

Universidade de São Paulo
Escola de Engenharia de São Carlos
Departamento de Engenharia de Estruturas

INTRODUÇÃO À INSTABILIDADE
DAS ESTRUTURAS
(FLAMBAGEM)

José Elias Laier

São Carlos, março de 2004
reimpressão

PREFÁCIO

Este texto tem por objetivo adequar a abordagem do problema de flambagem, assunto da disciplina de Resistência dos Materiais, dentro do atual enfoque dado pelos códigos construtivos nacionais. No passado essa questão era tratada pelo conhecido "Processo ω ", cujo parâmetro básico consistia na carga crítica associada ao ponto de bifurcação do equilíbrio; agora o tratamento é voltado para o problema da flexo-compressão em teoria de segunda ordem. O presente texto vem, pois, atualizar os conhecimentos pertinentes a esse assunto na disciplina de Resistência dos Materiais oferecida na Escola de Engenharia de São Carlos da USP.

INDICE

1 - INTRODUÇÃO	1
2 - PRIMEIRO CASO ELEMENTAR	5
3 - SEGUNDO CASO ELEMENTAR	11
4 - TERCEIRO CASO ELEMENTAR	14
5 - QUARTO CASO ELEMENTAR	16
6 - QUINTO CASO ELEMENTAR	18
7 - SEXTO CASO ELEMENTAR	21
8 - COMENTÁRIOS GERAIS	24
9 - TRATAMENTO SEGUNDO A GEOMETRIA DOS PEQUENOS DESLOCAMENTOS	25
10 - ESTABILIDADE DE BARRAS NO REGIME ELÁSTICO-LINEAR	32
11 - INSTABILIDADE DE BARRAS NO REGIME NÃO LINEAR	46
12 - OBSERVAÇÕES FINAIS	49

INSTABILIDADE DAS ESTRUTURAS

(FLAMBAGEM)

1 - INTRODUÇÃO

O estranho comportamento verificado ao se comprimir axialmente uma régua de plástico constitui, sem dúvida, a maneira mais simples e mais conhecida de se visualizar o fenômeno da instabilidade, ou flambagem, das estruturas. A propósito vale até assinalar que é bastante comum observar crianças do curso primário, quando não do maternal, realizando essa intrigante experiência. Pois bem, uma sucinta descrição do que acontece nesse experimento é a seguinte: Inicialmente, a régua, em ausência de compressão, apresenta-se, naturalmente, com uma configuração praticamente reta (fig. 1a)). Aplicando-se uma compressão axial com intensidade crescente, a um certo valor dessa compressão verifica-se um rápido e forte arqueamento (flambagem) da régua (fig. 1b)). Uma vez iniciado o arqueamento, a ruptura da régua pode ser atingida com aumento até imperceptível da força compressora, como já é do conhecimento desde a infância. Além disso, trata-se de uma ruptura típica de flexão, que ocorre naturalmente na região central da régua (região de maior momento nesse caso), conforme ilustra-se na figura 1c). Grosso modo, o diagrama de força de compressão contra flecha correspondente é o ilustrado na figura 2.

Por outro lado, é sabido também que eventual travamento na região central, por exemplo, eleva bastante o valor da força que promove o arqueamento (fig. 3a)). Contudo, embora a configuração do arqueamento não seja obviamente a mesma, a forma do diagrama exibido na figura 2 mantém-se, apenas sofrendo alteração a escala de forças e de flechas. Além disso, em havendo um travamento contínuo (fig. 3b)) a ruptura da peça não mais ocorre por flambagem, verificando-se então ruptura apenas quando se atinge a tensão de ruptura do material por compressão. Em verdade, esse tipo de ruptura pode ser atingido sem a necessidade

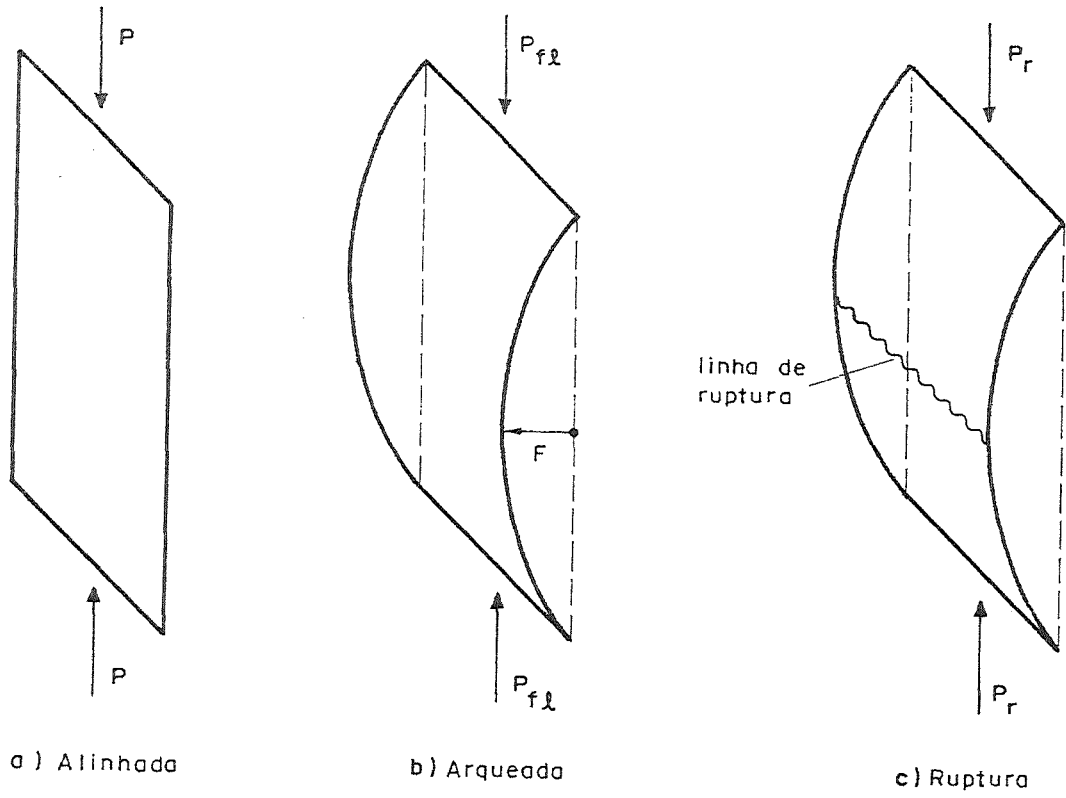


FIG. 1 — CONFIGURAÇÕES DA RÉGUA COMPRIMIDA

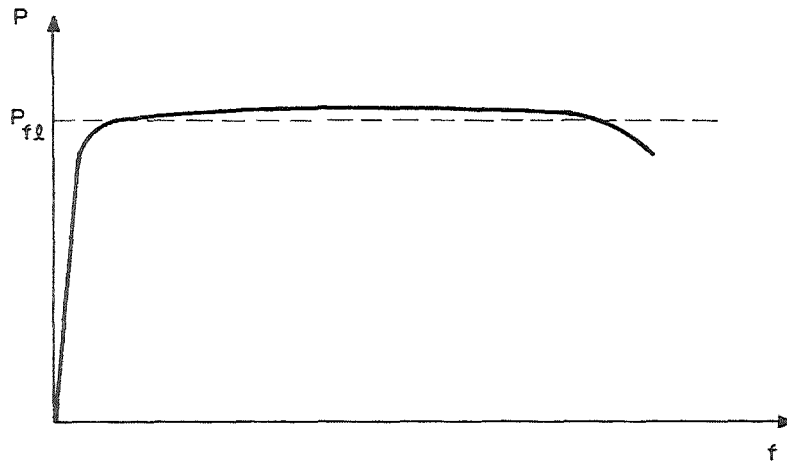


FIG. 2 — DIAGRAMA TÍPICO FLECHA — COMPRESSÃO

de um travamento contínuo, bastando apenas que os pontos de travamento sejam adequadamente espaçados, ou seja, mantendo-se vão livres relativamente curtos - quando se considerar que um vão é curto, é uma questão a ser oportunamente esclarecida.

Essa experiência elementar evidencia também que o fenômeno da flambagem apresenta características marcadamente de ordem dinâmica, porquanto o arqueamento forma-se bruscamente, mediante movimentação um tanto rápida. Assim sendo, uma descrição completa dos acontecimentos exige, obviamente, a formulação das equações de movimento, ou seja, exige-se uma abordagem segundo a Dinâmica das Estruturas. Do ponto de vista dinâmico, o que ocorre na flambagem é que a estrutura, quando do arqueamento, vai para um lado e não retorna, ou seja, tem-se nessa situação uma vibração com frequência nula, ou período infinito. Cabe aqui registrar que já foram realizados estudos experimentais de frequência natural, no sentido de se avaliar a segurança em relação à instabilidade de estruturas existentes.

Uma maneira mais técnica e mais eficiente para se interpretar o problema da instabilidade está bastante em evidência no diagrama da figura 2, ou seja, a estrutura, quando do forte arqueamento (flambagem), experimenta, em verdade, uma brusca e violenta diminuição de rigidez, no caso lateral; o diagrama nessa altura do carregamento é praticamente horizontal. Em suma, a rigidez lateral em barras solicitadas axialmente deixa de ser uma característica puramente elástica e geométrica, e passa a depender também de características mecânicas (solicitação axial). A redução da rigidez com o aumento crescente da força axial reduz a capacidade de resposta da barra, tanto estática (grandes flechas para pequenos acréscimos de carga na altura da ocorrência do arqueamento) como também dinamicamente (redução da frequência natural).

De início, o fenômeno da flambagem já deixa evidente não ser possível negligenciar, na formulação do equilíbrio, a forma deformada da barra (no caso exemplificado uma régua de plástico), ou seja, o estado de solicitação (no caso flexão) depende do estado de deslocamento (arqueamento), ao contrário do que sucede no estudo corrente da estática das estruturas, onde a

forma deformada não altera o estado de solicitação. O estudo do equilíbrio nessas condições é dito considerado em teoria de primeira ordem; o estudo da flambagem, por sua vez, é conduzido dentro do que se denomina teoria de segunda ordem. Além disso, é evidente também que o fenômeno da flambagem está, em verdade, atrelado à natureza do equilíbrio (para compressão até um certo limite tem-se um equilíbrio estável, além desse limite, o equilíbrio deixa de ser estável na configuração reta e encontra uma nova posição (arqueada) onde o equilíbrio volta a ser novamente estável. Em relação à natureza do equilíbrio, os exemplos ilustrados na figura 4 são bastante sugestivos. No caso do equilíbrio mostrado na figura 4a) tem-se, obviamente, um equilíbrio de natureza estável para a esfera, pois, qualquer perturbação introduzida na esfera (um peteleco, por exemplo), leva a um movimento oscilatório em torno da posição de repouso, e esse movimento é tão menos intenso quanto menos intensa a perturbação. Já no caso ilustrado na figura 4b) a situação é o contrário; qualquer perturbação, por menor que seja, principia um movimento sem retorno (vibração de frequência nula - vai mas não volta), e o equilíbrio na posição de repouso é dito de natureza instável. O equilíbrio exibido na figura 4c) é dito indiferente, pois, em qualquer posição, a esfera pode ser equilibrada; todavia, em não havendo atrito, iniciado um movimento ele se mantém indefinidamente e a esfera vai embora. Em verdade, o equilíbrio indiferente é uma abstração, pois trata-se de uma situação muito particular, que serve de divisória para as naturezas estável e instável.

O presente texto, de carácter eminentemente introdutório ao assunto, é voltado principalmente para a conceituação do fenômeno da flambagem. Para tanto, de início são abordados casos elementares e ilustrados dos vários aspectos do problema. Em seguida estuda-se o problema da flambagem de barras, mediante uma formulação mais voltada para a atual abordagem desse problema nos códigos construtivos nacionais; todavia sem entrar em detalhes; mesmo porque, ao nível de detalhes, as colocações, por exemplo, dos códigos de estruturas de concreto armado e de estruturas metálicas são um tanto diferentes. A propósito, tais

códigos vão ser objeto de uma apreciação mais aprofundada nas disciplinas do ciclo profissionalizante dedicadas ao projeto de tais tipos construtivos.

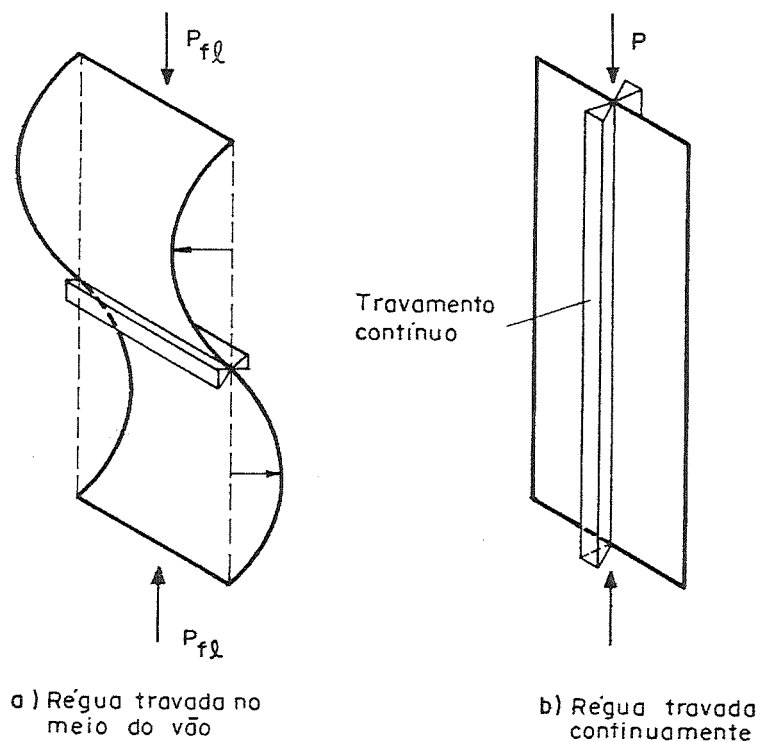


FIG. 3 - TRAVAMENTOS DA RÉGUA

2 - PRIMEIRO CASO ELEMENTAR

Considere-se, em primeiro lugar, o problema de uma barra suposta indeformável, vinculada na base por um apoio fixo, tendo uma mola rotativa apresentando comportamento perfeitamente elástico-linear junto a esse apoio. No topo essa barra é solicitada por uma carga vertical aplicada com uma excentricidade, conforme ilustra-se na figura 5a).

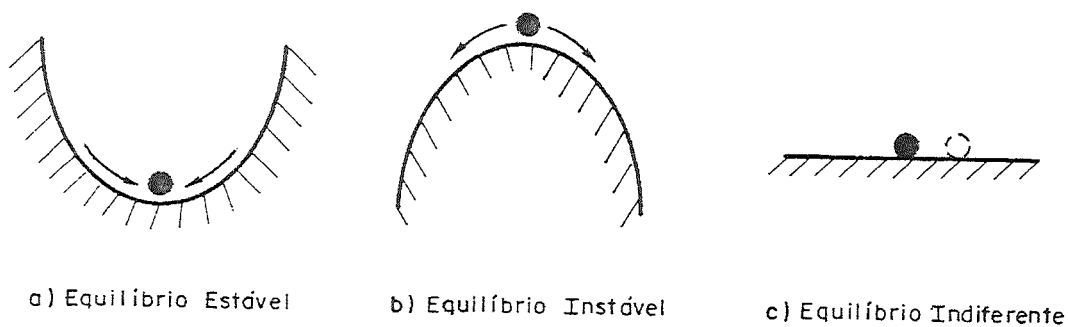


FIG. 4 — NATUREZAS DO EQUILÍBRIO

Estudando-se agora as condições de equilíbrio numa configuração genérica de sollicitação e deslocamento (fig. 5b)) tem-se (fig. 5c)):

$$P\ell (\text{sen}\theta + \epsilon \text{cos}\theta) = \kappa\theta \quad (1)$$

onde ℓ é o comprimento da barra, ϵ a fração do comprimento da barra que define a excentricidade da carga P aplicada, κ a constante da mola rotativa e θ o deslocamento angular experimentado. Do expresso em (1) decorre:

$$P = \frac{\kappa}{\ell} \cdot \frac{\theta}{\text{sen}\theta + \epsilon \text{cos}\theta} \quad (2)$$

onde a carga é posta, agora, em termos dos parâmetros elástico (κ), geométrico (ℓ) e de um fator que depende do movimento θ e do parâmetro de excentricidade ϵ . Cabe nesse ponto assinalar que

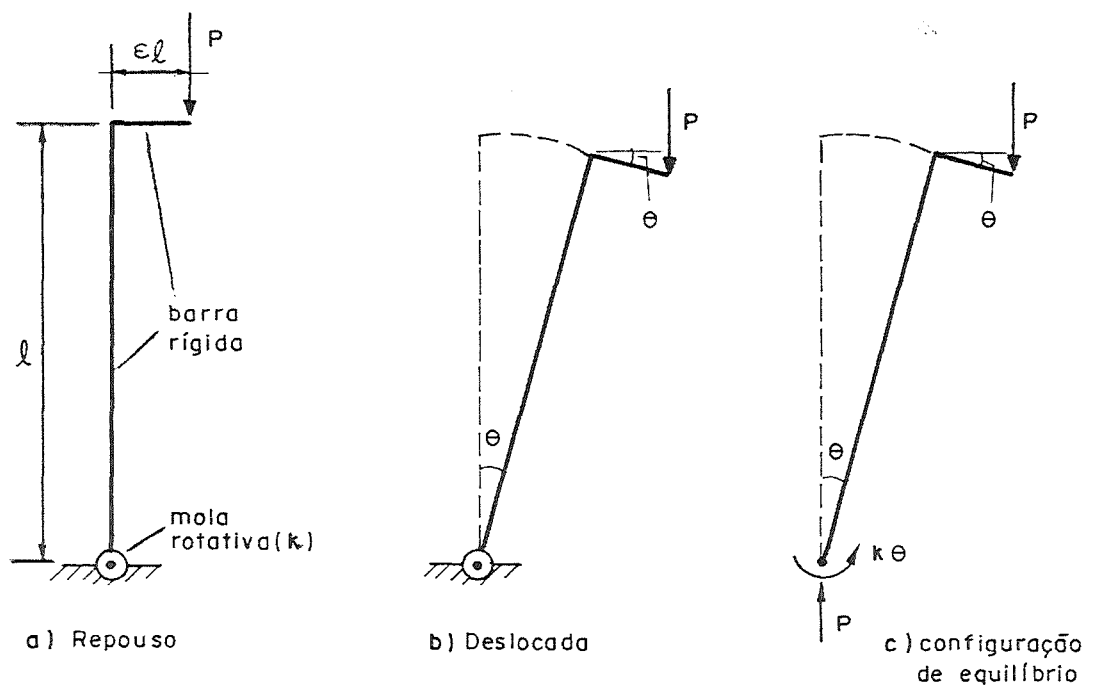


FIG. 5 — BARRA RIGIDA COM MOLA ROTATIVA

o mencionado fator, ou seja:

$$f(\theta, \varepsilon) = \frac{\theta}{\text{sen}\theta + \varepsilon \text{cos}\theta} = \frac{P}{k/l} \quad (3)$$

governa o comportamento da estrutura em estudo, ou seja, exprime na forma adimensional a capacidade de resposta da estrutura à solicitação em jogo. Assim, para se descrever a história do equilíbrio da barra em questão é conveniente estudar em profundidade o que de fato esse fator tem a contar.

Exibe-se na figura 6 a variação do fator $f(\theta, \varepsilon)$ para θ variando de -90° até $+90^\circ$, e ε assumindo valores ± 0.1 , ± 0.01 e 0.0 (nulo). Um exame dessa figura evidencia, em primeiro lugar, que, para qualquer valor de ε , a capacidade da estrutura equilibrar a carga P é crescente para valores crescentes do giro θ . Cabe além disso chamar a atenção para duas situações particulares, ou seja, pelo fato de não se cogitar sobre a resistência da barra indeformável, tem-se, por exemplo, para ε positivo, equilíbrio possível com carga de tração ou compressão infinita para θ negativo, tal que (fig. 7a)):

$$\theta = \text{arc.tg.}\varepsilon \quad (4)$$

pois a reação de apoio acha-se, nessa configuração, alinhada com a carga; havendo, obviamente, ainda uma reação da mola a ser combatida. Por outro lado, na situação de repouso ($\theta = 0$.) a resposta da estrutura é nula (fig. 7b)).

Um outro fato importante evidenciado na figura 6 é o seguinte. A curva correspondente ao valor $\varepsilon = 0$ trata-se, em verdade, da curva limite (função limite) para valores de ε tendendo para zero. Todavia, do ponto de vista matemático algo de intrigante ocorre nessa situação limite. De fato, para qualquer valor de ε diferente de zero, o fator $f(\theta, \varepsilon)$ apresenta descontinuidade, saltando do infinito negativo para o infinito positivo na vizinhança do ângulo expresso em (4); mas, para ε nulo, não mais ocorre descontinuidade, porquanto a função $\theta/\text{sen}(\theta)$ é contínua em $\theta = 0$, assumindo nesse ponto, como se sabe, valor unitário.

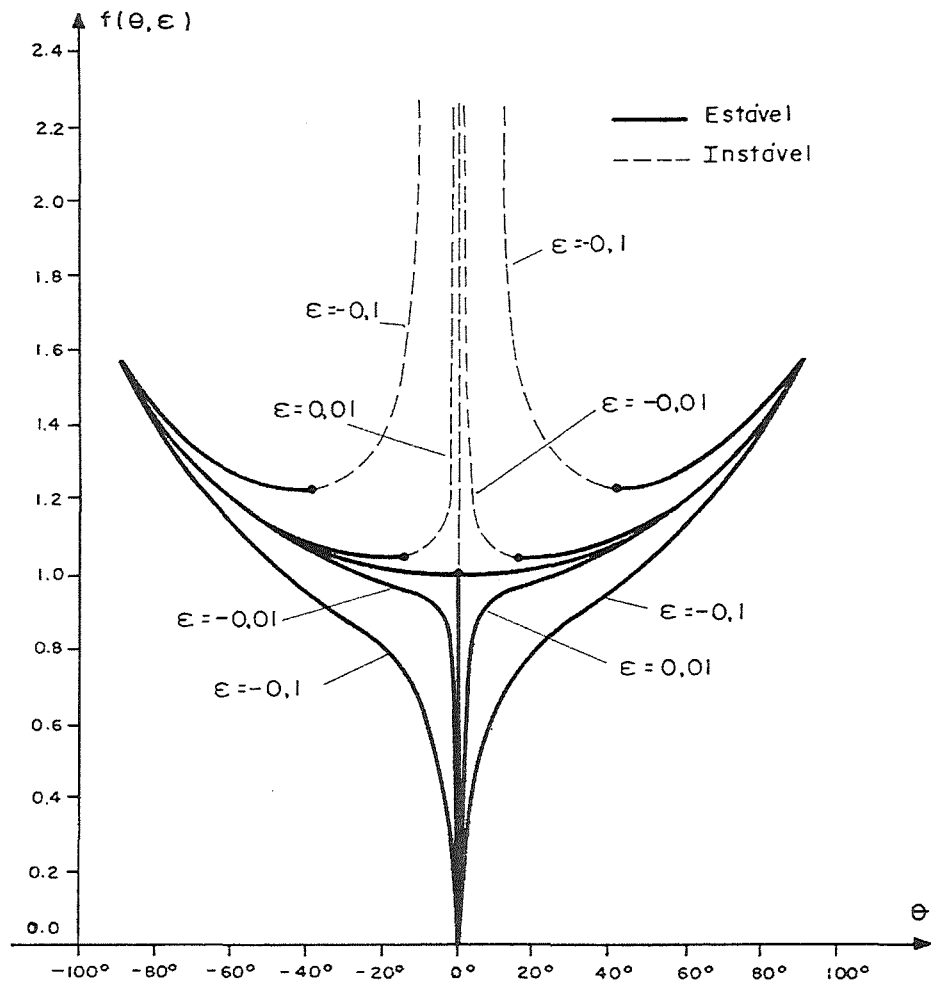


FIG. 6 — BIFURCAÇÃO SIMÉTRICA ESTÁVEL

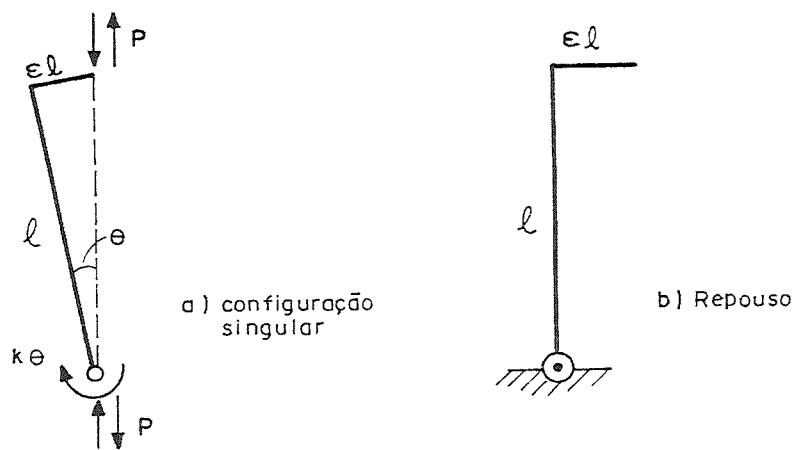


FIG. 7 — SITUAÇÕES PARTICULARES DE EQUILÍBRIO

No sentido de facilitar as discussões em tela, destaca-se na figura 8 a representação gráfica do fator $f(\theta, \epsilon)$ para ϵ nulo. Em primeiro lugar, é claro que, para θ nulo, em não se cogitando sobre a resistência da barra, a carga equilibrada pela estrutura pode assumir qualquer magnitude tanto em tração como em compressão. Todavia, a natureza desse equilíbrio modifica-se com a intensidade da carga, pois para $P < \kappa/\ell$, o equilíbrio é estável, ou seja, para qualquer perturbação $\Delta\theta$ a barra tende a retornar, uma vez que a reação da mola ($\kappa\Delta\theta$) é maior que o momento provocado pela carga ($P\ell \sin\Delta\theta$); já para $P > \kappa/\ell$ a situação se inverte, sendo a reação da mola menor, tendo-se, pois, equilíbrio instável. Porém, para $P > \kappa/\ell$ existe uma outra posição diferente de θ nulo, onde a estrutura encontra novamente uma situação de equilíbrio estável, como o diagrama da figura 8 sugere. Nessa nova posição, uma perturbação $\Delta\theta$ positivo implica em reação da mola superior à carga, forçando-se, pois, o retorno; no caso de perturbação $\Delta\theta$ negativo, o momento da carga é superior à reação da mola, o que promove, novamente, retorno à posição de equilíbrio. Pois bem, é fácil verificar que, no caso de se ter a situação de equilíbrio com θ nulo e carga superior a κ/ℓ , qualquer perturbação $\Delta\theta$ introduzida leva a estrutura a movimentar-se de posição de θ nulo em direção ao novo θ onde o equilíbrio é possível e estável (trata-se, em verdade, de um movimento vibratório em torno do ponto de equilíbrio estável). Porém, supondo-se que a compressão P é aplicada num crescendo lentamente de zero até o valor $P = \kappa/\ell$ percorre-se um caminho de equilíbrio estável com θ nulo. Para $P > \kappa/\ell$ dois caminhos de equilíbrio são possíveis; para θ nulo tem-se, como já foi comentado, um caminho onde o equilíbrio mostra-se instável. O outro possível é aquele no qual o giro θ deixa de ser nulo, conforme ilustra-se na figura 8. Assim, o ponto correspondente ao valor particular $P = \kappa/\ell$ constitui um ponto de bifurcação do equilíbrio; no caso em questão é dito trata-se de uma bifurcação simétrica ($f(-\theta, \epsilon) = f(\theta, \epsilon)$) estável (é possível encontrar caminhos de equilíbrio estável para qualquer valor da compressão P).

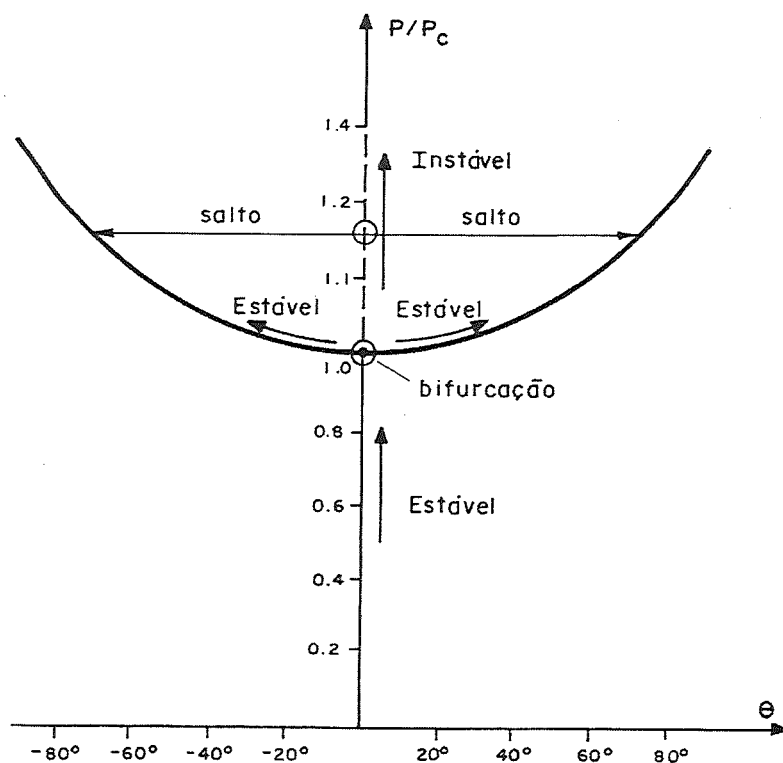


FIG. 8 — CAMINHOS DE EQUILÍBRIO E BIFURCAÇÃO

3 - SEGUNDO CASO ELEMENTAR

Dando prosseguimento, considere-se agora o problema elementar mostrado na figura 9, onde a mola rotativa do exemplo anterior é substituída por uma mola ideal convencional vinculada no topo e apoiada num anteparo rígido segundo um apoio móvel.

O equilíbrio nesse caso é garantido (configuração geométrica ilustrada na figura 9b)) na condição assim expressa:

$$P (\ell \sin \theta + \epsilon \ell \cos \theta) = \kappa \ell \sin \theta \cdot \ell \cos \theta \quad (5)$$

ou ainda:

$$P = \kappa \ell \frac{\sin \theta \cdot \cos \theta}{\sin \theta + \epsilon \cos \theta} \quad (6)$$

nesse caso a função $f(\theta, \epsilon)$ apresenta a seguinte redação:

$$f(\theta, \epsilon) = \frac{\text{sen}\theta \cdot \text{cos}\theta}{\text{sen}\theta + \epsilon \text{cos}\theta} \quad (7)$$

função essa, que governa o comportamento da estrutura agora em estudo.

No sentido de facilitar o entendimento completo do fato narrado pela função $f(\theta, \epsilon)$ expressa em (7), apresenta-se na figura 10 a variação dessa função para θ no intervalo de noventa graus negativos até noventa graus positivos, e para ϵ assumindo os valores $\pm 0,01$ $\pm 0,1$ e valor nulo, a exemplo do exibido na figura 5.

Um exame da figura 10 chama a atenção, de início, para o fato de que, por exemplo, para ϵ e θ positivos a máxima carga equilibrada pelo sistema é crescentemente menor para valores crescentes de ϵ . Além disso, supondo-se compressão crescendo lentamente a partir de zero, no ramo ascendente tem-se um caminho de equilíbrio estável, todavia, ao se atingir o valor máximo entra-se num ramo descendente, indicado-se claramente tratar-se de caminho de equilíbrio instável.

Examinando-se, agora, o caso particular de ϵ nulo, verifica-se, em primeiro lugar que, numa compressão lentamente crescente de zero até o valor $P = \kappa l$, percorre-se um caminho de equilíbrio estável e com giro θ nulo. Ao se atingir o valor κl ocorre uma bifurcação. Para compressão superior à κl têm-se um caminho de equilíbrio instável para giro θ nulo e um novo caminho, também de equilíbrio instável com giro θ não nulo, porquanto trata-se de um ramo descendente (aumento de θ implicando em diminuição da carga equilibrada).

Não é necessário lançar mão de grandes argumentos para se constatar que, do ponto de vista da estabilidade do sistema, a estrutura em questão é muito mais preocupante que a estudada no item anterior. Esse comportamento verificado é dito tratar-se de uma bifurcação simétrica instável, cujo ponto de bifurcação do equilíbrio ocorre para $P = \kappa l$. Cabe, finalmente, registrar que,

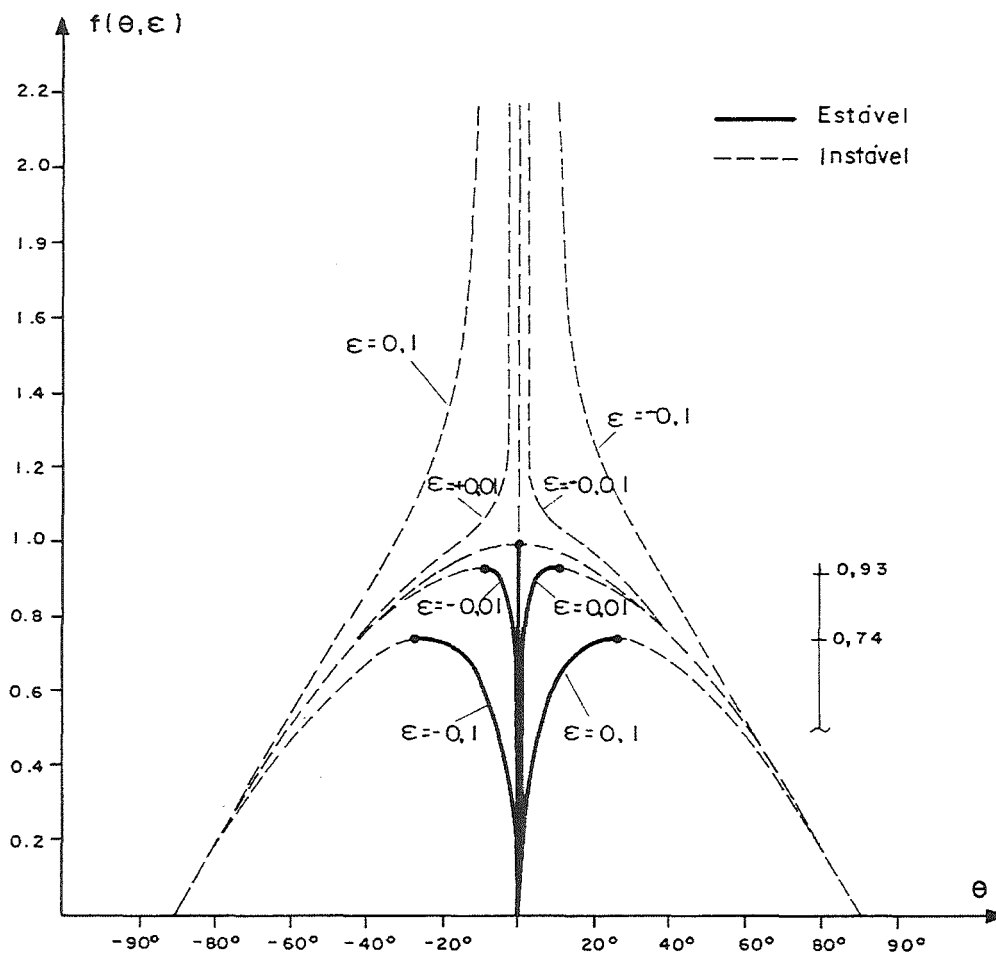


FIG. 10 — BIFURCAÇÃO SIMÉTRICA INSTÁVEL

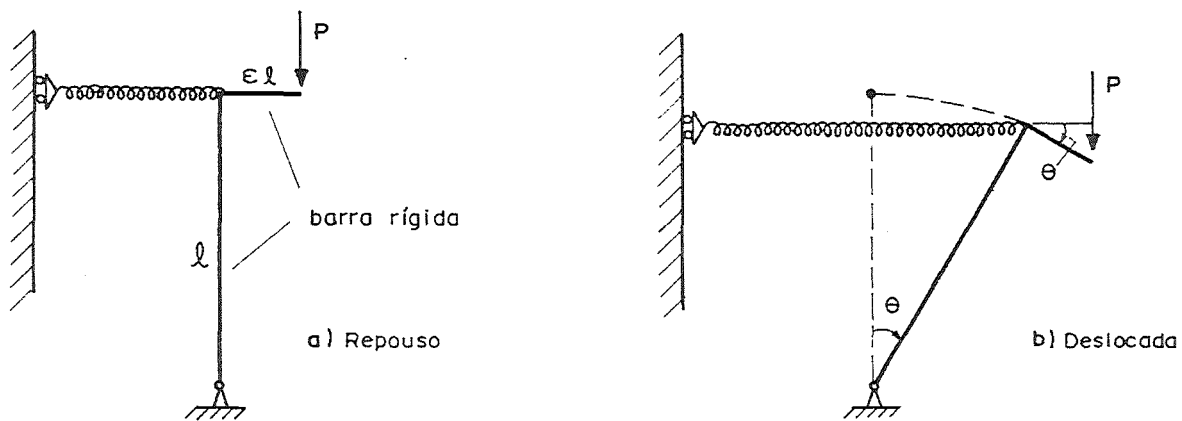


FIG. 9 — BARRA COM MOLA MÓVEL

no tocante ao aspecto de continuidade da função $f(\theta, \epsilon)$, valem as mesmas observações levantadas no exemplo estudado no item anterior (a função em tela só apresenta continuidade para ϵ nulo).

4 - TERCEIRO CASO ELEMENTAR

A estrutura a ser estudada agora exhibe-se na figura 11. A mola, nesse caso, encontra-se fixada no topo da barra e de maneira fixa num anteparo rígido. A figura 11b) mostra uma configuração deformada genérica do sistema. O equilíbrio é, então, dado pela seguinte condição:

$$P\ell(\sin\theta + \epsilon\cos\theta) = 2 \kappa\ell \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) - \cos\frac{\pi}{4} \right] \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \quad \dots (8)$$

ou ainda

$$P = \frac{\kappa\ell}{2} \cdot f(\theta, \epsilon) \quad \dots (9)$$

sendo:

$$f(\theta, \epsilon) = 4 \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}{\sin\theta + \epsilon\cos\theta} \quad \dots (10)$$

cujo diagrama, no estilo dos casos anteriores, exhibe-se na figura 12.

Um exame dos resultados retratados na figura 12, tendo-se em vista as discussões já levadas a efeito nos casos anteriores, mostra claramente tratar-se de uma bifurcação assimétrica, com caminhos estáveis para θ negativo; para θ positivo, tanto para ϵ nulo como negativos, os caminhos do equilíbrio já se mostram instáveis (para ϵ negativo e diferente de zero, obviamente, o caminho é instável para θ algo maiores que o dado segundo (4)). Finalmente, para ϵ e θ positivos, o diagrama mostra claramente um ramo ascendente de equilíbrio estável e, uma vez atingido a carga compressora máxima, inicia-se um ramo descentente correspondendo a equilíbrio instável. Cabe nesse

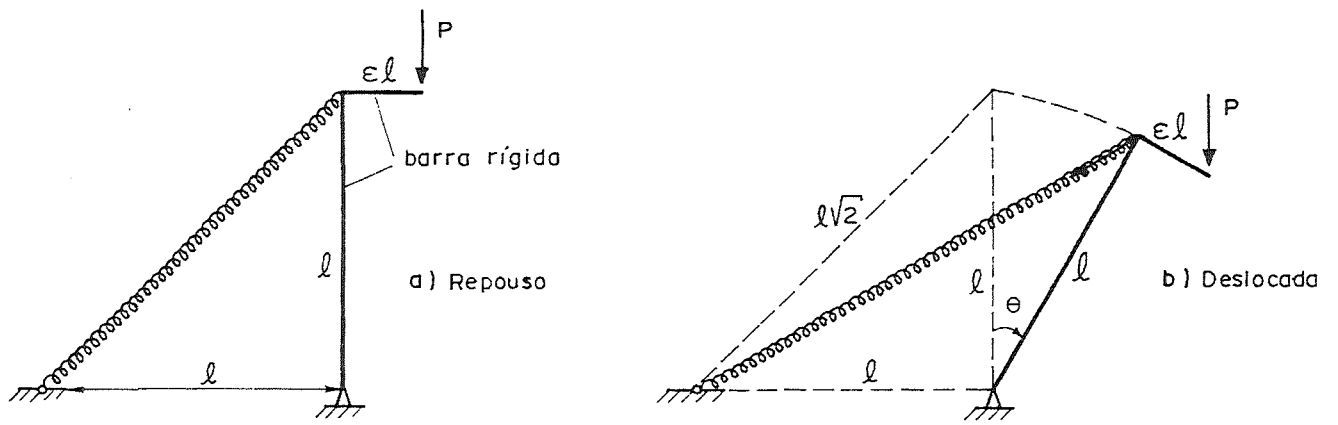


FIG. 11 — BARRA COM MOLA FIXA

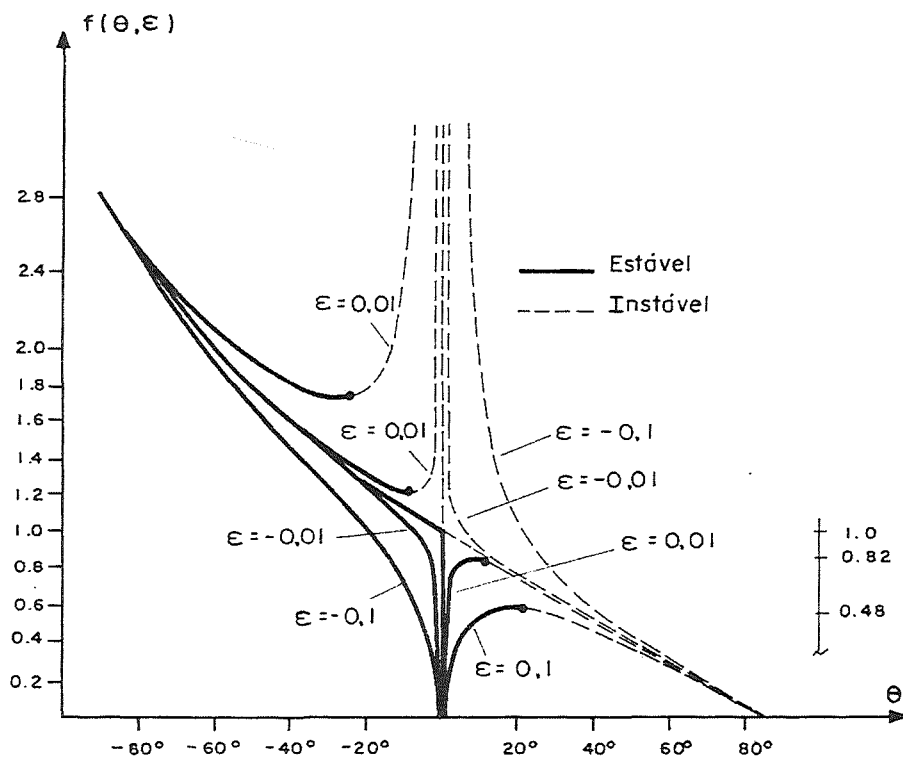


FIG. 12 — BIFURCAÇÃO ASSIMÉTRICA

ponto registrar que, na prática, e retrata, em verdade, desalinhamentos e imperfeições construtivas e, como tal, a probabilidade de acontecer do lado negativo ou positivo é a mesma. Em outras palavras, trata-se de uma estrutura que, do ponto de vista da estabilidade, é tão preocupante como a do caso analisado no item anterior.

5 - QUARTO CASO ELEMENTAR

Como quarto caso elementar, considere-se novamente a estrutura do primeiro caso elementar, supondo-se que a mola rotativa continue elástica, porém não mais linear. A título de ilustração, considere-se o caso de uma mola que apresenta rigidez que se degenera para θ crescente em módulo, segundo uma lei parabólica do tipo:

$$\kappa(\theta) = \kappa\theta(1 - \theta) \quad \dots (11)$$

cujo diagrama exhibe-se na figura 13b). Assim sendo, o equilíbrio do sistema conduz à seguinte condição:

$$P = \frac{\kappa}{l} f(\theta, \epsilon) \quad \dots (12)$$

onde

$$f(\theta, \epsilon) = \frac{\theta(1 - \theta)}{\sin\theta + \epsilon\cos\theta} \quad \dots (13)$$

e κ é a rigidez inicial da mola (em (13) θ deve ser tomado em módulo no termo do numerador do segundo membro). A função $f(\theta, \epsilon)$ expressa em (13) acha-se retratada na figura 14. A semelhança formal do comportamento exibido pela figura 14 com aquele exibido na figura 10 conduz, obviamente, às mesmas discussões levantadas quando do tratamento daquele caso, tratando-se, mais uma vez, de um problema de bifurcação simétrica instável. É oportuno registrar que, pelo fato de se ter uma mola com resposta não

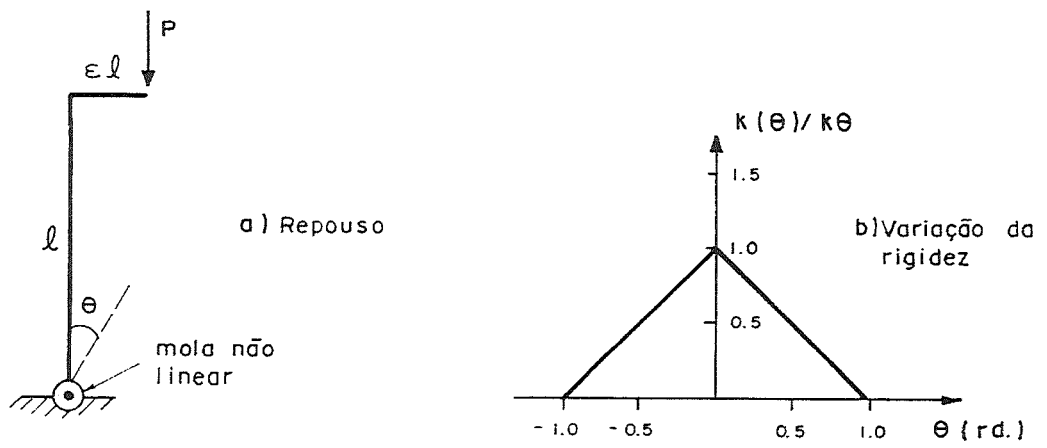


FIG. 13 - MOLA NÃO LINEAR

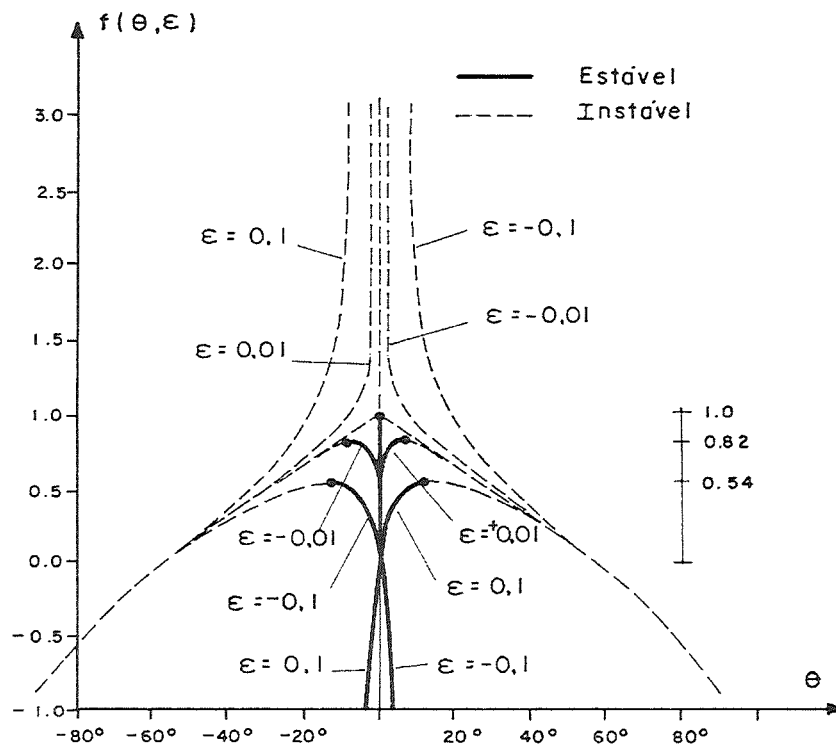


FIG. 14 - BIFURCAÇÃO SIMÉTRICA INSTÁVEL

linear, com degeneração de rigidez para valores crescentes do deslocamento angular θ , a bifurcação que antes era estável, passou a ser do tipo instável. Como nas estruturas reais a degeneração de rigidez é uma realidade, verifica-se tratar-se de um exemplo ilustrativo muito interessante, porquanto sinaliza, embora de maneira simples, aspectos a serem observados na prática corrente (a degeneração de rigidez leva o problema da estabilidade estrutural a ser um fenômeno governado por bifurcação instável).

6 - QUINTO CASO ELEMENTAR

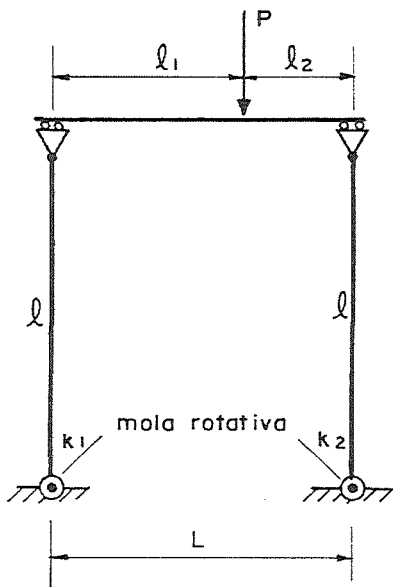
Aborda-se nesse caso uma estrutura aporticada elementar, conforme ilustra-se na figura 15. Os pórticos mostrados nas ilustrações 15a) e b) são diferentes apenas no tipo de vinculação das colunas, supostas indeformáveis, com a viga, também suposta indeformável. No primeiro caso, essa vinculação permite movimentos livres de rotação e translação, e no segundo caso apenas rotação. Na base as colunas encontram-se apoiadas segundo apoios fixos, sendo incorporadas molas rotativas de rigidez diferente. A carga a ser equilibrada é aplicada numa posição genérica da viga.

A configuração de equilíbrio do pórtico da figura 15a) acha-se ilustrada na figura 16a). É evidente, nesse caso, que para qualquer perturbação $\Delta\theta$ experimentada pelas colunas, não se alteram as interações da viga com as colunas, sendo tais interações dadas por: na coluna 1 tem-se compressão $P\ell_2/L$ e na coluna 2 tem-se compressão $P\ell_1/L$.

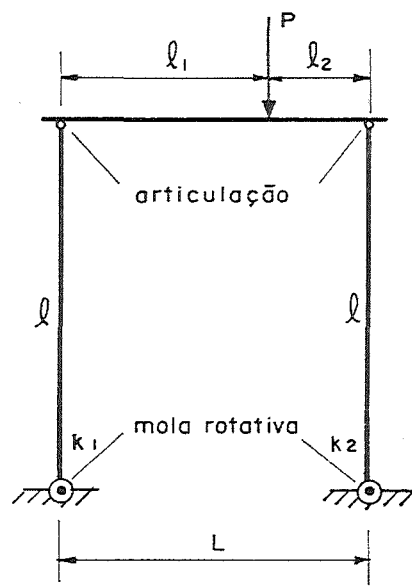
É bastante fácil perceber nesse caso que a estabilidade do conjunto vai ser governada pelo menor dos valores correspondentes à bifurcação do equilíbrio da cada uma das colunas, ou seja:

$$\text{coluna 1} \quad P_1 = \frac{\kappa_1 L}{\ell \ell_2} \quad \dots (14)$$

$$\text{coluna 2} \quad P_2 = \frac{\kappa_2 L}{\ell \ell_1}$$

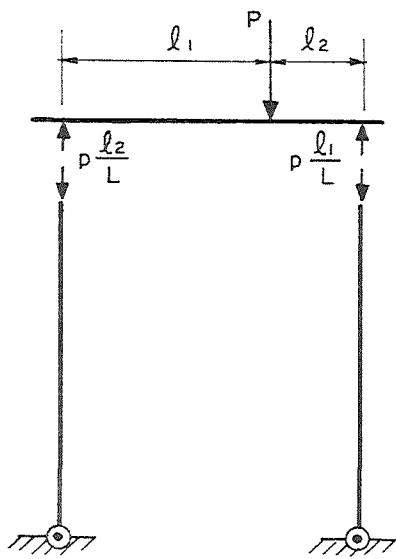


a) Pórtico com viga livre

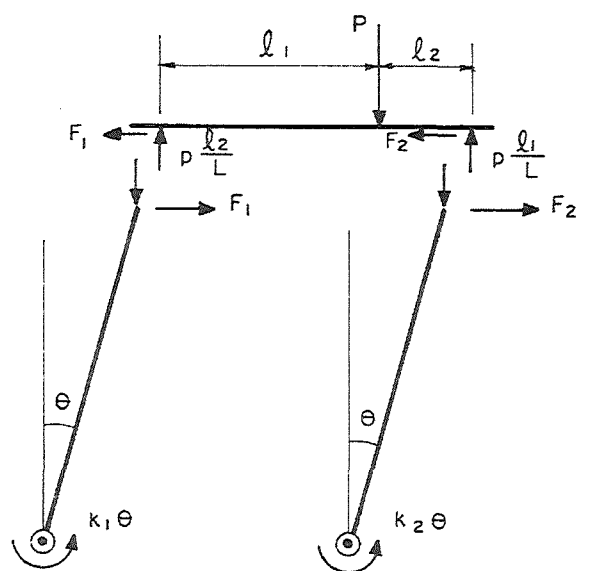


b) Pórtico com viga vinculada

FIG. 15 — DOIS CASOS DE PÓRTICO



a) Configuração de Equilíbrio no repouso



b) Configuração de Equilíbrio

FIG. 16 — CONFIGURAÇÕES DE EQUILÍBRIO

No caso de mola rotativa com comportamento elástico linear, cada coluna vai responder de maneira estável à solicitação que lhe cabe; contudo em sendo a rigidez do tipo degenerativo já estudado, acaba acontecendo a instabilidade da coluna com bifurcação ocorrendo com menor magnitude ou seja, tem-se uma situação de instabilidade localizada; nesse caso catastrófico também para o conjunto, em face das vinculações assumidas.

Estudando-se agora o equilíbrio do pórtico mostrado na figura 15b), cuja configuração exhibe-se na figura 16b), têm-se, no caso da viga:

$$\begin{aligned}
 F_1 + F_2 &= 0 \\
 P_1 &= P \ell_2 / L \quad \dots (15) \\
 P_2 &= P \ell_1 / L
 \end{aligned}$$

sendo o equilíbrio das colunas expresso respectivamente por:

$$\begin{aligned}
 P_1 \ell \operatorname{sen} \theta + F_1 \ell \operatorname{cos} \theta &= \kappa_1 \theta \\
 P_2 \ell \operatorname{sen} \theta + F_2 \ell \operatorname{cos} \theta &= \kappa_2 \theta
 \end{aligned} \quad \dots (16)$$

Decorrem de (15) e (16) as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\ell} \frac{\theta}{\operatorname{sen} \theta} \quad \dots (17) \\
 F_1 = -F_2 &= \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\ell} \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} + \frac{\ell_1 - \ell_2}{\ell_1 + \ell_2} \right] \frac{\theta}{\operatorname{cos} \theta}
 \end{aligned}$$

ficando, pois, evidente que a bifurcação do conjunto, conforme primeira das (17), leva em conta a soma das características de rigidez de cada barra, com comportamento análogo, nesse caso de mola rotativa elástica linear, ao verificado no primeiro caso elementar estudado. É também evidente que a maior capacidade de equilibrar cargas desse pórtico decorre da vinculação adicional empregada, que obriga um movimento solidário das colunas. A segunda das (17) exprime, no fundo, o grau de cooperação, por assim se dizer, entre as colunas. De fato, por exemplo, no caso de se ter $l_1 = l_2$ e κ_1 maior que κ_2 tem-se F_1 positivo, ou seja, a barra 1 socorre a barra 2, de rigidez menor, e que está solicitada por uma compressão de mesma magnitude (como já dizia o Prof. F. Schiel, no texto "Introdução à Resistência dos Materiais", o material é "inteligente"; em se dando condições dele manifestar sua inteligência, ele prontamente a põe em prática). Essa interação expressa na segunda das (17) é também chamada de forças de confinamento.

No caso de se ter molas de elasticidade não linear, como a do sistema examinando no item anterior, o conjunto passa a se apresentar bifurcação do tipo instável, porém a instabilidade nesse caso é do tipo instabilidade global (nesse caso o resultado é análogo ao expresso em (17), bastando substituir θ por $\theta(1 - \theta)$, com θ tomado, naturalmente, em módulo).

Finalizando, é muito oportuno ressaltar que, do ponto de vista da estabilidade, a posição de aplicação da carga não interfere no comportamento conjunto do pórtico, e essa característica é própria desse sistema estrutural.

7 - SEXTO CASO ELEMENTAR

O caso a ser estudado, agora, apresenta comportamento um tanto diferente dos anteriores. Trata-se do sistema estrutural mostrado na figura 17. Esse sistema é formado por duas barras articuladas entre si (rotação livre), sendo que extremidade de uma delas se assenta sobre um apoio fixo e a da outra vincula - se num apoio móvel conectado a uma mola, suposta elástica linear. Os

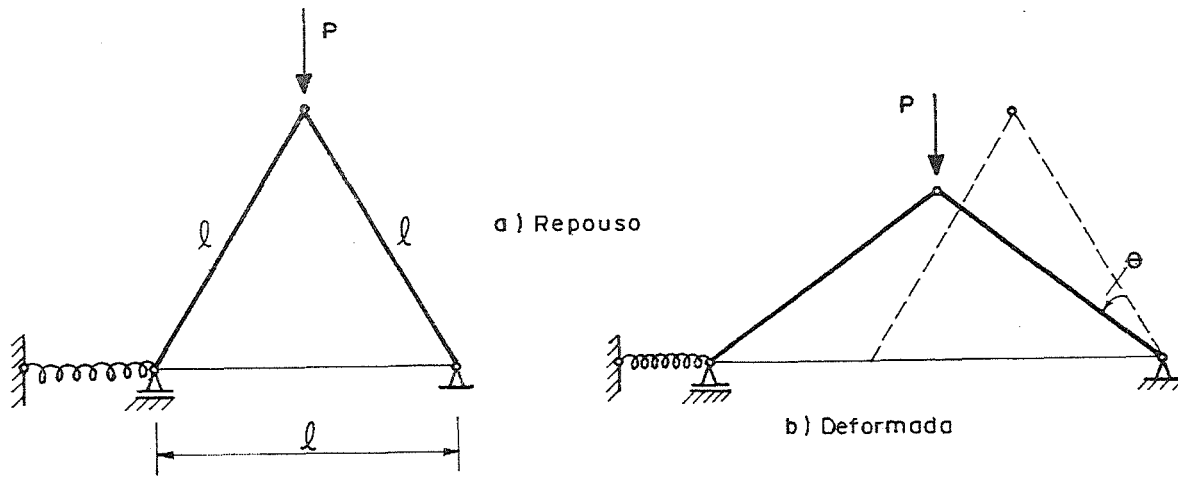


FIG. 17 — SISTEMA COM PONTO LIMITE

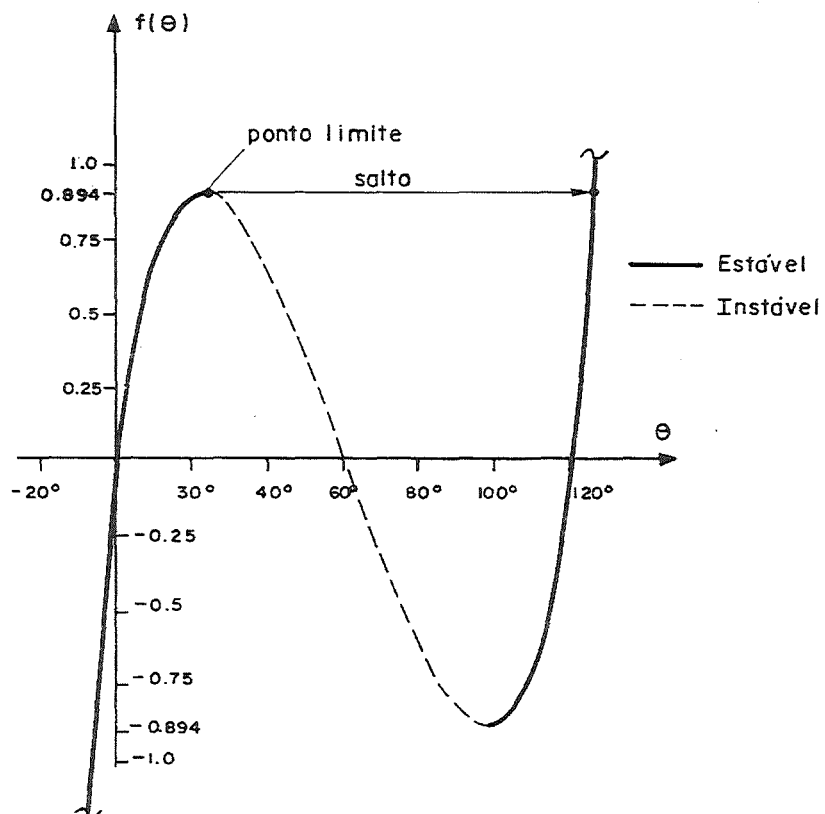


FIG. 18 — PONTO LIMITE

apoios acham-se alinhados horizontalmente com a mola. O objetivo é estudar as condições de equilíbrio para uma força vertical aplicada na junção das duas barras.

Numa posição deformada genérica, conforme ilustra-se na figura 17b), a seguinte relação geométrica é pertinente (compatibilidade):

$$\Delta l = l(2 \cos(\frac{\pi}{3} - \theta) - 1) \quad \dots (18)$$

sendo Δl o alongamento da mola. Por outro lado as condições de equilíbrio, na articulação das barras e no apoio móvel, assim, respectivamente, se expressam:

$$2 F \cos(\frac{\pi}{3} - \theta) = P \quad \dots (19)$$

$$\kappa l (2 \cos(\frac{\pi}{3} - \theta) - 1) = F \cos(\frac{\pi}{3} - \theta)$$

ou seja:

$$P = \kappa l f(\theta) \quad \dots (20)$$

com

$$f(\theta) = 2 \frac{\text{sen}(\frac{\pi}{3} - \theta)}{\cos(\frac{\pi}{3} - \theta)} (2 \cos(\frac{\pi}{3} - \theta) - 1) \quad \dots (21)$$

cujo diagrama exhibe-se na figura 18.

Um exame do comportamento retratado na figura 18 indica, em primeiro lugar, que não se trata de um problema de bifurcação, porquanto, para qualquer valor de θ , não se verifica a opção de caminhos diferentes de equilíbrio. Todavia, pelo fato do diagrama exhibir trechos descendentes é clara a existência de mudanças na natureza do equilíbrio para situações de equilíbrio instável. Mais ainda, o comportamento aí exibido é, na verdade, em tudo igual aqueles retratados nas figuras 10, 12 e 14, considerando-se a situação de existência de excentricidades. Esse problema em particular mostra claramente que, no caminho do equilíbrio, a passagem do trecho estável para o instável ocorre numa posição de

carga limite, e por isso denominado de problema de ponto limite.

8 - COMENTÁRIOS GERAIS

Em primeiro lugar cabe ressaltar que os seis casos elementares estudados constituem, como se percebe, sistemas estruturais idealizados. As molas são perfeitamente elásticas, lineares ou não, as barras são indeformáveis e com resistência ilimitada e as articulações desprovidas de atrito etc., ou seja, toda a energia passada para a estrutura pode ser perfeitamente recuperada, uma vez que se "armazenam" na mola ideal, sob a forma de energia de deformação. Além disso, o carregamento considerado, embora não mencionado explicitamente, é suposto decorrente de um campo potencial (força da gravidade por exemplo). Assim sendo, duas manifestações de energia estavam em jogo, ou seja, a potencial do carregamento e a de deformação da mola. Esse sistema é dito conservativo, porquanto supõe-se não haver outras manifestações de energia em jogo. O sistema é dito não conservativo quando existe no fenômeno manifestações de energia que não se recuperam na transformação, como no caso de atrito viscoso ou do tipo sêco, no caso de mudanças no estado interno do material verificado na plastificação etc. Pelo fato de se estar lidando com um sistema conservativo, os caminhos de equilíbrio são sempre os mesmos tanto para compressão crescente, como decrescente. Por outro lado, no caso de haver eventual plastificação (sistema não conservativo) as deformações residuais modificam a configuração de tais caminhos, com isso, a condição de equilíbrio, num dado ponto, vai depender da história passada do carregamento; fato esse que não sucede no sistema conservativo. Em face do exposto, vale registrar que os comentários que se seguem aplicam-se, em princípio, a sistemas conservativos como os considerados.

Um exame conjunto dos comportamentos estudados mostra haver, do ponto de vista da estabilidade, dois problemas distintos, porém dispendo de características comuns, ou seja, problema de bifurcação do equilíbrio e problema de ponto limite. Por outro lado, quando se trata de um problema com bifurcação

instável, a semelhança de comportamento com o problema de ponto limte é uma realidade palpável. Em face de tal semelhança, é comum atribuir a esse comportamento, mesmo quando num problema de bifurcação, a denominação de problema de ponto limite. Em geral, esse é o tipo de comportamento verificado nas estruturas existentes, interessando de perto na prática do projeto estrutural. Em particular, no caso da bifurcação instável, pelo fato da excentricidade conferir ao sistema um comportamento de ponto limite, com compressão máxima inferior à carga correspondente à bifurcação, diz-se que a estrutura é sensível a imperfeições (no caso a imperfeição é a excentricidade dada ϵ). Deixando de lado, agora, os comentários abordando o lado mais matemático da questão, e voltando-se a atenção para os aspectos mais práticos, cabe, inicialmente, assinalar que, nas estruturas reais, a ruptura, em geral, é atingida quando os deslocamentos experimentados ainda se acham dentro da ordem de grandeza dos chamados pequenos deslocamentos, ou seja, quando os alongamentos (Δl) são muito menores que o comprimento original (l); quando as rotações são tais que $\text{sen}\theta = \theta$, etc.. Em outras palavras, na prática, um estudo envolvendo a formulação correta da geometria deformada não é necessária, e, mais que isso, pode perfeitamente ser abandonada. A formulação segundo a geometria dos pequenos deslocamentos promove grandes simplificações matemáticas, porquanto torna-se linear a dependência das funções envolvidas em relação ao deslocamento considerado (nos casos estudados as funções envolvidas são trigonométricas). Essa questão é tratada em mais detalhes no item que se segue.

9 - TRATAMENTO SEGUNDO A GEOMETRIA DOS PEQUENOS DESLOCAMENTOS

O estudo que se segue tem, basicamente, por objetivo mostrar a grande simplificação introduzida quando da consideração das condições de equilíbrio dentro da geometria dos pequenos deslocamentos (na geometria dos pequenos deslocamentos promove-se uma linearização geométrica). É oportuno assinalar que, nos exemplos até aqui abordados, dada a simplicidade alcançada mediante idealizações convenientes, o tratamento envolvendo a

consideração correta da geometria deformada do conjunto não se mostra, obviamente, algo matematicamente complicado de se manipular. Todavia, nas estruturas reais, a elasticidade, em primeiro lugar, não é concentrada em pontos determinados (molas), e sim distribuída continuamente ao longo da estrutura, porquanto todas as suas partes são deformáveis. E esse fato já implica em manipulações matemáticas um tanto complicadas, mesmo dentro da abordagem com a geometria dos pequenos deslocamentos, e algo até fora de propósito no caso de consideração correta da geometria deformada (nos casos mais elementares a consideração correta da geometria deformada já envolve funções elípticas, e tais funções, por exemplo, não se encontram incorporadas nas máquinas eletrônicas de cálculo e também nas linguagens comuns de computação). Assim sendo, a exposição que se segue, além de ressaltar as simplificações decorrentes da consideração de pequenos deslocamentos, sinaliza também a ordem dos erros introduzidos pelas simplificações; mais ainda, chama a atenção para eventuais distorções introduzidas na natureza do equilíbrio.

No intuito de evidenciar a linearização introduzida na abordagem da questão em apreço com a consideração de pequenos deslocamentos, é oportuno reproduzir o desenvolvimento em série de potências das funções trigonométricas até aqui envolvidas, ou seja:

$$\begin{aligned} \text{sen } (\theta) &= \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} \quad \text{etc} \\ & \dots (22) \\ \text{cos } (\theta) &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

que, para pequenos valores do ângulo θ , são lícitas as seguintes escritas:

$$\begin{aligned} \text{sen } (\theta) &\cong \theta \\ & \dots (23) \\ \text{cos } (\theta) &\cong 1.0 \end{aligned}$$

tomando-se, pois, o desenvolvimento até o primeiro grau, e desprezando-se os termos de grau mais elevado, considerados como infinitésimos de ordem superior. Assim, a função senoidal é substituída por uma função reta inclinada de 45° , obviamente, em relação ao eixo da variável θ , e o cosseno por uma função reta horizontal na abscissa unitária. Grosso modo, as expressões (23) são aceitáveis para ângulos até da ordem de 5° (dependendo da aplicação até para ângulos maiores).

Pois bem, tendo-se em vista o expresso em (23), é fácil verificar que a situação limite do expresso em (3) - Primeiro caso -, em (7) - segundo caso -, em (13) - quarto caso assume a nova redação:

$$f(\theta, \varepsilon) = \frac{\theta}{\theta + \varepsilon} \quad (24)$$

sendo que em (13) cabe notar que se despreza, naturalmente, θ em presença da unidade. O expresso em (24) é também a situação limite do expresso em (10); contudo não é muito evidente esse fato. Com efeito, a geometria deformada exibida na figura 19a) esclarece a questão, ou seja:

$$\Delta l = l\theta \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (25)$$

sendo Δl o alongamento verificado na mola; com isso, tendo-se em vista que o braço de momento da força elástica da mola é $l\frac{\sqrt{2}}{2}$, o equilíbrio passa a ser expresso por:

$$Pl(\theta + \varepsilon) = \kappa \left(l\theta \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(l \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad (25')$$

constatando-se, assim o fato mencionado ao se confrontar o expresso em (25') com o expresso em (9).

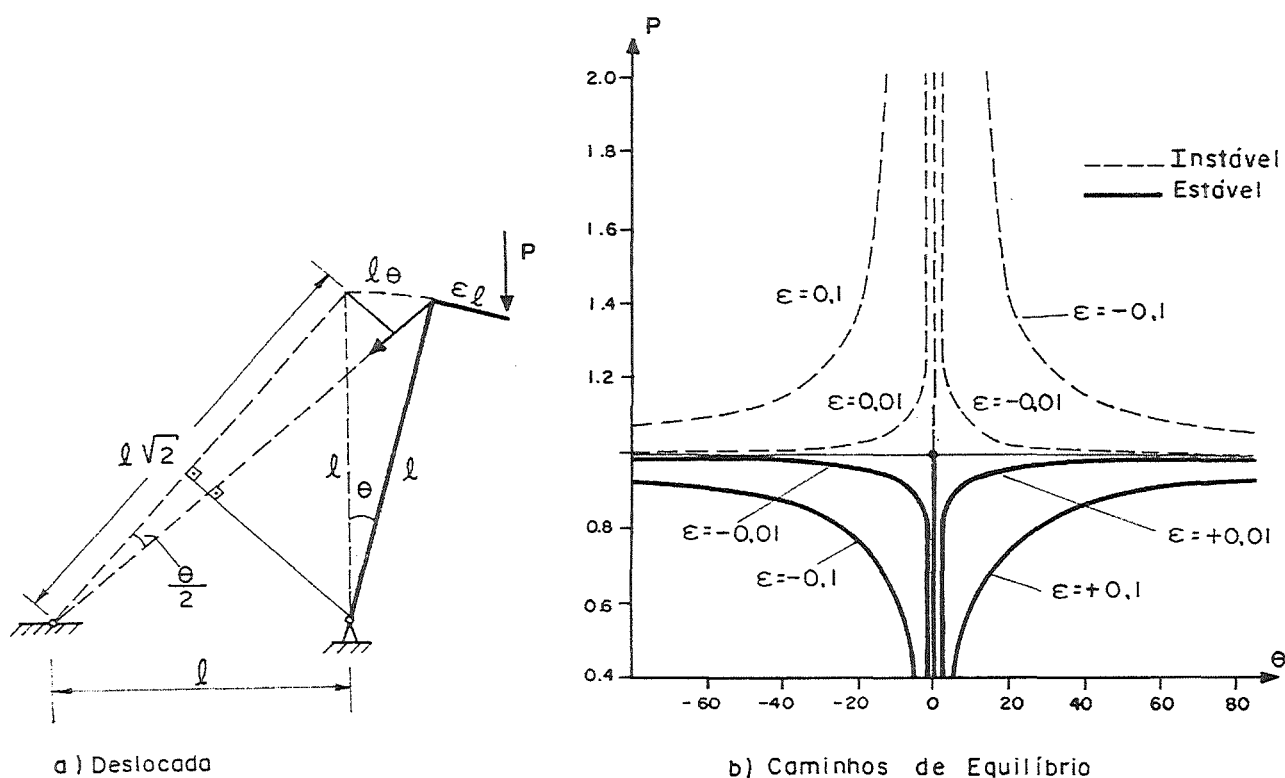


FIG. 19 - CONFIGURAÇÃO DEFORMADA E CAMINHOS DO EQUILÍBRIO

No sentido de melhor visualizar o comportamento da função aproximada $f(\theta, \epsilon)$ dada pela redação (24), lança-se em gráfico, na figura 19b), tal função. Em primeiro lugar é digno de nota o fato de haver uma distorção introduzida na natureza do equilíbrio, ou seja, os problemas que apresentam, em realidade, bifurcações distintas (estável, instável e assimétrica), passam agora a ser retratados por uma bifurcação do tipo indiferente, que consiste numa configuração de caminhos de equilíbrio muito particular. Nesse aspecto a linearização introduz uma distorção que pode induzir conclusões um tanto perigosas, como, por exemplo, ignorar a sensibilidade a imperfeições que é própria das estruturas com bifurcação instável e assimétrica do tipo estudado. No tocante à precisão, o confronto realizado nas tabelas de 1 a 3 fornece uma boa idéia para ângulos considerados até 16° .

É interessante assinalar, a propósito, que a expressão

(GRAUS)	EXP. (24)	EXP. (3)	EXP. (7)	EXP. (13)	EXP. (10)
- 16	1.0	1.01	0,961	0,730	1,22
- 14	1.0	1,01	0,970	0,763	1,19
- 12	1.0	1,01	0,978	0,796	1,16
- 10	1.0	1,01	0,985	0,830	1,13
- 8	1.0	1,00	0,990	0,863	1,11
- 6	1.0	1,00	0,994	0,897	1,08
- 4	1.0	1,00	0,998	0,931	1,05
- 2	1.0	1,00	0,999	0,965	1,03
0	1.0	1,00	1,00	1,00	1,00
2	1.0	1,00	0,999	0,965	0,974
4	1.0	1,00	0,998	0,931	0,948
6	1.0	1,00	0,994	0,897	0,928
8	1.0	1,00	0,990	0,863	0,897
10	1.0	1,01	0,985	0,830	0,873
12	1.0	1,01	0,978	0,796	0,848
14	1.0	1,01	0,970	0,763	0,823
16	1.0	1,01	0,961	0,730	0,799

TABELA 1 - CARREGAMENTO CENTRADO ($\varepsilon = 0$)

(GRAUS)	EXP. (24)	EXP. (3)	EXP. (7)	EXP. (13)	EXP. (16)
- 16	1,04	1,05	0,996	0,756	1,26
- 14	1,04	1,05	1,01	0,795	1,24
- 12	1,05	1,06	1,03	0,836	1,22
- 10	1,06	1,07	1,04	0,879	1,20
- 8	1,08	1,08	1,07	0,929	1,19
- 6	1,11	1,11	1,10	0,991	1,19
- 4	1,17	1,17	1,16	1,08	1,22
- 2	1,40	1,40	1,40	1,35	1,44
0	0,0	0,0	0,0	0,00	0,0
2	0,777	0,777	0,777	0,750	0,76
4	0,875	0,876	0,873	0,814	0,829
6	0,913	0,915	0,908	0,819	0,846
8	0,933	0,937	0,924	0,806	0,838
10	0,946	0,951	0,932	0,785	0,826
12	0,954	0,962	0,934	0,761	0,810
14	0,961	0,971	0,933	0,734	0,792
16	0,965	0,979	0,929	0,706	0,772

TABELA 2 - CARREGAMENTO EXCENTRICO ($\epsilon = 0,01$)

(GRAUS	EXP. (24)	EXP. (3)	EXP. (7)	EXP. (13)	EXP. (10)
- 16	1,55	1,55	1,48	1,99	1,87
- 14	1,69	1,69	1,62	2,10	1,99
- 12	1,91	1,90	1,85	2,30	2,19
- 10	2,34	2,32	2,27	2,73	2,62
- 8	3,52	3,48	3,43	3,96	3,84
- 6	22,20	20,63	20,48	22,70	22,24
- 4	- 2,31	- 2,33	- 2,32	- 2,49	- 2,45
- 2	- 0,536	- 0,537	- 0,537	- 0,555	- 0,551
0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
2	0,259	0,259	0,259	0,250	0,252
4	0,411	0,412	0,411	0,383	0,390
6	0,511	0,513	0,510	0,460	0,473
8	0,583	0,586	0,579	0,504	0,524
10	0,636	0,641	0,628	0,529	0,557
12	0,677	0,685	0,665	0,541	0,577
14	0,709	0,721	0,693	0,545	0,588
16	0,736	0,751	0,713	0,541	0,593

TABELA 3 - CARREGAMENTO EXCÊNTRICO ($\epsilon = 0,1$)

(24) constitui boa aproximação para o expresso em (3) e em (7), porém no caso do expresso em (13) melhores resultados são dados por:

$$f(\theta, \epsilon) = \theta(1 - \theta) / (\theta + \epsilon)$$

e no caso expresso em (10), tendo-se em vista a redução do braço de momento da mola (figura 19a)), uma melhor expressão é a seguinte:

$$f(\theta, \epsilon) = \theta(1 - \theta/2) / (\theta + \epsilon)$$

expressões estas, que retratam o fato de o ponto de bifurcação (ϵ nulo) não ser nesses casos um ponto estacionário das funções em jogo.

Para finalizar, cumpre chamar a atenção para o fato de que a consideração de pequenos deslocamentos apresenta carácter aproximado apenas no tocante à deformada e em decorrência na solicitação; contudo, na definição do ponto de bifurcação o resultado já é correto. De fato, em sendo a bifurcação uma propriedade da estrutura perfeitamente alinhada e com carregamento centrado, no início do arqueamento os deslocamentos são, obviamente, pequenos; valendo pois, rigorosamente os expedientes adotados.

10 - ESTABILIDADE DE BARRAS NO REGIME ELÁSTICO-LINEAR

Considere-se, de início, o problema de uma barra de material elástico linear comprimida por uma força normal com excentricidade dada por "e", conforme ilustra-se na figura 20a). A barra é suposta de seção constante, e também constante ao longo da barra é suposto o módulo de elasticidade longitudinal "E". O trecho horizontal que destaca a excentricidade do carregamento é suposto, naturalmente, indeformável.

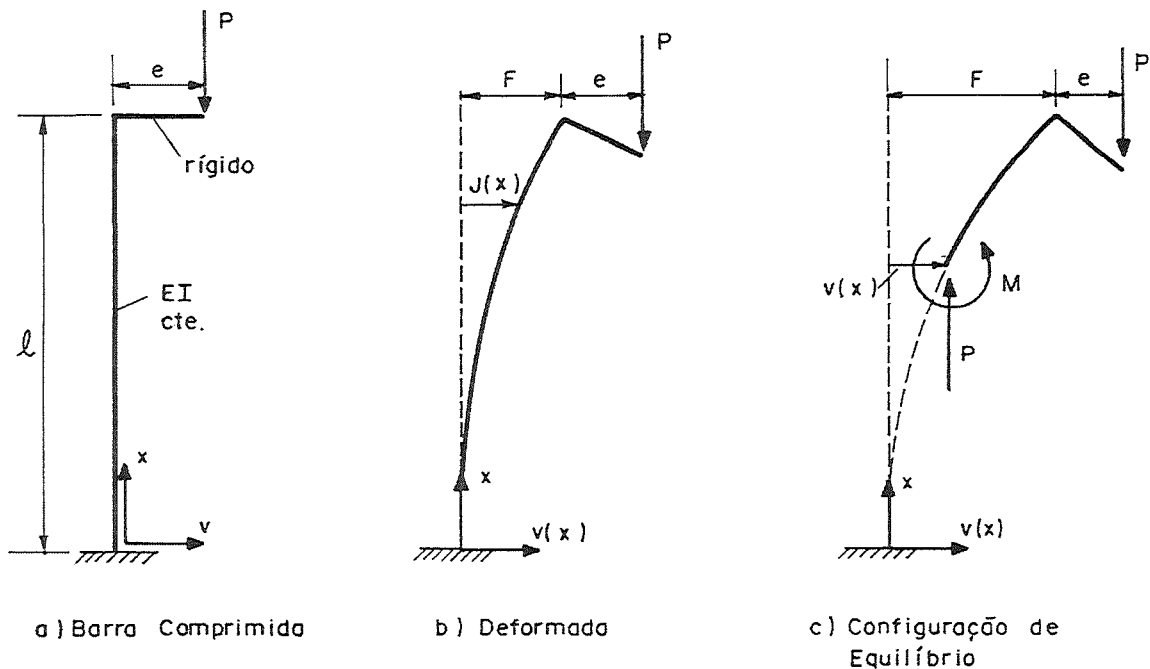


FIG. 20 - FLEXO - COMPRESSÃO (TEORIA DE 2º ORDEM)

A figura 20b) ilustra uma configuração geométrica deformada genérica (sugestiva nesse caso), e a figura 20c) ilustra uma configuração de forças e momento em equilíbrio, correspondente a uma seção genérica da barra. Ao contrário dos casos já estudados, o equilíbrio da barra deve ser analisado seção a seção, porquanto a deformação depende da solicitação ao longo da peça. Assim sendo, o momento produzido pela compressão é dado por (fig. 20c)):

$$M = P(f + c - v(x)) \quad \dots (25)$$

onde f é flecha do topo da barra, "e" a excentricidade da carga e $v(x)$ a deformada elástica da barra, sendo x a ordenada correspondente ao ponto genérico tomado. Por outro lado, da Resistência dos Materiais tem-se:

$$M = EI\rho \quad \dots (26)$$

que consiste na clássica relação constitutiva momento/curvatura, sendo E o módulo de elasticidade já referido, I o momento de inércia da seção referente ao plano de deformação em estudo e ρ a curvatura verificada ($\rho = 1/r$, sendo r o raio de curvatura da deformada elástica), que, por sua vez, sustenta a seguinte relação:

$$\rho = v^{II} / \sqrt{[1 + (v^I)^2]^3} \quad \dots (27)$$

com a deformada elástica da barra. A potência indicada com números romanos indica o grau de derivação em relação à variável x . Finalmente, tendo-se em vista o expresso em (25), (26) e (27), o equilíbrio da barra passa a ser redigido da seguinte maneira:

$$EI v^{II} / \sqrt{[1 + (v^I)^2]^3} + P v = P(e+f) \quad \dots (28)$$

que consiste, como se percebe, numa equação diferencial não linear na elástica v (a não linealidade decorre do envolvimento de potências não unitárias, e nem nulas, agindo sobre a função incógnita).

A solução da equação expressa em (28) envolve funções elíticas de difícil manipulação matemática. Contudo, conforme já comentado, mesmo próximo da ruptura, as barras, nos casos da prática, ainda se encontram em regime de deslocamentos pequenos, sendo perfeitamente aceitável desprezar a derivada primeira da elástica em presença da unidade, e com maior razão $(v^I)^2$. A

explicação é muito simples. A derivada primeira corresponde à tangente do ângulo de inclinação da elástica (fig. 20b)); por sua vez, em se tratando de pequenas rotações, é lícito considerar:

$$\theta \cong \text{sen}\theta \cong \text{tg}\theta = v^I \ll 1. \quad \dots (29)$$

conforme já comentado anteriormente. Assim, com a consideração apontada em (27) dá-se uma outra redação para a equação (28), ou seja:

$$EI v^{II} + P v = P(e + f) \quad \dots (30)$$

bem mais simples de se tratar, pois consiste numa equação diferencial linear a coeficientes constantes, cuja solução envolve funções trigonométricas. Cabe nesse ponto chamar a atenção para o fato de que, ao se passar da redação (28) para a (30), o gesto matemático envolvido mudou a natureza da equação original: e esse procedimento é tratado no ramo da matemática denominado Teoria da Perturbação. Não se trata aqui, de se linearizar uma função a partir do desenvolvimento segundo a série de Taylor até o primeiro grau, e sim simplesmente negligenciar-se termos presentes na equação. Obviamente, o sucesso da solução da equação (30) na representação da solução de (28) vai depender da aceitabilidade do exposto em (29) (no caso, funções elíticas vão estar sendo representadas por funções trigonométricas). Na integração da equação diferencial expressa em (30), as condições de fronteiras são:

$$v(x = 0) = 0 \quad \dots (31)$$

$$v^I(x = 0) = 0$$

sendo tais condições decorrentes da vinculação da barra na base; além disso, convém notar-se que $v(x = \ell) = f$.

A solução geral da equação (30) é dada por:

$$v(x) = C_1 \operatorname{sen} kx + C_2 \operatorname{cos} kx + e + f \quad \dots (32)$$

sendo facilmente constatado ser a solução por mera substituição, onde:

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad \dots (33)$$

As condições (31) e o fato de se ter $v(x=l) = f$, tendo-se em vista a solução geral (32), levam a:

$$C_2 + e + f = 0$$

$$C_1 k = 0$$

$$C_1 \operatorname{sen} \kappa l + C_2 \operatorname{cos} \kappa l + e + f = f \quad \dots (34)$$

ou seja:

$$f = \frac{e}{\operatorname{cos} \kappa l} (1 - \operatorname{cos} \kappa l) \quad \dots (35)$$

$$C_2 = \frac{e}{\operatorname{cos} \kappa l}$$

e, finalmente:

$$v(x) = \frac{e}{\operatorname{cos}(\kappa l)} (1 - \operatorname{cos} \kappa x) \quad \dots (36)$$

Por outro lado, tendo-se em vista que a ruptura ocorre por flexão na base (ponto de maior momento), é oportuno também explicar tal esforço solicitante, ou seja:

$$M = P (e+f) = M_0 / \operatorname{cos} \kappa l \quad \dots (37)$$

sendo:

$$M_0 = P e \quad \dots (38)$$

o momento fletor obtido em teoria de primeira ordem. Obviamente, o fator, $1/\cos\kappa l$ constitui a majoração proveniente do efeito de segunda ordem.

Um exame das expressões (36) e (37) indica uma situação singular para

$$\text{ou seja, } \cos\kappa l = 0 \quad \dots (39)$$

$$\kappa l = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \text{ etc} \quad \dots (40)$$

ou ainda, tendo-se em vista o expresso em (33):

$$P = \frac{\pi^2 EI}{l^2}, \frac{9\pi^2 EI}{l^2} \text{ etc} \quad \dots (41)$$

sendo que, do ponto de vista da prática, interessa apenas o menor valor da compressão P que implica nessa singularidade, ou seja:

$$P_C = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad \dots (42)$$

carregamento esse denominado carga crítica, ou carga de flabagem da barra em estudo.

Com efeito, no caso particular de excentricidade nula, o sistema de equações lineares narrado em (34) ganha a seguinte redação:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \kappa & 0 & 0 \\ \text{sen } \kappa l & \text{cos } \kappa l & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \dots (43)$$

cuja solução não trivial (C_1, C_2 e f diferentes de zero) leva ao já expresso em (39), assumindo a deformada a seguinte escrita;

$$v(x) = f(1 - \cos \kappa x) \quad \dots(44)$$

Cumpra assinalar que o problema de autovalor expresso em (43) leva a $C_1 = 0$ e $C_2 = -f$, ficando f indeterminado. Não é muito complicado explicar o que o expresso em (43) e (44) está retratando. Em primeiro lugar, para qualquer valor de P menor que o dado em (42) implica em solução trivial para (43) - para carga menor, a elástica é nula, e o equilíbrio é estável, pois, nesse caso $EI v'' > P(f - v)$ para qualquer valor de v não nulo. Para compressão igual ao expresso em (42) tem-se equilíbrio indiferente, porquanto, para qualquer valor de f em (44) a equação (43) fica satisfeita. Por outro lado, para qualquer valor de compressão superior à dada em (42) o equilíbrio só é possível com elástica nula e apresentando natureza instável, pois $EI v'' < P(f - v)$ para qualquer valor não nulo de v . A figura 21 exhibe a bifurcação indiferente verificada nesse caso e, ao mesmo tempo, confronta com a bifurcação estável correta que decorre da solução de (28) - equação exata. Um exame dos resultados confrontados nessa figura comprova visivelmente a validade das simplificações introduzidas, mesmo para deformada com flechas até da ordem de 20% do vão, o que vem a ser um exagero inaceitável na prática. A título da ilustração, exibem-se na figura 22 os diagramas de variação da compressão contra flecha e momento na base, segundo parâmetros adimensionais.

Voltando-se a atenção para o estudo de barras comprimidas de maneira centrada, ou seja, com excentricidade "e" nula, destaca-se, naturalmente, o problema da bifurcação do equilíbrio; que tem no ponto de bifurcação, ou carga crítica, a característica de maior interesse técnico.

Equações diferenciais do tipo expresso em (30) podem ser formuladas para barras com vinculações diferentes da estudada. A figura 23 exhibe quatro casos de vinculação, indicando-se a carga corespondente à bifurcação (carga crítica) e a forma da elástica (em se tratando de um equilíbrio do tipo indiferente, a elástica, a exemplo do caso estudado, resulta dependente de um parâmetro indefinido).

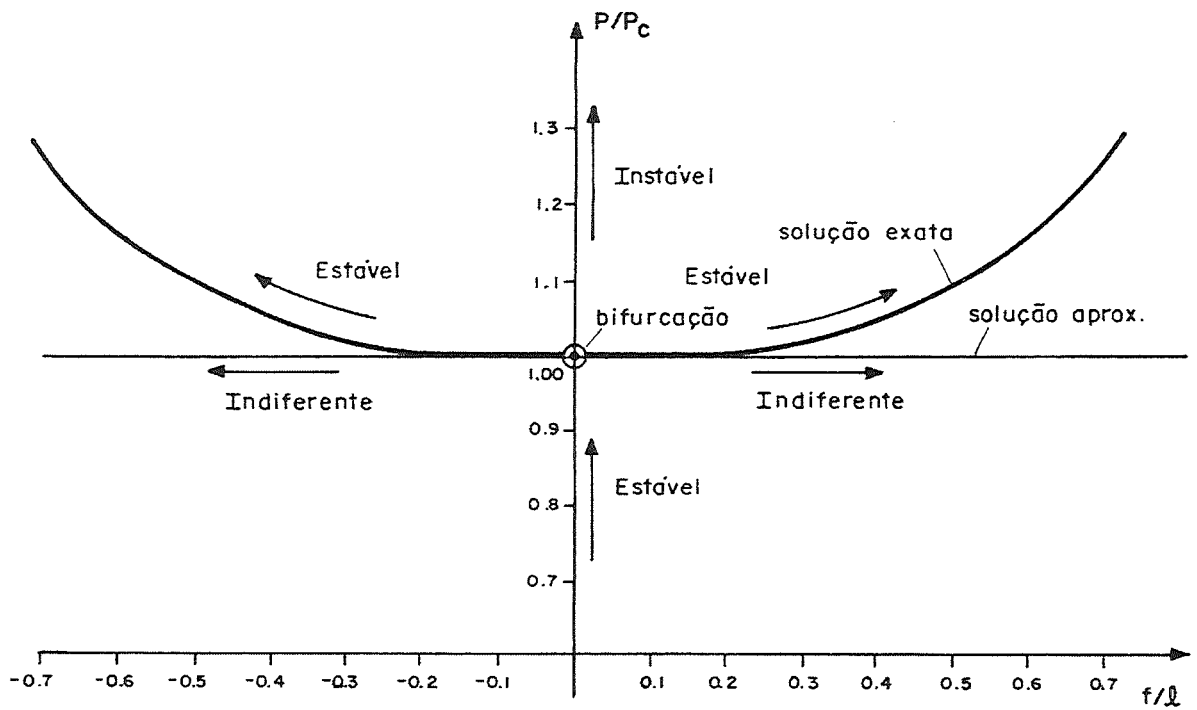


FIG. 21 — CAMINHOS DE EQUILÍBRIO E BIFURCAÇÃO

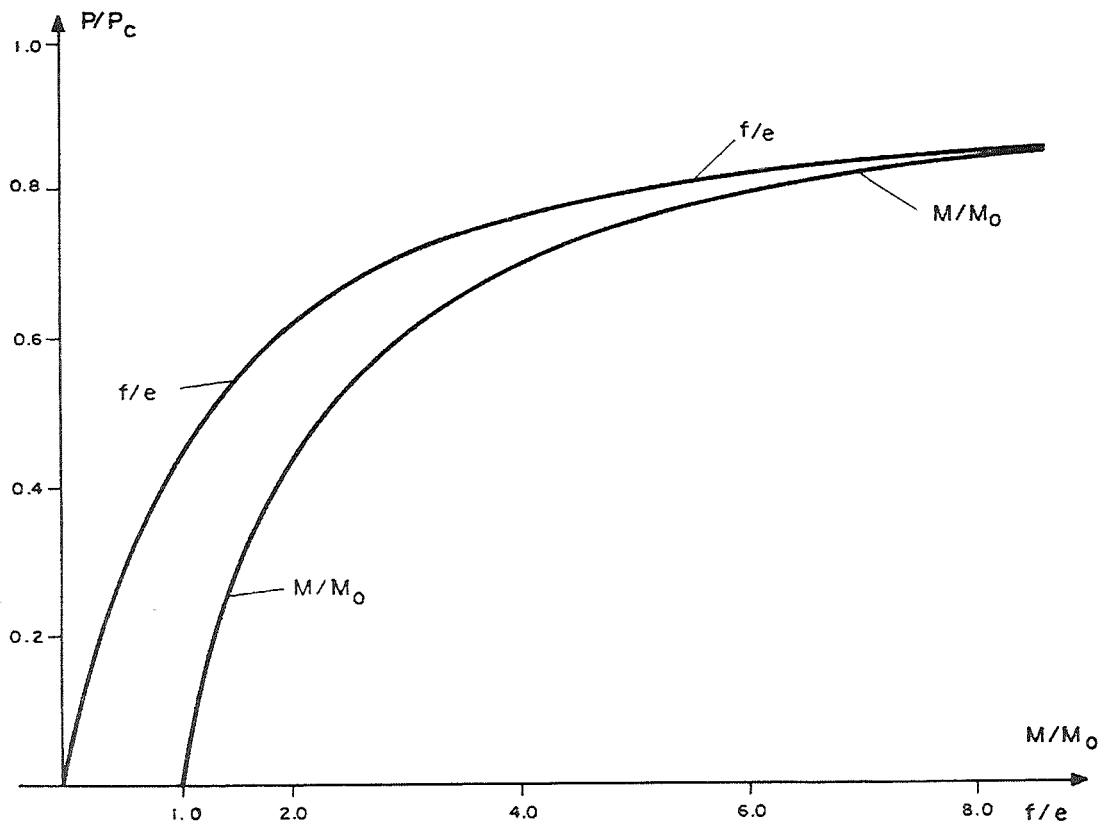


FIG. 22 — VARIAÇÃO DE M e f COM P

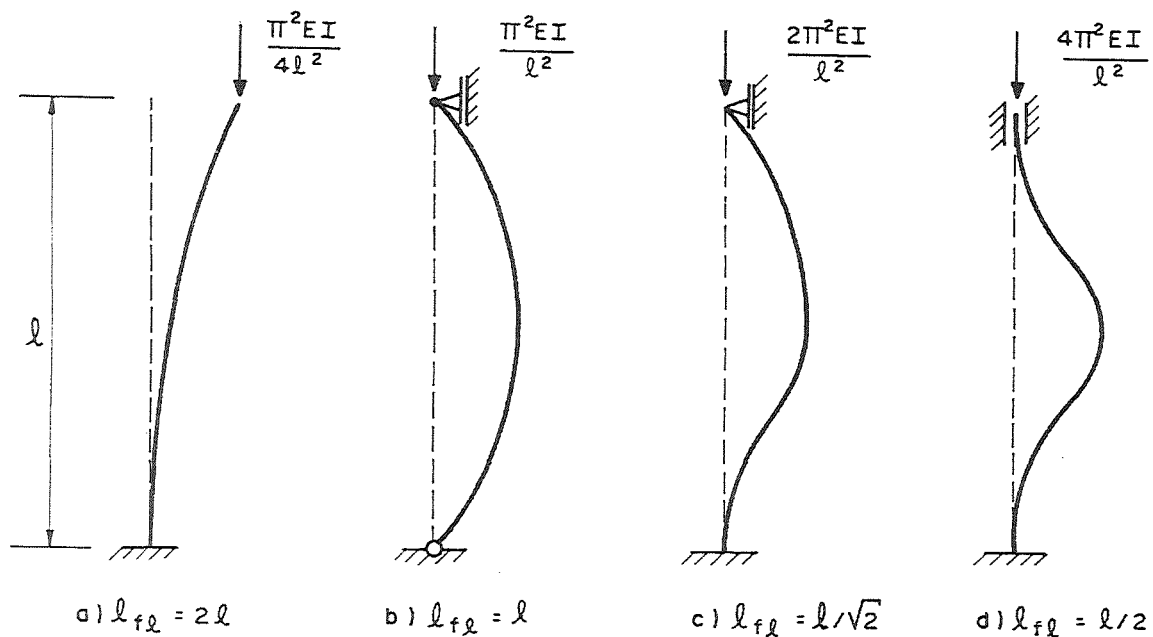


FIG. 23 — CASOS DE FLAMBAGEM

A propósito dos resultados de carga crítica exibidos na figura 23, cabe, em primeiro lugar, assinalar a grande influência que a vinculação desempenha em relação à carga crítica. Por exemplo, a adição de um vínculo que impede o giro livre na base, que se verifica no caso da barra ilustrada na figura 23b), levando-se ao caso ilustrado na figura 23c), promove a duplicação da carga crítica. Esse fato já é o bastante para se entender as dificuldades encontradas na interpretação de resultados obtidos experimentalmente, pois a vinculação real, no ensaio, pode até ficar próxima de uma das idealizadas, porém, certamente, não

igual. A verificação experimental do problema da flambagem exige cuidados extremamente requintados e de difícil execução.

O problema de flambagem da barra ilustrada na figura 23b) é dito, correntemente como sendo o fundamental, ou de referência. A carga crítica nesse caso vale:

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \quad \dots (45)$$

ou ainda, com nova redação:

$$\sigma_c = \frac{P_c}{S} = \frac{\pi^2 EI}{S \ell^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad \dots (46)$$

onde S é a área da seção, sendo:

$$\lambda = \ell / \sqrt{I/S} = \ell / i \quad \dots (47)$$

sendo i, naturalmente, o raio de giração da seção. O parâmetro adimensional λ mede, como se percebe, a esbeltez da barra (quanto mais robusta a seção maior é o raio de giração e, por conseguinte, menor o valor de λ).

A figura 24 exhibe o diagrama de σ_c contra λ , cuja curva é denominada hipérbole de EULER, em justa homenagem ao pioneiro estudioso do assunto. Na prática, como a tensão de ruptura do material é limitada, é natural que, para pequenos valores de λ , a hipérbole de EULER deixa de representar a realidade, pois a ruptura passa a ser mais influenciada pela tensão de ruptura do material à compressão do que pela interferência da instabilidade. Um exame dessa figura já responde, em termos, de imediato à indagação levantada no início do presente texto sobre peças curtas e peças longas. Essa definição, para cada material, depende do valor de λ que separa o ramo da curva que se destaca da hipérbole de EULER. Trata-se, como se pode perceber, de uma definição não muito consistente, porém dá uma idéia da ordem de grandeza (peças curtas as pouco esbeltas, e peças longas as muito esbeltas).

Os outros casos de flambagem mostrados na figura 23 podem também ser colocados conforme (46), bastando para tanto

definir o chamado comprimento de flambagem, que incorpora a influência da vinculação, ou seja, no primeiro caso (fig. 23a)):

$$l_{fl} = 2l \quad \dots (48)$$

e, nos casos das figuras 23 c) e d), respectivamente

$$l_{fl} = l / \sqrt{2} \quad \dots (49)$$

$$l_{fl} = l/2$$

com λ expresso na forma:

$$\lambda = l_{fl} / i \quad \dots (50)$$

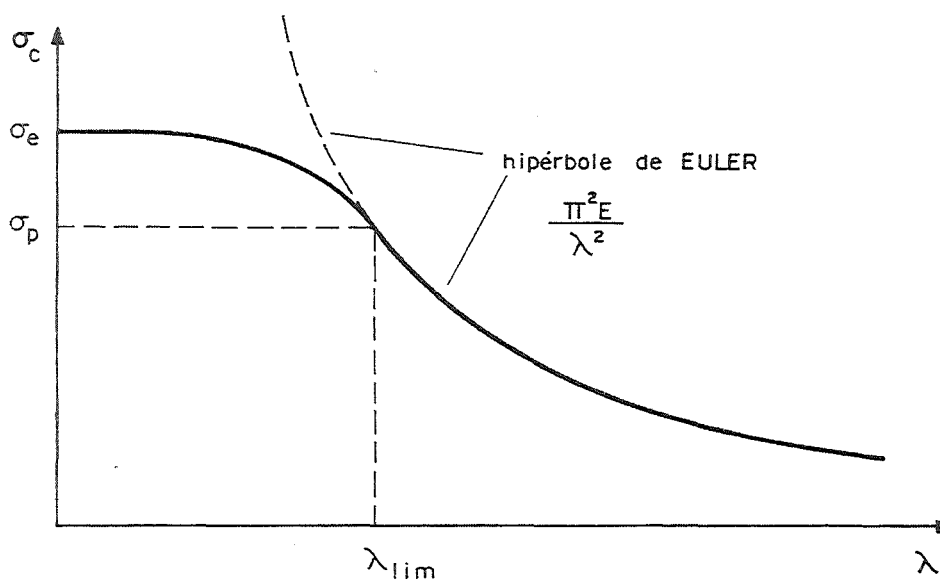


FIG. 24 — DIAGRAMA $\sigma_c - \lambda$

Obviamente para outros tipos de vinculação, o correspondente comprimento de flambagem deve ser investigado.

Pois bem, esse estudo de carregamento centrado que, mediante a definição de alguns parâmetros, resultou na expressão (46) constitui o ponto de partida para a abordagem técnica do problema da instabilidade de barras comprimidas. A colocação sugestiva dessa questão em termos da tensão de referência σ_c , e mais a consideração de uma conveniente correção na hipérbole de EULER para valores de λ abaixo de um certo limite, juntamente com a aplicação de adequados "coeficientes de segurança", serviu de base para muitos códigos de construção (esse procedimento é conhecido como processo ω , sendo ω um fator de majoração da compressão). Recentemente, os códigos vêm ganhando uma orientação diferente. No lugar de se preocupar com a carga crítica (ponto de bifurcação), considera-se, em geral, a segurança no problema de compressão exêntrica em teoria de segunda ordem. Esse e outros aspectos práticos do problema da instabilidade vão ser objeto de comentários mais detalhados na parte final do texto.

A propósito dessa nova orientação dos códigos, a tabela 4 contém cinco casos de flexão de barras comprimidas, indicando-se os fatores de majoração do momento máximo e da flecha decorrentes da teoria de segunda ordem. Cabe chamar a atenção para o fato de que, o quarto caso, devido à simetria, é idêntico ao já estudado (expressão (37) e primeira das (35), onde se substitue a excentricidade por M_0/N , lembrando-se também que o vão agora é o dobro daquele considerado).

O quinto caso exibido na tabela 4 serve como uma orientação no sentido de se avaliar a influência do desalinhamento de barras. O desalinhamento, por mais requintado o processo de produção da peça, está sempre presente. Contudo, fazem parte dos códigos de construção limitações para os desalinhamentos, garantindo nesse aspecto um certo padrão de qualidade do produto a ser empregado nas construções. A equação diferencial desse caso é dada por:

$$EI v'' + Pv = - Pv_0 \quad \dots (51)$$

onde a deformada em questão é medida a partir da posição desalinhada dada por v_0 . A integração da equação (51), tendo-se em vista as condições de vinculação ($v(x=0) = v(x=l) = 0$), no caso indicado, ou seja, com

$$v_0 = f_0 \text{sen}(\pi x/l) \quad \dots (52)$$

é dada por:

$$v = \frac{N}{N_C - N} f_0 \text{sen}(\pi x/l) \quad \dots (53)$$

onde N_C é a carga crítica ($= \pi^2 EI / l^2$) desse caso. Por outro lado, a deformada completa assim se expressa:

$$v_r = v + f_0 = \frac{N}{N_C - N} \cdot f_0 \text{sen}(\pi x/l) + f_0 \quad \dots (54)$$

A flecha máxima, no meio do vão ($x = l/2$), fica, então:

$$f = \frac{N_C}{N_C - N} f_0 = \frac{1}{1 - N/N_C} f_0 = \frac{f_0}{1 - 4\beta^2/\pi^2} \quad \dots (55)$$

e o momento máximo:

$$M = N f = \frac{N f_0}{1 - 4\beta^2/\pi^2} = \frac{N f_0}{1 - N/N_C}$$

encerrando-se assim a questão. Cabe, para finalizar, salientar que a superposição dos casos exibidos na tabela 4, por exemplo,

$$\beta = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{N}{EI}}$$

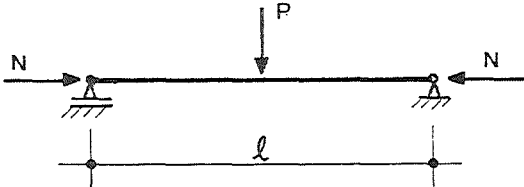
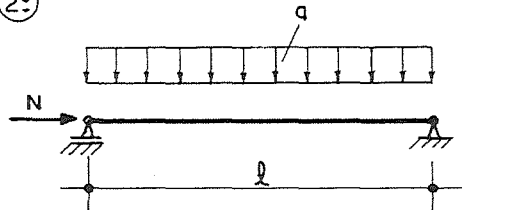
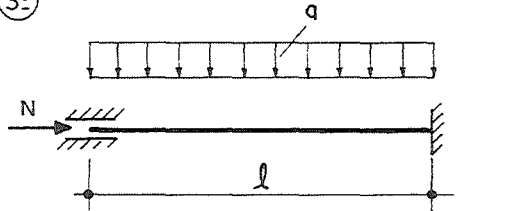
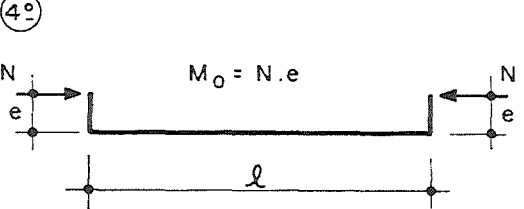
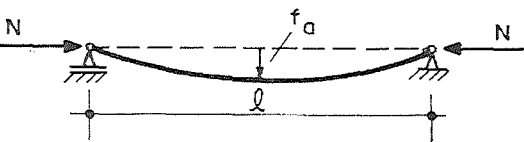
CASOS DE CARREGAMENTO	MOM. FLETOR MÁXIMO	FLECHA MÁXIMA
<p>1º</p> 	$\frac{Pl}{4} \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\beta}$	$\frac{Pl}{4N} \left(\frac{\operatorname{tg} \beta}{\beta} - 1 \right)$
<p>2º</p> 	$\frac{ql^2}{8} \cdot \frac{2}{\beta^2} (1 - \cos \beta)$	$\frac{ql^2}{8N} \left[\frac{2}{\beta^2} (1 - \cos \beta) - 1 \right]$
<p>3º</p> 	$\frac{ql^2}{4} \cdot \frac{\operatorname{sen} \beta - \beta \cos \beta}{\beta^2 \operatorname{sen} \beta}$ <p>*nos engastamentos</p>	$\frac{ql^2}{4N} \left(\frac{1 - \cos \beta}{\beta \operatorname{sen} \beta} - 1 \right)$
<p>4º</p> 	$\frac{M_0}{\cos \beta}$	$\frac{M_0}{N} \left(\frac{1}{\cos \beta} - 1 \right)$
<p>5º Barra Desalinhada *</p> $v_0 = f_0 \operatorname{sen}(\pi x/l)$  <p>* Defeito de fabricação</p>	$\frac{N \cdot f_0}{1 - 4\beta^2 / \pi^2}$	$\frac{f_0}{1 - 4\beta^2 / \pi^2}$

TABELA 4- FLEZO-COMPRESSÃO EM TEORIA DE SEGUNDA ORDEM

gera novos casos, pois a equação diferencial em questão é linear; todavia os esforços solicitantes e deslocamentos não mantêm relação linear com a compressão axial N. Exemplificando, no caso de uma compressão excêntrica em barra com desalinhamento do tipo senoidal, o momento final é dado pela soma de $Nf_0/\cos\beta$ e $Nf_0/(1 - 4\beta^2/\pi^2)$. Por outro lado, a máxima força normal que pode ser aplicada não é a soma das normais máximas de cada caso, obviamente (ela continua limitada em $N_c = \pi^2 EI/\ell^2$).

11 - INSTABILIDADE DE BARRAS NO REGIME NÃO LINEAR

É sabido que o material responde de maneira elástica-linear até uma certa magnitude do estado de tensão; além dessa magnitude o comportamento passa a ser não linear, e mais, começa a entrar em cena a plastificação, ou seja, a formação de deformações residuais no descarregamento (sistema não conservativo). A figura 25a) exhibe um diagrama tensão-deformação típico. Além do limite de proporcionalidade ocorre, por assim se dizer, degeneração do módulo de elasticidade transversal (fig. 25b), atingindo-se a degeneração completa, para o caso de materiais dúteis (aço, por exemplo), ao nível da tensão de escoamento. Por outro lado, no descarregamento o material, como que recuperando a memória, volta a apresentar novamente comportamento linear, porém incorporando deformações residuais (fig. 25a)).

Pois bem, no sentido de se avaliar a influência da não linearidade entre tensões e deformações além de um certo limite no problema da instabilidade de barras, considere-se, de início o caso de carregamento centrado, com compressão lentamente crescente. Retornado-se a expressão (46):

$$\sigma_c = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad \dots (57)$$

verifica-se, de imediato, que, no caso de se ter $\sigma_c < \sigma_p$, o expresso em (57) governa, sem dúvida, a instabilidade da barra

(vale a teoria de EULER). Por outro lado para $\sigma_c > \sigma_p$ a expressão (57) não faz mais sentido, porquanto o módulo de elasticidade não é mais constante. Todavia, como sugere o diagrama da figura 25b), uma maneira simples de se abordar a questão da instabilidade nesses casos, consiste em se considerar o expresso em (57) com o módulo de elasticidade atualizado, ou seja:

$$\lambda_c = \frac{\pi^2 E(\sigma_c)}{\lambda^2} \quad \dots (58)$$

obtendo-se, assim uma maneira de se definir o diagrama da figura 24 para esbeltez menores que λ_{lim} . Cabe chamar a atenção para o fato de que, ao se formular (58), assume-se que o módulo de elasticidade apresenta o mesmo valor em toda a seção da barra e ao longo do comprimento. Sucede que, ao se iniciar o arqueamento (flambagem) as seções sofrem rotações, e com isso, parte da seção vai apresentar alívio de compressão, enquanto a outra parte sofre aumento. Na parte com alívio de compressão (descarregamento) o módulo de elasticidade volta a ser o original, e esse fato contradiz o considerado em (58). A expressão (58) retrata o resultado da chamada teoria do módulo tangente, enquanto que, a consideração de um módulo de elasticidade diferente na parte com tensões aliviadas é chamada teoria do duplo módulo ou do módulo reduzido, cuja expressão equivalente é dada por:

$$\lambda_c = \frac{\pi^2 E_r}{\lambda^2} \quad \dots (59)$$

onde E_r depende da forma da seção transversal. No caso de seção retangular tem-se, por exemplo:

$$E_r = \frac{4E \cdot E(\sigma_c)}{(\sqrt{E} + \sqrt{E(\sigma_c)})^2} \quad \dots (60)$$

constatando-se, facilmente, tratar-se de um módulo superior a E (σ_c). Experimentações realizadas mostravam que os resultados ficavam mais próximos de previsto em (58) do que dados em (59); que, teoricamente, parecem mais corretos. A explicação foi dada por SHANLEY (J. Aeronaut. Sci, v.14, p.261, 1947). Sucede que, na prática, é impossível evitar carregamento excêntrico, e também não existe peça perfeitamente alinhada; assim, o ensaio, em verdade, reproduz uma flexo-compressão em teoria de segunda ordem. Por outro lado, como a flexão, embora pequena, existe desde o início da solicitação, o alívio de tensões admitido não vai ocorrer tão pronunciadamente. Ensaio bem realizados mostram que, obedecidas as condições de cada caso, os resultados comprovam os previstos em (58) e (59). Como, na prática, não se sabe exatamente as condições reais, é mais prudente optar pela previsão fornecida em (58) - prevê resultados abaixo dos dados em (59). Além disso é de aplicação mais imediata, pois não depende da forma da seção.

Pois bem, o estudo até aqui apresentado aborda apenas a questão do ponto de bifurcação (carga centrada). Em havendo excentricidades e desalinhamentos, somente com o conhecimento do ponto de bifurcação não se tem o problema real suficientemente esclarecido, e mais que isso, como a degeneração de rigidez ocorre sempre, a bifurcação correspondente é do tipo instável, ou seja, o problema passa a ser do tipo carga limite, sendo que a carga correspondente é inferior à do ponto de bifurcação. Tendo-se em vista esse fato, a orientação mais recente dos códigos construtivos tem sido a de abordagem de peças comprimidas pela teoria de segunda ordem. Não é muito difícil perceber, que essa orientação leva a um procedimento de cálculo bastante mais laborioso que o chamado processo ω já mencionado.

Com efeito, a flexo-compressão em teoria de segunda ordem tem por ponto de partida a relação momento-curvatura; que, no caso não linear, passa a depender do nível de tensão e da forma da seção. Em resumo, a determinação da carga limite passa obrigatoriamente por um processo de cálculo iterativo. A maneira de se formular esse procedimento não vai ser aqui objeto de apreciação, porquanto foge um tanto dos objetivos do presente

texto, mesmo em se tratando dos simplificados propostos.

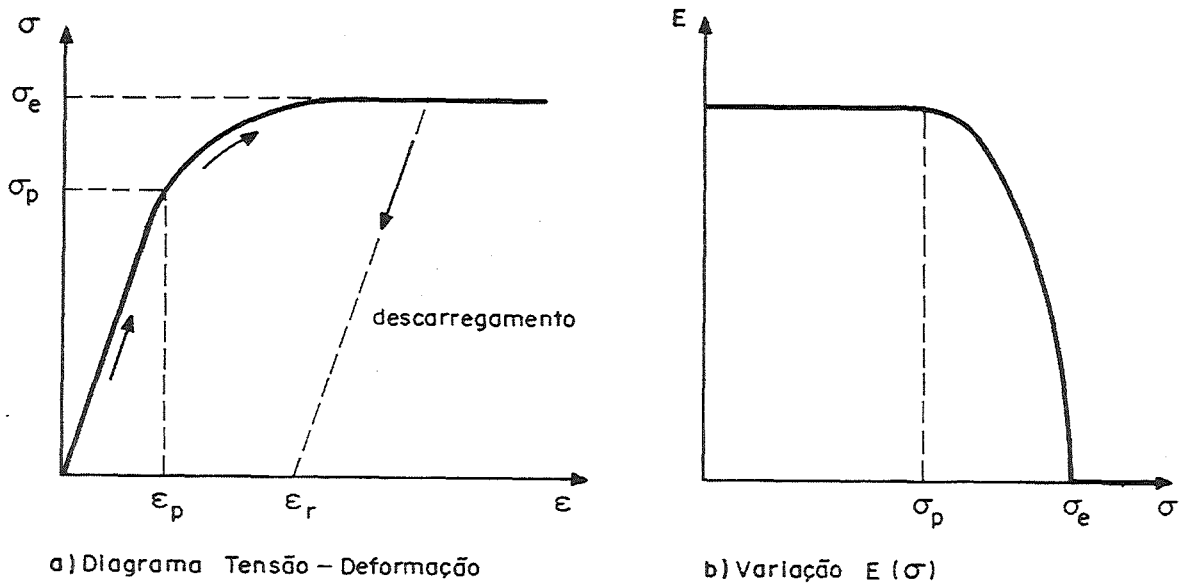


FIG. 25 — DIAGRAMAS COM PLASTIFICAÇÃO

12 - OBSERVAÇÕES FINAIS

O estudo da instabilidade de barras comprimidas apresentado mostra com bastante clareza que, em determinado nível de compressão, a natureza do equilíbrio passa de um equilíbrio estável para o catastrófico equilíbrio de natureza instável; que deve ser prevenido, na prática, por adequados

critérios de segurança (a diminuição do módulo de elasticidade para tensões acima do limite de proporcionalidade confere ao problema da instabilidade de barras uma bifurcação do tipo instável, resultado numa questão de carga limite).

A orientação atual dos códigos construtivos, no sentido de se colocar o problema da instabilidade como um problema de flexo-compressão em teoria de segunda ordem, coloca, sem dúvida, a questão em bases mais reais, que simplesmente controlar o fenômeno com base apenas na carga correspondente ao ponto de bifurcação; porquanto as imperfeições tanto da peça como na aplicação do carregamento levam, naturalmente, ao problema de flexo-compressão em teoria de segunda ordem. Além das imperfeições mencionadas, no caso de instabilidade em regime de plastificação, um outro fator interfere no fenômeno, quando se trata de barras de perfis metálicos, ou seja, as tensões residuais provocadas pelo processo de fabricação (em regime de plastificação não vale mais o princípio da superposição de efeitos). Assim sendo, os códigos construtivos, como não deveriam deixar de ser, são zelosos com todos os parâmetros que interferem no problema.

Por razões de natureza econômica, a instabilidade no regime elástico deve ser evitada, pois a ruptura da peça acaba ocorrendo com tensões iniciais (antes de se iniciar o arqueamento) abaixo da tensão limite de proporcionalidade, configurando-se um mal uso da capacidade resistente do material. Por outro lado, a instabilidade no regime de plastificação (material mais bem utilizado) implica em preocupações adicionais, em vista do inevitável aparecimento de deformações residuais (sistema não conservativo). No caso de descarregamento essas deformações vão agravar os desalinhamentos já existentes, e, com isso, reduzir o valor da carga limite para os próximos carregamentos. Em outras palavras, a questão da segurança passa a ganhar mais a conotação de vida útil da peça, que é um critério mais empregado no caso de estruturas aeronáuticas. A indagação básica passa a ser do tipo: Quantas vezes em uns tantos anos, por exemplo, pode se aceitar carregamento com uma certa magnitude, promovendo tensões no regime de plastificação?