d = L_d - \frac{k^2 M_F^2}{L_F} \quad (3.13)$$

podemos escrever a equação (3.12) como

$$\sqrt{3} (E_q - E'_q) = \omega_m (L'_d - L_d) i_d = (x'_d - x_d) i_d \quad (3.14)$$

Rearranjando os termos em (3.14) e convertendo-os para p.u., obtemos a relação desejada entre as tensões  $E_q$  e  $E'_q$ :

$$E_q + x_d I_d = E'_q + x'_d I_d \quad (3.15)$$

Voltando a atenção agora para a tensão terminal  $v_q$ , escrevemos novamente a equação desta tensão, combinando as equações (2.14) e (2.13), e lembrando que estamos tratando do período transitório, no qual as correntes nos enrolamentos amortecedores já desapareceram.

$$v_q = -ri_q + \omega_m L_d i_d + \omega_m k M_F i_F - \dot{\lambda}_q \quad (3.16)$$

Precisamos agora adotar a hipótese de que a parcela da tensão  $v_q$  referente à variação do fluxo no eixo  $q$ , denotada em (3.16) por  $\dot{\lambda}_q$ , é pequena em relação às parcelas referentes aos termos rotacionais  $\omega_m L_d i_d$  e  $\omega_m k M_F i_F$ . Tal hipótese já foi discutida com detalhes na seção 2.7.2, e é também necessária aqui para que se possa construir o diagrama vetorial. A referência [5] mostra uma comparação de ordens de grandeza entre estas parcelas de tensão, na qual pode-se ver que o erro cometido ao omitir o termo  $\dot{\lambda}_q$  é realmente pequeno.

Desprezando então a variação do fluxo na equação (3.16), esta torna-se exatamente igual à equação (3.4), o que significa que, sob tal hipótese, a equação (3.4) continua válida em condições transitórias. Substituindo (3.15) em (3.4), obtemos:

$$v_q = \sqrt{3}E'_q - ri_q + x'_d i_d \quad (3.17)$$

Numa máquina de rotor cilíndrico podemos definir, durante o período transitório, tensões  $E_d$  e  $E'_d$  por

$$\sqrt{3}E_d = -\omega_m k M_G i_G \quad (3.18)$$

$$\sqrt{3}E'_d = -\omega_m \frac{k M_G}{L_G} \lambda_G \quad (3.19)$$

sendo  $E_d$  a tensão equivalente no estator devida a uma corrente  $i_G$  no circuito formado através do ferro do rotor sólido,  $E'_d$  a tensão equivalente no

estator devida a um fluxo  $\lambda_G$  neste mesmo circuito,  $L_G$  a indutância própria deste circuito e  $M_G$  a indutância mútua entre este circuito e o circuito de eixo em quadratura.

Um procedimento análogo ao que foi feito anteriormente para o eixo em quadratura permite escrever

$$E_d - x_q I_q = E'_d - x'_q I_q \quad (3.20)$$

e

$$V_d = E'_d - r I_d - x'_q I_q \quad (3.21)$$

Definindo agora

$$\mathbf{E}' = E'_q + j E'_d \quad (3.22)$$

e combinando as equações (3.6), (3.7), (3.22), (3.17) e (3.21), obtemos, em p.u.:

$$\mathbf{V} = \mathbf{E}' - r \mathbf{I} + x'_d I_d - j x'_q I_q \quad (3.23)$$

Vemos então que a relação entre a tensão  $\mathbf{E}'$  e a tensão terminal  $V$  é bastante semelhante à relação entre  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{V}$ . Redefinindo-se a tensão  $\mathbf{E}$  como

$$\mathbf{E} = E_q + j E_d \quad (3.24)$$

pode-se, a partir das equações (3.23), (3.17) e (3.21), traçar o diagrama vetorial da figura 3.2, que permite visualizar as relações entre  $\mathbf{E}'$ ,  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{E}$ .

É interessante observar que a corrente  $i_G$  está no sentido negativo do eixo em quadratura. Uma análise dos fluxos durante o regime permanente e durante o período transitório revela a razão para esta orientação de  $i_G$ . Com a máquina em vazio, o fluxo magnético no rotor está orientado totalmente no

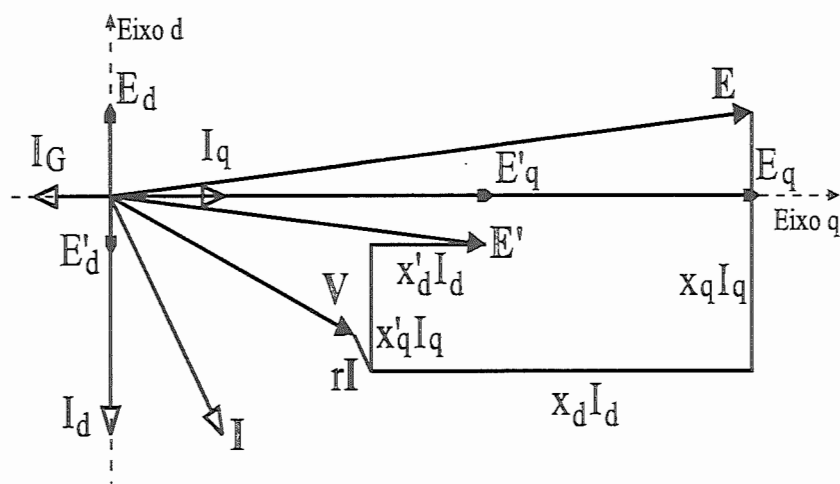


Figura 3.2: Diagrama vetorial em condições transitórias

sentido do eixo direto. Em condições de regime permanente, o fluxo gerado pela reação da armadura, somado ao fluxo produzido pelo enrolamento de campo, produz um fluxo resultante que não está mais orientado apenas na direção do eixo direto, pois possui uma componente de eixo em quadratura. Olhando para o diagrama da figura 3.3, e lembrando que o fluxo produzido pela reação da armadura é proporcional à corrente na mesma, podemos ver que a parcela do fluxo resultante na direção do eixo em quadratura é positiva. Quando o sistema sofre uma perturbação que leva ao aumento da corrente de armadura (tal como uma falta ou um aumento de carga), o fluxo resultante no eixo em quadratura tende geralmente a aumentar. Como este fluxo não pode variar instantaneamente, surge uma corrente  $i_G$  no circuito de eixo em quadratura do rotor, para criar um fluxo que irá se opor à variação de  $\lambda_G$ , ou seja, no sentido negativo do eixo em quadratura.

O diagrama mostrado na figura 3.2 e a análise feita nos parágrafos anteriores aplicam-se para o caso geral de uma máquina com circuitos nos eixos direto e em quadratura. Entretanto, alguns comentários devem novamente

ser feitos a respeito das diferenças entre geradores de pólos lisos e de pólos salientes.

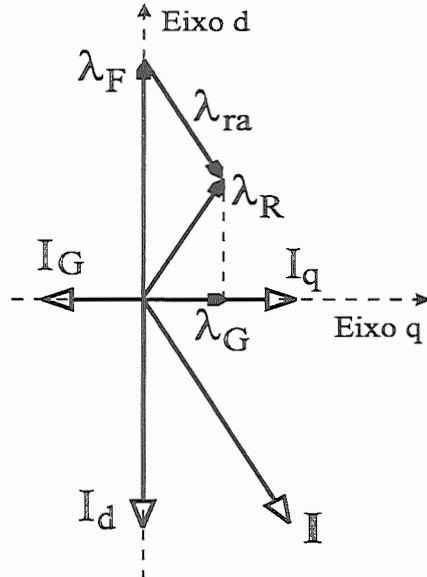


Figura 3.3: Fluxos e correntes em condições transitórias

Nas máquinas de pólos salientes, as correntes de Foucault através do ferro do rotor são suficientemente pequenas para poderem ser desprezadas. Sendo assim, não é usual incluir um circuito de eixo direto na modelagem, e conseqüentemente a componente  $E_d$  é igual a zero. Além disso, as reatâncias síncrona  $x_q$  e transitória  $x'_q$  são praticamente iguais, pois a diferença entre elas é causada justamente pelas correntes de Foucault, que estão sendo desprezadas. Portanto, olhando para (3.20), pode-se concluir que  $E'_d$  será sempre igual a zero. Sendo assim, tanto a tensão de excitação  $\mathbf{E}$  quanto a tensão transitória  $\mathbf{E}'$ , em máquinas de pólos salientes, nunca saem do eixo em quadratura, mesmo em condições transitórias.

Diferentemente do caso anterior, a existência de um circuito de eixo em quadratura em máquinas de rotor cilíndrico faz com que as tensões  $\mathbf{E}$  e

$E'$  se afastem do eixo direto durante o período transitório. Além disso, as reatâncias síncronas  $x_d$  e  $x_q$  tem valores bastante próximos. Por isso, as quedas de tensão nestas reatâncias não precisam ser decompostas em parcelas de eixo direto e de eixo em quadratura, podendo a equação (3.9), nesse caso, ser escrita como

$$V = \sqrt{3}E - ZI \quad (3.25)$$

sendo  $Z = r + jx_d$  a impedância síncrona do gerador.

Não trataremos aqui de máquinas durante o período subtransitório, mas os diagramas vetoriais para este período são bastante semelhantes aos mostrados anteriormente. O leitor interessado pode encontrar informações a respeito nas referências [3] e [5].

### 3.3 Modelo de dois eixos

Passamos agora à apresentação das equações diferenciais dos modelos que serão utilizados no restante deste texto: os modelos de um e dois eixos e o modelo clássico. Seguindo uma ordem decrescente de dimensão do espaço de estados associado, apresentamos inicialmente o modelo de dois eixos.

O modelo de dois eixos refere-se a uma máquina de rotor cilíndrico, e não possui equações para a modelagem dos enrolamentos amortecedores. Este modelo é adequado para uma máquina sem enrolamentos amortecedores, mas pode ser aplicado também para descrever uma máquina com enrolamentos amortecedores durante o período transitório, ou seja, depois que as correntes nestes enrolamentos tenham desaparecido. Isto permite que se faça uma primeira simplificação no modelo de sétima ordem apresentado no capítulo anterior, eliminando em (2.14) as equações de  $v_D$  e  $v_Q$ .

Como já foi dito na seção 2.7.3, esta modelagem despreza os termos  $\dot{\lambda}$  e considera  $\omega_m = 1.0$  p.u. nas equações do estator. É importante que o leitor já tenha estudado a seção 2.7.2, que comenta as implicações destas hipóteses, antes de prosseguir com a leitura do texto. Estas hipóteses fazem com que as equações de  $v_d$  e  $v_q$ , dadas em (2.14), sejam transformadas em equações algébricas, e possam ser representadas através de um diagrama vetorial, como mostrado na seção anterior.

Utilizamos agora as tensões equivalentes definidas na seção 2.6 para obter um equacionamento em espaço de estados que possa ser facilmente relacionado com os diagramas vetoriais mostrados na seção anterior. Combinando as equações (2.14) e (2.13), podemos escrever, para o circuito de campo:

$$-v_F = -r_F i_F - \dot{\lambda}_F \quad (3.26)$$

Multiplicando ambos os lados da equação (3.26) por  $\omega_m k M_F / r_F$ , obtemos:

$$-\omega_m k M_F \frac{v_F}{r_F} = -\omega_m k M_F i_F - \omega_m k M_F \frac{\dot{\lambda}_F}{r_F} \quad (3.27)$$

Recordando as definições feitas nas seções 3.2 e 2.6, e lembrando que  $\tau'_{do} = L_F / r_F$ , podemos escrever a equação (3.27) da seguinte forma:

$$-\sqrt{3} E_{FD} = -\sqrt{3} E_q - \sqrt{3} \tau'_{do} \dot{E}'_q \quad (3.28)$$

Rearranjando os termos da equação (3.28) e convertendo as tensões para p.u., obtemos:

$$\dot{E}'_q = \frac{1}{\tau'_{do}} [E_{FD} - E_q] \quad (3.29)$$

Como a máquina que está sendo modelada possui rotor cilíndrico, um circuito equivalente no eixo  $q$  deve ser incluído ao equacionamento, para representar as correntes através do ferro do rotor. A equação para este circuito

é idêntica à equação de  $v_G$  em (2.14), e pode ser escrita na forma:

$$v_G = 0 = -r_G i_G - \dot{\lambda}_G \quad (3.30)$$

na qual  $v_G$ ,  $i_G$ ,  $r_G$  e  $\lambda_G$  são respectivamente a tensão, a corrente, a resistência e o fluxo magnético neste circuito equivalente. Um procedimento análogo ao utilizado anteriormente para o circuito de campo fornece, em p.u.:

$$\dot{E}'_d = \frac{-1}{\tau'_{qo}} E_d \quad (3.31)$$

Relembrando as relações entre as tensões transitórias e as tensões de regime permanente dadas pelo diagrama vetorial da figura 3.2:

$$E_q = E'_q - (x_d - x'_d) I_d \quad (3.32)$$

$$E_d = E'_d + (x_q - x'_q) I_q \quad (3.33)$$

e combinando estas equações com (3.29) e (3.31), obtemos:

$$\dot{E}'_q = \frac{1}{\tau'_{do}} [E_{FD} - E'_q + (x_d - x'_d) I_d] \quad (3.34)$$

$$\dot{E}'_d = \frac{-1}{\tau'_{qo}} [E'_d + (x_q - x'_q) I_q] \quad (3.35)$$

Olhando para (3.32) e (3.33), pode-se ver que as equações (3.34) e (3.35) poderiam também ser escritas em termos de  $E_q$  e  $E_d$ . Entretanto, é mais conveniente escrevê-las em função de  $E'_q$  e  $E'_d$ , pois os fluxos  $\lambda_d$  e  $\lambda_q$ , aos quais estas tensões são proporcionais, têm uma variação muito menos brusca do que as correntes  $I_q$  e  $I_d$  (responsáveis pelas tensões  $E_q$  e  $E_d$ ) durante o período transitório.

As equações (3.34) e (3.35), juntamente com a equação de velocidade

$$\dot{\omega}_e = \frac{1}{2H} [P_m - P_e] \quad (3.36)$$

e a equação de ângulo

$$\dot{\delta} = \omega_e \quad (3.37)$$

formam o conjunto de equações diferenciais que define o espaço de estados para o modelo de dois eixos. É importante lembrar novamente que todas estas equações estão em p.u., e que na equação (3.36) foram adotadas as hipóteses  $T_m = P_m$  e  $T_e = P_e$ , já discutidas na seção 2.7.2. As equações algébricas

$$V_q = E'_q - rI_q + x'_d I_d \quad (3.38)$$

e

$$V_d = E'_d - rI_d - x'_q I_q \quad (3.39)$$

completam o equacionamento do modelo de dois eixos. Para obter um equacionamento final, na forma de espaço de estados, precisamos escrever a potência elétrica em termos das variáveis terminais da máquina, e relacionar as variáveis de diferentes máquinas através das equações da rede de transmissão. Este equacionamento é bastante complicado e será feito no capítulo seguinte.

Na seqüência, apresentamos dois outros modelos importantes para o estudo de estabilidade proposto, cujos equacionamentos são essencialmente iguais ao do modelo de dois eixos, com algumas simplificações.

### 3.4 Modelo de um eixo

O modelo de um eixo aplica as mesmas hipóteses do modelo de dois eixos no equacionamento de uma máquina de pólos salientes. A diferença básica, neste caso, é a inexistência do circuito de eixo em quadratura no rotor. Como já foi dito na seção 3.2, a tensão  $E'_d$  será sempre igual a zero. Dessa forma,

podem-se obter as equações para o modelo de um eixo simplesmente eliminando a equação diferencial de  $E'_d$  no modelo anterior de dois eixos. Algumas simplificações são introduzidas na equação de velocidade também, visto que a potência elétrica é função desta tensão.

### 3.5 Modelo Clássico

Os modelos apresentados anteriormente equacionam a máquina síncrona com um grau de detalhamento satisfatório para a maioria dos estudos de estabilidade. Entretanto, em sistemas com um grande número de geradores, mesmo estes modelos simplificados podem gerar um espaço de estados de dimensão muito elevada.

Como foi salientado na seção 2.7.4, uma das utilizações mais comuns do modelo clássico é o equacionamento de geradores que estão eletricamente distantes do distúrbio em estudo. Supondo que a tensão  $E_{FD}$  não sofre variações muito bruscas e lembrando que a dinâmica do fluxo no enrolamento de campo é regida pela constante de tempo  $\tau'_{do}$ , que é da ordem de vários segundos, pode-se admitir que o fluxo no enrolamento de campo é constante. Dessa forma, a tensão  $E'_q$ , proporcional a este fluxo, pode também ser considerada constante.

Sendo assim, todas as equações elétricas da máquina tornam-se equações algébricas, restando apenas as equações de velocidade (3.36) e ângulo (3.37) na formulação do espaço de estados. É usual representar a máquina, modelada através deste equacionamento clássico, por um circuito equivalente. Entretanto, para que isso seja possível, algumas hipóteses sobre a tensão  $E'_q$  e sobre o ângulo do rotor  $\delta$  devem ser feitas (estas hipóteses estão comentadas no capítulo seguinte).

Quando estas hipóteses são utilizadas na modelagem, as relações entre as variáveis elétricas da máquina são dadas pelo diagrama vetorial da figura 3.1, mesmo durante o período transitório. A potência elétrica passa agora a ser calculada apenas em termos de variáveis sem dinâmica (dadas por equações algébricas), o que constitui outra simplificação inerente a este modelo.

## Capítulo 4

# EQUAÇÕES DO SISTEMA ELÉTRICO SEM CONTROLADORES

Neste capítulo, uma modelagem completa de um sistema multimáquinas, sem controladores, para o estudo de estabilidade é apresentada. Os modelos de máquina síncrona descritos no capítulo anterior são utilizados em conjunto com as equações da rede de transmissão para esta modelagem. Definindo-se uma referência girante comum para todos os geradores, através das equações da rede, estabelece-se a conexão entre os dois conjuntos de equações (máquina e rede). Pode-se, então, calcular a potência elétrica fornecida por cada gerador e, com isso, obter o equacionamento final do sistema (ainda sem controladores).

## 4.1 Cálculo das condições iniciais

Os sistemas elétricos de potência são geralmente constituídos de um grande número de geradores. Para estudar a estabilidade destes sistemas, precisamos saber como variações em grandezas de um destes geradores irão afetar as demais máquinas. Para isso, utilizamos os equacionamentos descritos no capítulo 3 para modelar estes geradores, e relacionamos estes modelos entre si através das equações do sistema de transmissão.

As variáveis nestes modelos estão relacionadas ao sistema de referência definido pela transformação de Park. Como vimos no capítulo 2, estas variáveis são referidas aos eixos  $d$  e  $q$  de cada máquina, que giram junto com seu rotor. Sendo assim, cada máquina terá seu próprio sistema de referência. Em sistemas multimáquinas, para relacionar as variações nas grandezas de uma determinada máquina com as variáveis dos demais geradores, precisamos definir um sistema de referência comum e expressar todas as variáveis em relação a este referencial.

Na maioria dos estudos de estabilidade de sistemas elétricos de potência de grande porte, é feita a hipótese de que a rede de transmissão pode ser modelada por um conjunto de equações algébricas, ou seja, os transitórios são desprezados e considera-se que a rede responde instantaneamente às variações nas grandezas dos geradores. O sistema de transmissão pode então ser descrito por um conjunto de equações do tipo

$$\mathbf{I} = \mathbf{YV} \quad (4.1)$$

no qual  $\mathbf{I}$  é um vetor cujos elementos são as correntes injetadas em cada um dos barramentos do sistema,  $\mathbf{V}$  é um vetor composto pelas tensões nestes barramentos e  $\mathbf{Y}$  é a matriz impedância de barra do sistema.

Suponha que o sistema de potência em estudo esteja em regime perma-

nente. No conjunto de equações acima, pode-se escolher uma barra como referência angular (barra “slack”), e então os ângulos das demais barras ficam determinados em função desta referência. Queremos então descobrir a relação entre estes ângulos e os ângulos  $\delta_i$  dos modelos dos geradores.

Considere inicialmente a tensão na barra “slack”. Esta tensão pode ser representada por um fasor  $V\angle 0$  (pois o ângulo pode ser escolhido arbitrariamente). Neste capítulo, os fasores não serão mais representados em negrito, para facilitar a notação e evitar confusões com as grandezas matriciais.

O fasor  $V\angle 0$  gira à velocidade síncrona, e se traçamos um eixo na direção deste fasor e outro eixo ortogonal ao primeiro, estamos definindo um referencial que também gira à velocidade síncrona, e será o sistema de referência comum adotado para o estudo de estabilidade. Os eixos deste sistema serão chamados neste texto de real ( $Re$ ) e imaginário ( $Im$ ), mas há autores que se referem a estes eixos também como  $Q$  e  $D$ , respectivamente (notação que poderia, neste texto, causar confusão com os circuitos amortecedores  $D$  e  $Q$  do rotor).

A orientação dos eixos  $Im$ ,  $Re$ ,  $d$  e  $q$  adotados neste texto segue a mesma convenção utilizada em [3]. Alguns autores, como [6] ou [1], por exemplo, adotam como sentido positivo para os eixos  $Im$  e  $d$  o sentido inverso ao utilizado aqui. Por esta razão, pode-se observar um sinal invertido, em alguns termos das equações relacionadas ao eixo direto contidas nestas referências, em relação às equações mostradas neste texto.

Admita agora que haja um gerador conectado à barra “slack”. O fasor  $V\angle 0$  expressa então a tensão terminal deste gerador com relação a esta referência girante em regime permanente, ou seja, antes da ocorrência de qualquer tipo de perturbação. Olhando para o diagrama vetorial de regime permanente, podemos determinar a posição dos eixos  $d$  e  $q$  desta máquina

com relação aos eixos de referência comuns  $Im$  e  $Re$ , como mostrado na figura 4.1.

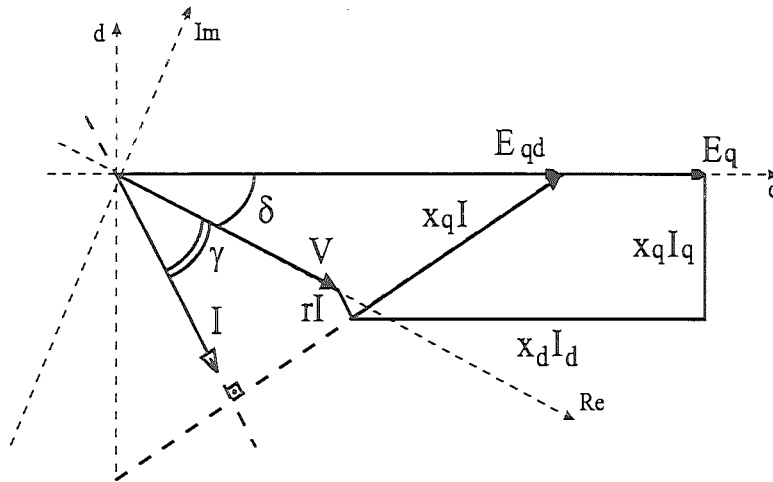


Figura 4.1: Diagrama vetorial para a barra “slack”

O diagrama vetorial da figura 4.1 refere-se a uma máquina de pólos salientes. A equação (4.1) fornece  $V \angle 0$  e  $I \angle \gamma$  para a barra “slack”, em relação ao sistema de referência comum (eixos  $Im$  e  $Re$ ). Em relação aos eixos  $d$  e  $q$  da máquina, esta tensão e esta corrente podem ser expressas por  $V = V_d + jV_q$  e  $I = I_d + jI_q$ . Inicialmente, no entanto, a posição dos eixos  $d$  e  $q$  não está determinada, e portanto os valores de  $V_d$ ,  $V_q$ ,  $I_d$  e  $I_q$  não podem ser calculados.

Calculando a tensão  $E_{qd}$  através da equação

$$E_{qd} = V + rI + x_q I \tag{4.2}$$

obteremos uma tensão fictícia que estará totalmente no eixo em quadratura (observe que este é um artifício que serve apenas para calcular a posição do eixo  $q$  com relação à referência girante comum). Calculando então o ângulo entre esta tensão e a tensão terminal  $V \angle 0$ , determinamos a posição do eixo

$q$  (e conseqüentemente do eixo  $d$ ) em relação aos eixos  $Im$  e  $Re$ . No caso da barra “slack”, em regime permanente, este ângulo será o ângulo  $\delta$  do gerador. Com isso, podemos agora calcular as componentes de eixo direto e em quadratura das tensões e correntes da máquina.

A equação (4.1) (ou equivalentemente a equação de fluxo de potência) fornece os ângulos das tensões nas barras do sistema em relação à referência da barra “slack”, ou seja, em relação à referência comum  $ReIm$ . Para as barras nas quais existam geradores conectados, estes ângulos serão os ângulos entre as tensões terminais destes geradores e a referência  $ReIm$ . De maneira análoga à barra “slack”, pode-se calcular a posição dos eixos  $d$  e  $q$  de cada gerador, olhando para o diagrama vetorial da figura 4.2.

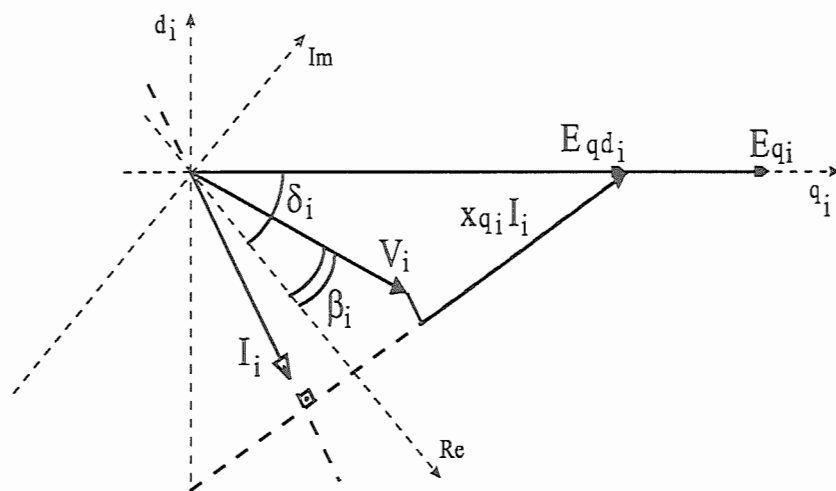


Figura 4.2: Diagrama vetorial para barras de geração

Não se deve confundir o ângulo entre a tensão terminal e o eixo em quadratura com o ângulo  $\delta$  do rotor. Isto é verdade apenas para a barra “slack”, pois a tensão nesta barra define a posição da referência síncrona comum  $ReIm$ . Em outras barras, o ângulo entre o eixo  $q$  e a tensão terminal  $V_i$  deve ser somado ao ângulo  $\beta_i$ , da tensão terminal em relação à referência  $ReIm$ ,

para se obter o ângulo do rotor  $\delta$ , como mostra a figura 4.2.

Após a determinação da posição dos eixos  $d$  e  $q$ , pode-se calcular as grandezas de regime permanente referidas a estes eixos. Para a máquina de pólos salientes, o ângulo  $\delta$  pode ser extraído da figura 4.2 e a tensão  $E'_q$  pode ser obtida a partir do diagrama da figura 4.3.

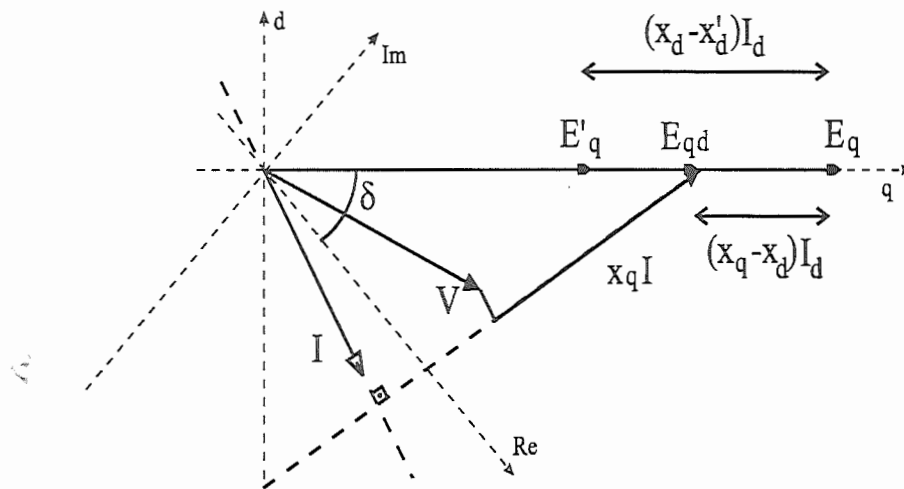


Figura 4.3: Cálculo da tensão  $E'_q$

Podem-se obter também, a partir da figura 4.3, as tensões  $E_q$ ,  $V_d$  e  $V_q$  e as correntes  $I_d$  e  $I_q$ , a partir das equações (3.3), (3.4) e (3.15). No entanto, o ângulo  $\delta$  e a tensão  $E'_q$  calculados serão as condições iniciais para estas variáveis de estado no transitório, razão pela qual foi dada ênfase na determinação dos mesmos.

Como dito anteriormente, os diagramas vetoriais das figuras 4.1, 4.2 e 4.3 referem-se a uma máquina de pólos salientes. Nas máquinas de pólos lisos, *em condições de regime permanente*, a tensão  $E_{qd}$  é exatamente igual à tensão  $E = E_q$ , pois as reatâncias  $x_d$  e  $x_q$  são iguais, e não há corrente no circuito de eixo em quadratura do rotor (correntes de Foucault são desprezíveis). Isso pode ser visto facilmente na figura 4.1, fazendo-se  $x_d = x_q$ . Entretanto, a

determinação da posição dos eixos  $d$  e  $q$  segue os mesmos procedimentos descritos para a máquina de pólos salientes, podendo basear-se nos mesmos diagramas vetoriais, apenas igualando  $E_{qd}$  a  $E_q$  (em condições de regime permanente).

Determinada então a posição da referência  $dq$ , calculam-se as condições iniciais para as variáveis de estado. Para máquinas de pólos lisos, além do ângulo  $\delta$  e da tensão  $E'_q$ , a modelagem inclui a tensão  $E'_d$  como variável de estado. Esta tensão é devida ao fluxo no circuito de eixo em quadratura do rotor. O cálculo destas variáveis pode ser feito a partir do diagrama vetorial da figura 4.4.

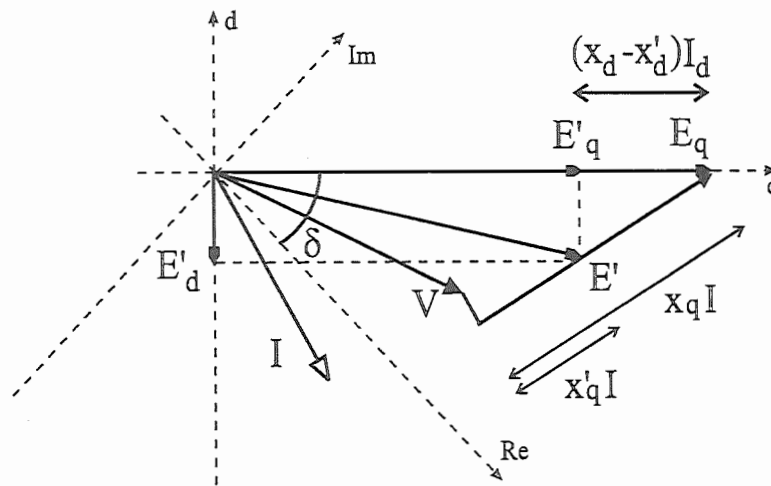


Figura 4.4: Cálculo das condições iniciais (pólos lisos)

## 4.2 Máquina em condições transitórias

Todos os diagramas vetoriais apresentados até agora referem-se à máquina em regime permanente, ou seja, no instante  $t = 0^-$  antes da ocorrência do distúrbio. Suponha agora que este distúrbio ocorra e vamos analisar o

instante  $t = 0^+$ .

Foi dito no capítulo anterior que os modelos de um e dois eixos não incluíam os enrolamentos amortecedores em seus equacionamentos, desprezando assim os efeitos subtransitórios. Dessa forma, iremos admitir que, no instante  $t = 0^+$ , a máquina já se encontra em condições transitórias, ao invés de subtransitórias.

Logo após a ocorrência do distúrbio, certas correntes e tensões no sistema se ajustam instantaneamente de acordo com a nova condição de operação do mesmo. Entretanto, há algumas grandezas nas máquinas síncronas que não podem sofrer variação instantânea. O ângulo  $\delta$  é um exemplo, pois o rotor da máquina não pode dar “saltos”. As tensões  $E'_q$  e  $E'_d$  também não variam instantaneamente, pois são proporcionais aos fluxos nos circuitos de eixo direto (campo) e em quadratura do rotor. Dessa forma, as condições iniciais para estas grandezas ( $t = 0^+$ ) são iguais aos seus valores de regime permanente ( $t = 0^-$ ).

Sendo assim, o ângulo  $\delta$  e a tensão  $E'$  se mantêm constantes logo após a ocorrência do distúrbio. As tensões  $E_q$  e  $E_d$ , no entanto, são proporcionais às correntes nos circuitos do rotor, que podem sofrer variação instantânea e, portanto, a tensão  $E$  não se manterá constante no instante  $t = 0^+$ . O diagrama vetorial para esta condição é igual ao mostrado na figura 3.2, para a máquina de pólos lisos (lembrando que, neste caso,  $x_d = x_q$ ). Para a máquina de pólos salientes, conectada à barra “slack”, este diagrama é mostrado na figura 4.5. Pode-se notar nesta figura que a tensão  $E' = E'_q$  está orientada no sentido do eixo em quadratura.

Em alguns estudos, a tensão  $E'_i$  mostrada no diagrama é utilizada, tornando possível a representação deste modelo através de um circuito equivalente. Deve-se ter em mente, no entanto, que esta tensão não é igual à tensão

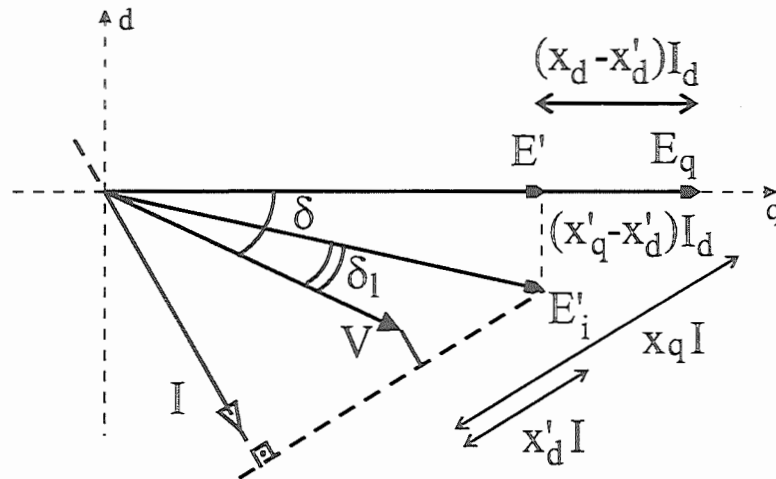


Figura 4.5: Máquina de pólos salientes em condições transitórias

$E = E'_q$  e, portanto, esta aproximação introduz um erro no equacionamento. Este erro será proporcional à diferença entre as reatâncias  $x'_q$  e  $x'_d$  e à magnitude da corrente  $I$ . Deve-se, portanto, tomar um certo cuidado ao fazer esta aproximação, especialmente em sistemas muito carregados.

A aproximação acima é comumente utilizada quando a máquina síncrona é representada pelo modelo clássico. Geralmente, os autores utilizam a hipótese de que o ângulo do rotor  $\delta$  coincide com o ângulo de carga do gerador  $\delta_l$ , que é o ângulo entre a tensão terminal e a tensão  $E'_i$ . Esta hipótese é razoável apenas se a tensão  $E'_i$  for próxima da tensão  $E'$ , devendo-se, mesmo ao utilizar o modelo clássico, ter em mente que uma aproximação está sendo feita.

Conhecendo as equações diferenciais da máquina e as condições iniciais para suas variáveis, além das equações da rede de transmissão podemos, por exemplo, resolver este conjunto de equações para determinar a resposta do sistema a um determinado distúrbio, ou colocar este conjunto na forma de espaço de estados para analisar e projetar controladores para o sistema.

Resta, então, expressar a potência elétrica em função das variáveis presentes no equacionamento, e isto será feito na seção seguinte.

### 4.3 Cálculo da potência e do torque elétricos

A potência elétrica injetada pelo gerador na barra terminal, em função da tensão nesta barra e da corrente injetada pelo gerador na mesma, pode ser descrita na referência comum por:

$$P_t = v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c = v_{abc}^T i_{abc} \quad (4.3)$$

Expressando estas grandezas na referência  $0dq$ , através da transformação de Park (e lembrando que a transformação adotada é ortogonal), temos:

$$v_{0dq} = P v_{abc} \Rightarrow v_{abc}^T = v_{0dq}^T (P^{-1})^T = v_{0dq}^T P \quad (4.4)$$

$$i_{0dq} = P i_{abc} \Rightarrow i_{abc} = P^{-1} i_{0dq} \quad (4.5)$$

Portanto,

$$P_t = v_{0dq}^T P P^{-1} i_{0dq} = v_{0dq}^T i_{0dq} \quad (4.6)$$

Admitindo condições balanceadas (máquina em regime permanente ou sujeita a faltas trifásicas, por exemplo), a equação (4.6) pode ser escrita sem a componente de seqüência zero:

$$P_t = v_d i_d + v_q i_q \quad (4.7)$$

Substituindo  $v_d$  e  $v_q$  em (4.7) pelas expressões correspondentes, dadas nas equações do estator em (2.14), obtemos:

$$P_t = (i_d \dot{\lambda}_d + i_q \dot{\lambda}_q) + (i_q \omega_m \lambda_d - i_d \omega_m \lambda_q) - r(i_d^2 + i_q^2) \quad (4.8)$$

Uma das hipóteses adotadas, tanto pelo modelo de dois eixos quanto pelos modelos de um eixo e clássico, é a de que os termos  $\dot{\lambda}$  podem ser desprezados. Sendo assim, a primeira parcela da soma, no segundo membro da equação (4.8) (que se refere à taxa de variação da energia do campo magnético do estator), pode ser omitida, resultando:

$$P_t = (i_q \omega_m \lambda_d - i_d \omega_m \lambda_q) - r(i_d^2 + i_q^2) \quad (4.9)$$

O último termo da soma na equação (4.9) representa as perdas resistivas no estator. Sendo assim, o primeiro termo expressa a potência transferida através do entreferro da máquina, que é efetivamente a potência elétrica presente na equação de “swing”, ou seja,

$$P_e = (i_q \lambda_d - i_d \lambda_q) \omega_m = T_e \omega_m \quad (4.10)$$

Outra hipótese adotada para os modelos em estudo foi a de que  $\omega_m$  pode ser considerado igual a 1.0 p.u. nas equações do estator. Como a equação (4.8) foi deduzida a partir das equações do estator, podemos considerar  $T_e = P_e$  (olhando para (4.10)) e utilizar a equação (3.36) como equação de “swing”.

Com o auxílio das equações (2.13), (3.15) e (3.20) e das definições de  $E_q$  e  $E_d$ , podemos desenvolver a equação (4.10), obtendo:

$$\begin{aligned} P_e &= \omega_m \lambda_d i_q - \omega_m \lambda_q i_d = \\ &= \omega_m (L_d i_d + k M_F i_F) i_q - \omega_m (L_q i_q + k M_G i_G) i_d = \\ &= (x_d \sqrt{3} I_d + \sqrt{3} E_q) \sqrt{3} I_q - (x_q \sqrt{3} I_q - \sqrt{3} E_d) \sqrt{3} I_d = \\ &= (x'_d \sqrt{3} I_d + \sqrt{3} E'_q) \sqrt{3} I_q - (x'_q \sqrt{3} I_q - \sqrt{3} E'_d) \sqrt{3} I_d \end{aligned} \quad (4.11)$$

Uma expressão geral para a potência elétrica na equação de “swing” (3.36) é, portanto:

$$P_e = 3E'_q I_q + 3E'_d I_d + 3(x'_d - x'_q) I_q I_d \quad (4.12)$$

Lembrando que a potência base adotada aqui é o produto da tensão de base  $\sqrt{3}V$  pela corrente de base  $\sqrt{3}I$ , ou seja,  $S_B = 3VI$ , temos, em p.u.,

$$P_e = E'_q I_q + E'_d I_d + (x'_d - x'_q) I_q I_d \quad (4.13)$$

Esta expressão pode ser ainda simplificada, de acordo com as particularidades do modelo adotado para a máquina em questão. No caso do modelo de dois eixos (gerador de pólos lisos), a expressão (4.13) é usada sem alterações. Quando a máquina está sendo equacionada através do modelo de um eixo (pólos salientes),  $E'_d = 0$  e, portanto:

$$P_e = E'_q I_q + (x'_d - x'_q) I_q I_d \quad (4.14)$$

Se o modelo clássico está sendo utilizado, também vale a condição anterior, ou seja,  $E'_d = 0$ . Além disso, é feita a hipótese de que  $x'_q = x'_d$ . Por fim, deve-se lembrar que a tensão  $E'_q$  é, nesse caso, constante. Portanto, a variação da potência elétrica dependerá apenas da variação da corrente  $I_q$ . A expressão da potência elétrica para o modelo clássico será

$$P_e = E'_q I_q \quad (4.15)$$

## 4.4 Modelagem final do sistema sem controladores

Os equacionamentos finais para os três modelos de máquina em estudo são obtidos substituindo-se as respectivas equações de  $P_e$ , obtidas na seção anterior, na equação de “swing” (3.36). Um resumo dessas equações, para cada um destes modelos, é fornecido a seguir.

## 4.4.1 Modelo de dois eixos

$$\dot{E}'_q = \frac{1}{\tau'_{do}} [E_{FD} - E'_q + (x_d - x'_d)I_d] \quad (4.16)$$

$$\dot{E}'_d = \frac{-1}{\tau'_{qo}} [E'_d + (x_q - x'_q)I_q] \quad (4.17)$$

$$\dot{\omega}_e = \frac{1}{2H} [P_m - E'_q I_q - E'_d I_d - (x'_d - x'_q) I_d I_q] \quad (4.18)$$

$$\dot{\delta} = \omega_e \quad (4.19)$$

$$V_q = E'_q - rI_q + x'_d I_d \quad (4.20)$$

$$V_d = E'_d - rI_d - x'_d I_q \quad (4.21)$$

## 4.4.2 Modelo de um eixo

$$\dot{E}'_q = \frac{1}{\tau'_{do}} [E_{FD} - E'_q + (x_d - x'_d)I_d] \quad (4.22)$$

$$\dot{\omega}_e = \frac{1}{2H} [P_m - E'_q I_q - (x'_d - x'_q) I_d I_q] \quad (4.23)$$

$$\dot{\delta} = \omega_e \quad (4.24)$$

$$V_q = E'_q - rI_q + x'_d I_d \quad (4.25)$$

$$V_d = -rI_d - x'_q I_q \quad (4.26)$$

## 4.4.3 Modelo clássico

$$\dot{\omega}_e = \frac{1}{2H} [P_m - E'_q I_q] \quad (4.27)$$

$$\dot{\delta} = \omega_e \quad (4.28)$$

$$V_q = E'_q - rI_q + x'_d I_d \quad (4.29)$$

$$V_d = -rI_d - x'_d I_q \quad (4.30)$$

# Bibliografia

- [1] B. Adkins and R. G. Harley. *The General Theory of Alternating Current Machines*. Chapman and Hall, London, 1979.
- [2] L. F. C. Alberto. *Cálculo do Torque Assíncrono em Máquinas Síncronas*. Relatório de Atividade Programada, EESC-USP, São Carlos, 1999.
- [3] P. M. Anderson and A. A. Fouad. *Power System Control and Stability*. IEEE Press, New York, 1994.
- [4] C. Concordia. *Synchronous Machines*. Wiley, New York, 1951.
- [5] E. W. Kimbark. *Power System Stability, Volume III - Synchronous Machines*. IEEE Press, New York, 1995.
- [6] P. Kundur. *Power System Stability and Control*. McGraw-Hill, New York, 1994.
- [7] W. A. Lewis. "a basic analysis of synchronous machines". *AIEE Transactions*, 1958.
- [8] H. A. Nour Eldin, H. J. Nern, and E. Lerch. "a new formulation of the synchronous generator model using space hypercomplex and quaternion". *IEEE Power Engineering Review*, pages p.40-9, Dec., 1999.

- [9] Power System Damping Ad Hoc Task Force of the Power System Dynamic Performance Committee. "damping representation for power system stability studies". *IEEE Transactions on Power Systems*, v.14, n.1:p.151-7, Feb., 1999.
- [10] R. H. Park. "two-reaction theory of synchronous machines - generalized method of analysis, part i". *Transactions AIEE*, 1929.
- [11] K. Prabhashankar and W. Janischewsyj. "digital simulation of multi-machine power systems for stability studies". *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, v.PAS-87, n.1:p.73-80, Jan., 1968.
- [12] A. W. Rankin. "per unit impedances of synchronous machines". *AIEE Transactions*, 1945.
- [13] W. D. Stevenson Jr. *Elementos de Análise de Sistemas de Potência*. McGraw-Hill, São Paulo, 1986.
- [14] C. C. Young. "equipment and system modeling for large-scale stability studies". *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, v.PAS-91, n.1:p.99-109, Jan., 1972.

# APÊNDICE A

## Valores de base para a máquina síncrona

A escolha do sistema de normalização para a máquina síncrona é um assunto que, apesar de ter um certo grau de complexidade, é pouco abordado na literatura. Como na grande maioria dos estudos de estabilidade os dados de máquinas são fornecidos em p.u. nas bases adequadas, nenhuma conversão é necessária. Entretanto, uma série de dúvidas podem ocorrer ao estudante devidas à falta de informação a respeito da normalização.

Este apêndice tem por finalidade definir e explicar o sistema de normalização que é usado neste texto, e compará-lo com outros dois sistemas presentes na literatura. Estes dois sistemas serão explicados brevemente e serão fornecidas referências para mais detalhes sobre os mesmos. Espera-se que, desta forma, algumas das dúvidas mais freqüentes do estudante possam ser resolvidas.

Para o leitor que já tenha estudado os capítulos 2 e 3, a seção A.1 trará como informação nova apenas a conversão de grandezas, quando a base de potência da máquina for diferente da base da rede. As demais informações contidas nesta seção já foram fornecidas naqueles capítulos. Entretanto, elas foram incluídas também neste apêndice para que o leitor possa ter uma visão geral dos problemas que envolvem a conversão para p.u., e possa comparar

o sistema de normalização utilizado neste texto com os outros dois que serão apresentados.

## A.1 Bases para os modelos do capítulo 3

De acordo com [13], os valores de base geralmente escolhidos para um determinado ramo de circuito da rede de transmissão são a tensão de linha  $\sqrt{3}V$  deste ramo (sendo  $V$  o valor rms da tensão de fase) e a potência trifásica  $3S$  do sistema (sendo  $S$  o valor rms da potência monofásica do sistema).

Como o gerador estará conectado a uma barra terminal, que fará parte de um ramo de circuito do sistema de transmissão, é interessante manter as bases deste ramo para as equações da máquina, evitando assim o problema de mudança de bases. A tensão terminal do gerador será igual à tensão da barra na qual este estará conectado, e por isso suas demais tensões não irão diferir muito da tensão de base do sistema.

Entretanto, a potência nominal do gerador, em sistemas de grande porte, é geralmente muito menor do que a potência base do sistema. Por essa razão, quando os dados do gerador são fornecidos tendo como base sua potência nominal, estes dados terão que ser convertidos para a base do sistema, para se obter um equacionamento coerente. Essa questão será abordada mais adiante.

Os valores de base que foram escolhidas neste texto são:

- $S_B = 3S \Rightarrow$  Potência base trifásica do estator;
- $V_B = \sqrt{3}V \Rightarrow$  Tensão rms de linha do estator.

As demais grandezas de base são calculadas a partir das relações entre as duas acima. Em alguns casos, pode ser conveniente escolher outras grandezas

de base que não preservem estas relações. Para os modelos estudados nos capítulos 3 e 4, contudo, não há nenhuma vantagem em utilizar este procedimento. Sendo assim, a corrente e a impedância de base ficam determinadas por

- $I_B = S_B/V_B \Rightarrow \sqrt{3}$  vezes a corrente rms de linha do estator;
- $Z_B = V_B/I_B \Rightarrow$  Impedância de base do estator.

Nos modelos apresentados nos capítulos 3 e 4, as grandezas do rotor são representadas por tensões equivalentes no estator. Sendo assim, para tais modelos, as bases do rotor não têm influência no equacionamento normalizado.

A seção 2.2 mostra que, quando a transformação de Park ortogonal  $\mathbf{P}$  é aplicada,  $V_d$ ,  $V_q$ ,  $I_d$  e  $I_q$  resultam, em unidades MKS, iguais às projeções dos vetores  $\sqrt{3}V$  e  $\sqrt{3}I$  nos eixos  $d$  e  $q$ , respectivamente. Além disso, pode ser visto na seção 2.6 que, ao representar grandezas do rotor por tensões no estator, obtemos termos iguais aos valores rms destas tensões multiplicados por  $\sqrt{3}$ , no sistema MKS, novamente devidos à utilização da transformação da transformação ortogonal.

Por essa razão, vemos que, em unidades MKS (ou seja, antes da normalização), as equações dos modelos estudados nos capítulos 3 e 4 envolvem o fator  $\sqrt{3}$  multiplicando os valores rms das tensões e correntes, e o fator 3 multiplicando o valor rms da potência.

Com o sistema de normalização definido nesta seção, estes fatores desaparecem das equações, ficando estas coerentes com o conjunto de equações  $\mathbf{I} = \mathbf{YV}$  da rede de transmissão. Sendo assim, quando os dados do gerador são fornecidos nas bases de tensão e potência do sistema, não há nenhum cuidado especial a ser tomado (nos modelos de um e dois eixos e no modelo

clássico) com relação à normalização.

Se os dados em p.u. do gerador estiverem referidos à sua potência base nominal trifásica, uma mudança de base será necessária, como mencionado anteriormente. Os valores de potência nas equações da máquina terão que ser convertidos para a base do sistema, para que o conjunto de equações final fique coerentemente expresso numa base comum.

A conversão para uma nova base de potência é simples e pode ser feita da seguinte forma:

$$S_{nu} = \frac{S_{Ba}}{S_{Bn}} S_{au} \quad (31)$$

sendo  $S_{nu}$  o novo valor em p.u. da potência,  $S_{au}$  o antigo valor disponível de potência em p.u.,  $S_{Ba}$  a base de potência à qual se referia o antigo valor em p.u. e  $S_{Bn}$  a nova base de potência para a qual se quer converter as grandezas. No nosso caso,  $S_{Ba}$  será a base de potência trifásica do gerador e  $S_{Bn}$  a base de potência da rede.

As tensões não sofrem alterações, pois a base de tensão permanece igual. Já as correntes, as impedâncias e a constante  $H$  são modificadas em virtude da alteração da base de potência. Definindo

$$m = \frac{S_{Ba}}{S_{Bn}} \quad (32)$$

podemos obter facilmente as expressões para mudança de base destas grandezas em função desta constante  $m$ . As expressões são listadas a seguir:

$$S_{nu} = m S_{au} \quad (33)$$

$$I_{nu} = m I_{au} \quad (34)$$

$$Z_{nu} = \frac{1}{m} Z_{au} \quad (35)$$

$$H_n = m H_a \quad (36)$$

Nas equações (33) a (36), os subscritos *au* indicam o valor em p.u. na base antiga e os subscritos *nu* indicam o valor em p.u. na nova base. A constante *H* é uma constante de tempo e tem dimensão de segundo [s], mas é definida como a energia armazenada no rotor, quando este gira à velocidade síncrona, dividida pela potência base. Portanto, esta constante de tempo irá mudar quando a base de potência sofrer alteração.

Substituindo os novos valores nas equações 4.16 a 4.21, obtemos as novas equações para o modelo de dois eixos. Fazendo a mudança de base na equação de  $E'_q$ , por exemplo, obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{E}'_{qa} &= \frac{1}{\tau'_{doa}} \left[ E_{FDa} - E'_{qa} + \frac{1}{m} (x_{da} - x'_{da}) m I_{da} \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{E}'_{qn} &= \frac{1}{\tau'_{don}} \left[ E_{FDn} - E'_{qn} + (x_{dn} - x'_{dn}) I_{dn} \right] \end{aligned} \quad (37)$$

na qual os subscritos *n* indicam as grandezas na nova base e os subscritos *a* indicam as grandezas na base antiga. Uma análise semelhante nas demais equações do modelo de dois eixo, assim como nas equações dos outros dois modelos, indica que a forma das equações não é alterada com a mudança de base. Sendo assim, basta converter os valores das reatâncias  $x_d$ ,  $x_q$ ,  $x'_d$  e  $x'_q$  e da constante *H*, e substituí-los nas equações originais, para que as equações da máquina fiquem expressas na mesma base das equações da rede e formem com estas um conjunto de equações compatíveis entre si.

## A.2 Bases para o modelo de sétima ordem

Conforme dito na seção 2.3, as cinco equações elétricas do estator dadas em (2.14) podem ser representadas por apenas dois circuitos equivalentes. Para isso, as indutâncias mútuas entre dois circuitos quaisquer devem ser representadas por circuitos equivalentes T, o que por sua vez implica na

necessidade de fluxos mútuos concatenados iguais nestes circuitos.

Essa exigência pode ser atendida, em p.u., com uma normalização conveniente. Escolhidas as bases para o estator, impõe-se a condição de fluxos mútuos iguais e com isso determinam-se as bases do rotor em função das bases do estator.

O sistema de normalização adotado pelos fabricantes dos Estados Unidos adota o procedimento acima (veja o apêndice C em [3]). Entretanto, a transformação de Park utilizada por estes fabricantes é a transformação original  $\mathbf{P}'$ , que não é ortogonal. Estes dois fatos combinados fazem com que as bases escolhidas para o estator sejam diferentes das bases usuais do sistema, para simplificar a normalização das grandezas do rotor.

As bases adotadas pelos fabricantes americanos são:

- $V_{BE} = \sqrt{2}V \Rightarrow$  Tensão de pico de fase do estator;
- $I_{BE} = \sqrt{2}I \Rightarrow$  Corrente de pico de linha do estator.

De acordo com [3] (apêndice C), a exigência de fluxos mútuos iguais leva à escolha das seguintes bases para o rotor:

- $V_{BR} = (3M_F V)/\sqrt{2}L_{m1}$
- $I_{BR} = (\sqrt{2}L_{m1}I)/M_F$

sendo  $L_{m1}$  a indutância de magnetização do circuito de eixo direto do estator. Pode-se ver então que, com essa particular escolha das bases, a potência base no rotor fica igual à potência trifásica no estator, ou seja,  $S_{BR} = 3VI$ .

É interessante que as bases de potência do estator e do rotor sejam iguais, novamente para facilitar a construção do circuito equivalente [3]. Por isso, impõe-se que a base de potência no estator seja  $S_{BE} = 3VI = (3V_{BE}I_{BE})/2$ ,

introduzindo-se assim uma constante na relação entre potência, tensão e corrente.

A referência [3] afirma que a utilização da transformação ortogonal, aliada à escolha de uma base conveniente, elimina o problema acima. A transformação  $\mathbf{P}$  é usada e as bases escolhidas são:

- $V_{BE} = V \Rightarrow$  Tensão rms de fase do estator;
- $I_{BE} = I \Rightarrow$  Corrente rms de linha do estator.
- $V_{BR} = (kM_F V)/L_{m1}$
- $I_{BR} = (L_{m1} I)/kM_F$
- $S_{BE} = S_{BR} = VI \Rightarrow$  Potência monofásica no estator.

Com essa escolha de valores de base, a referência [3] afirma ser possível que:

- As equações de tensão da máquina tenham a mesma forma, tanto em p.u. quanto em unidades M.K.S.;
- A equação de potência também tenha a mesma forma, tanto em p.u. quanto em unidades M.K.S.;
- As indutâncias mútuas possam ser representadas como circuitos T;
- As principais impedâncias em p.u. fornecidas tradicionalmente pelos fabricantes possam ser mantidas no sistema adotado, para conveniência de seus usuários.

Não fica bem claro nesta referência, no entanto, o problema da base de tensão da máquina ser diferente da base de tensão do sistema de transmissão. Entretanto, a discussão deste problema já extrapola os objetivos desta apostila, uma vez que o modelo de sétima ordem não é priorizado no texto. O leitor interessado encontrará mais informações a respeito em [12] e [7].

# APÊNDICE B

## Enrolamentos amortecedores

Nos geradores elétricos síncronos de pólos salientes, o circuito de campo consiste em um enrolamento concentrado disposto em torno dos pólos do rotor, ao qual, normalmente, aplica-se uma tensão d.c. Nos geradores de pólos lisos, este enrolamento é distribuído ao longo de ranhuras na superfície do rotor.

Além deste circuito, é comum encontrar outros caminhos de circulação de corrente no rotor, tais como:

- Barras curto-circuitadas dispostas ao longo das cabeças polares em forma de gaiola de esquilo;
- Um enrolamento adicional curto-circuitado, em torno do pólo, que dá sustentação mecânica ao enrolamento de campo, conhecido como colar de campo;
- Caminhos fechados por dentro do rotor, sólido ou laminado, por onde circulam correntes de Foucault.

Todos estes caminhos de corrente podem ser considerados (ou modelados como) *enrolamentos amortecedores*, devido ao efeito de amortecimento provocado por estes na máquina. Dentre os efeitos provocados pelos dois pri-

meiros tipos de enrolamentos (gaiola de esquilo e colar de campo), podemos destacar:

- Reduzir o efeito de torques pulsantes;
- Amortecer oscilações;
- Evitar distorção da forma de onda da tensão na operação com cargas desbalanceadas;
- Fornecer torque de freio durante uma falta assimétrica;
- Fornecer torque adicional para sincronizar geradores;
- Reduzir esforços na isolação do enrolamento de campo.

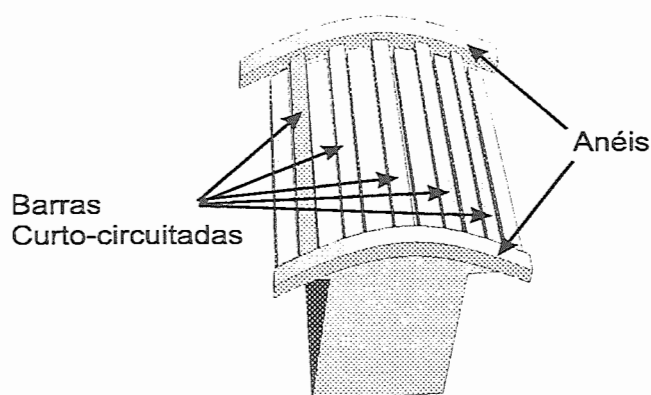


Figura 6: Enrolamento amortecedor tipo gaiola de esquilo

Na seção 2.5 estão discutidos e equacionados os efeitos dos enrolamentos amortecedores e das correntes de Foucault nas indutâncias e constantes de tempo transitórias e subtransitórias da máquina. O torque de amortecimento proporcionado por estes enrolamentos é usualmente denominado *torque*

*assíncrono*, e uma discussão detalhada sobre este torque pode ser encontrada em [2]. Na seqüência deste apêndice, descreve-se com mais detalhes o enrolamento do tipo gaiola de esquilo.

O enrolamento tipo gaiola de esquilo é o mais comumente encontrado em máquinas síncronas. Este enrolamento constitui-se de barras de material condutor encaixadas em ranhuras nas cabeças polares do rotor e curto-circuitadas em suas extremidades por um anel condutor, como mostra a figura 6.

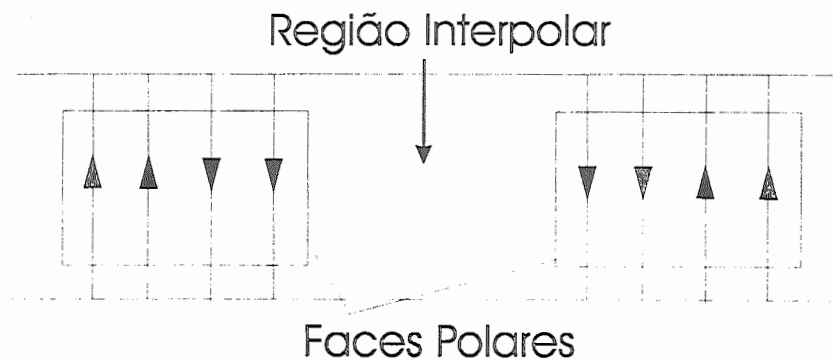


Figura 7: Fluxo gerado no eixo direto

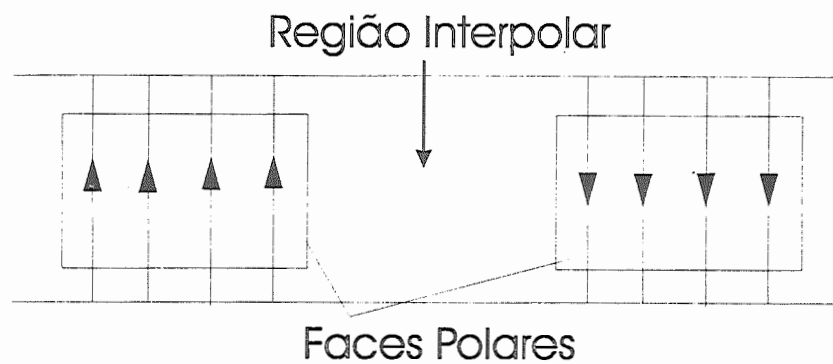


Figura 8: Fluxo gerado no eixo em quadratura

As figuras 7 e 8 mostram um enrolamento amortecedor do tipo gaiola de

esquilo, planificado, do rotor de uma máquina de dois pólos. Nestas figuras, podem-se ver os caminhos de corrente que se formam através do enrolamento do tipo gaiola de esquilo.

Este tipo de enrolamento é usualmente modelado por dois circuitos equivalentes, sendo um no eixo direto e outro no eixo em quadratura. A razão para esta modelagem reside no fato de que, apesar de apenas um enrolamento amortecedor estar presente, os caminhos de corrente formados através do mesmo induzem fluxo tanto no eixo direto (através do próprio rotor, figura 7) quanto no eixo em quadratura (através da região interpolar, figura 8). Uma modelagem mais rigorosa poderia utilizar  $m$  circuitos no eixo direto e  $n$  circuitos no eixo em quadratura [1], mas na grande maioria das vezes um circuito em cada eixo é suficiente para modelar satisfatoriamente este efeito.