Universidade de São Paulo
Escola de Engenharia de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção

MÉTODOS DE PREVISÃO PARA GESTÃO DE ESTOQUES E PLANEJAMENTO DA PRODUÇÃO

João Vitor Moccellin

São Carlos, fevereiro de 2003

SUMÁRIO

1 - INTRODUÇÃO 1

1.1 - Previsões e Predições..... 1

1.2 - Tipos de Séries Temporais..... 3

1.3 - Modelo Usual das Séries Temporais..... 6

1.4 - Métodos de Previsão para Séries Temporais..... 8

1.5 - O Processo de Previsão..... 8

1.6 - Escolha do Modelo e Método de Previsão..... 9

1.7 - Uso de Previsões nos Sistemas de Produção..... 9

2 - MÉTODOS DE REGRESSÃO 10

2.1 - Critério Usual para Cálculo das Estimativas..... 11

2.2 - Processo Constante..... 12

2.3 - Variação Linear..... 13

2.4 - Caso Geral..... 15

2.5 - Estimativa da Variância..... 17

3 - MÉTODOS DE MÉDIA MÓVEL 18

3.1 - Processo Constante..... 18

3.2 - Variação Linear..... 19

3.3 - Escolha do Número de Observações..... 25

4 - MÉTODOS DE AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

4.1 - Processo Constante..... 26

4.2 - Variação Linear..... 31

4.3 - Variação Linear Cíclica..... 35

5 - ANÁLISE DE ERROS 40

5.1 - Sinal de Rastreamento baseado na soma dos Erros de Previsão..... 42

5.2 - Sinal de Rastreamento baseado no Erro Amortecido..... 45

6 - PREVISÃO DA FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADES DA DEMANDA 47

6.1 - Estimativa da Função G(X)..... 48

6.2 - Problemas de Previsão..... 51

7 - MODELOS DE BOX-JENKINS 53

7.1 - Modelos Autoregressivos..... 53

7.2 - Modelos de Média Móvel..... 54

7.3 - Modelo Misto Autoregressivo - Média Móvel... 54

7.4 - Modelo Integrado Autoregressivo - Média Móvel..... 56

7.5 - Procedimento de Previsão..... 57

BIBLIOGRAFIA..... 60

MÉTODOS DE PREVISÃO PARA GESTÃO DE ESTOQUES E PLANEJAMENTO DA PRODUÇÃO

1-INTRODUÇÃO: CONSIDERAÇÕES GERAIS, DEFINIÇÕES

1.1 - PREVISÕES E PREDIÇÕES

PREVER: Ver "antecipadamente"; calcular; pressupor; predizer; conjeturar; profetizar; reflexionar.

PREDIZER: Dizer "antecipadamente"; prognosticar; vaticinar (adivinhar); profetizar.

ESTIMAR: Avaliar ou calcular o valor.

PREVER/PREDIZER: Estimar a ocorrência de um determinado FATOR DE INTERESSE, em um certo horizonte de tempo no FUTURO.

PREVISÃO: Envolve análise de dados passados (históricos) e sua projeção (extrapolação) no futuro, geralmente através de algum modelo matemático apropriado.

PREDIÇÃO: Estimativas em situações em que se possui pouca ou nenhuma experiência (em quantidade e/ou relevância) e/ou situações que são afetadas, de maneira significativa, por novos eventos, como por exemplo: a introdução de um novo produto no mercado ou mudanças relevantes de natureza econômica ou política.

- EXEMPLOS:

. MÉTODOS DE PREDIÇÃO

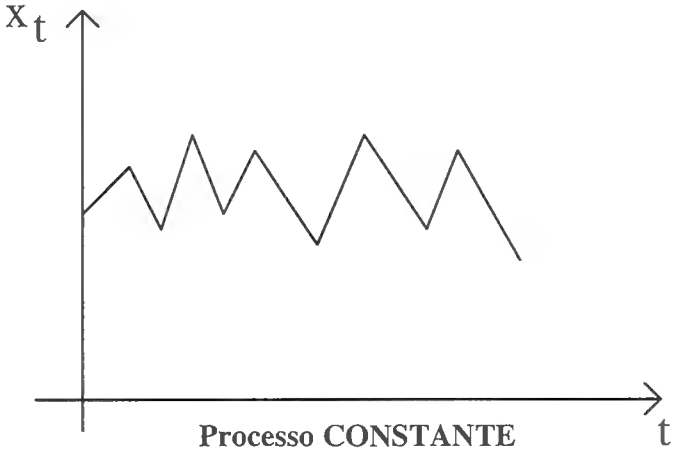
- Método DELPHI
- Pesquisa de Mercado
- ANALOGIA Histórica

. MÉTODOS DE PREVISÃO

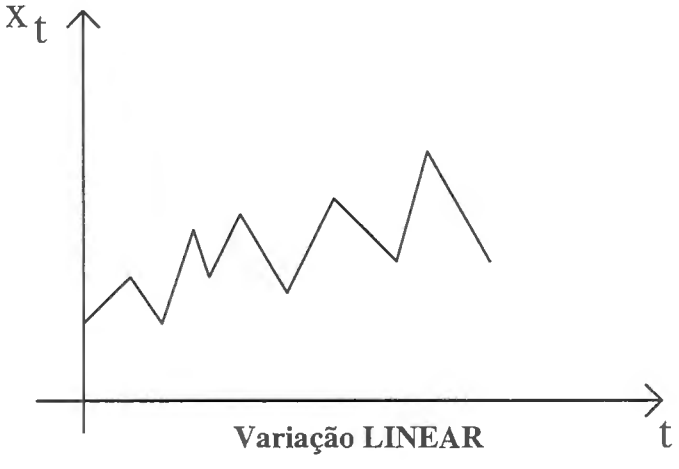
- Modelos de Relações CAUSAIS
- Modelos ECONOMÉTRICOS
- Modelos de SÉRIES TEMPORAIS:
  "Previsão do comportamento futuro do fator de interesse, através do relacionamento algébrico desse comportamento com o fator TEMPO.

1.2 - TIPOS DE SÉRIES TEMPORAIS

. Padrões NORMAIS (Regulares)

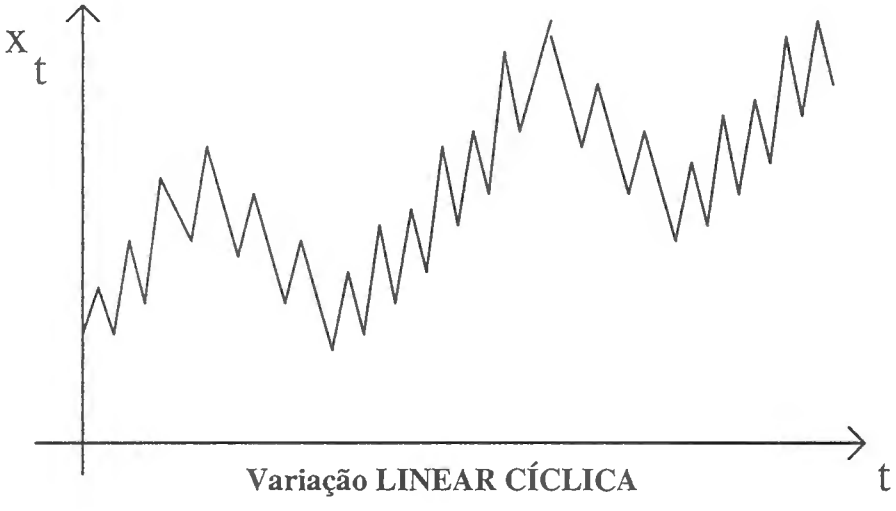


Processo CONSTANTE



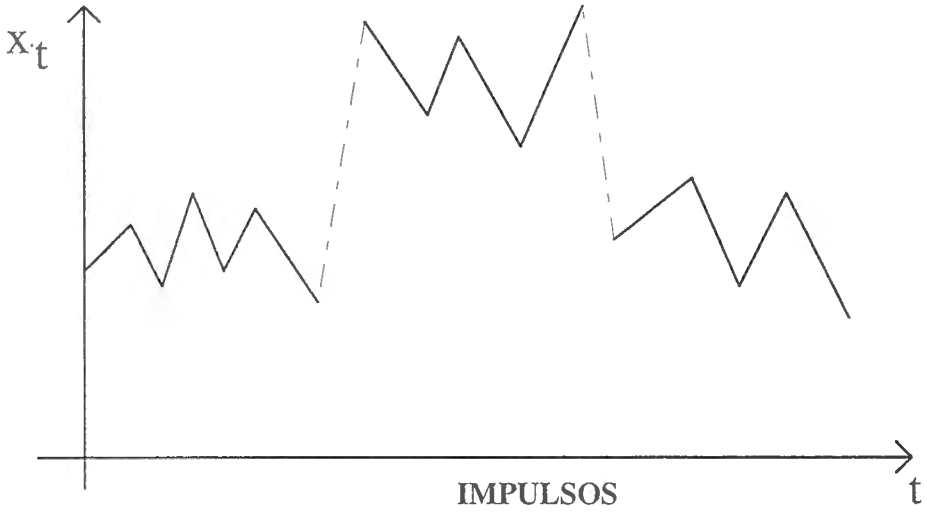
Variação LINEAR

Variação CÍCLICA ou SAZONAL

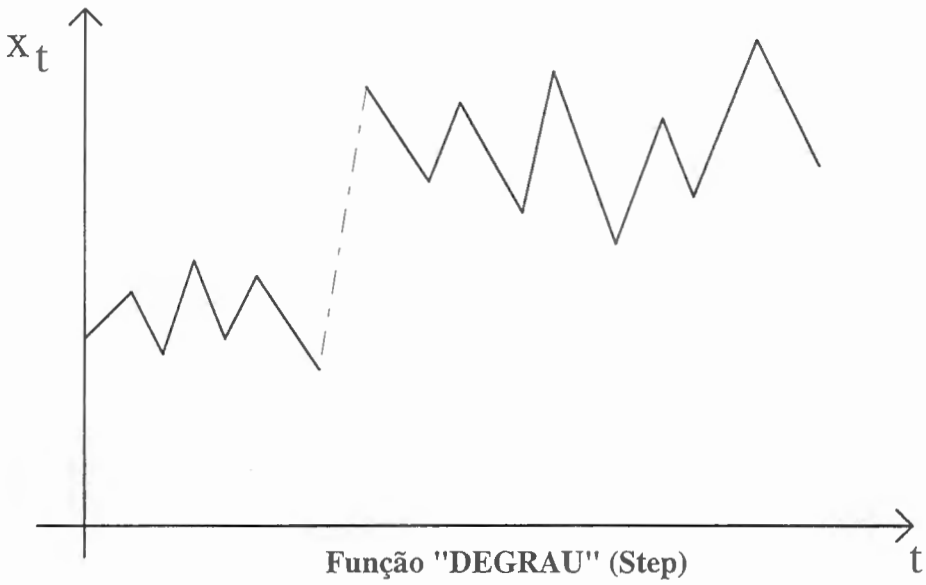


Variação LINEAR CÍCLICA

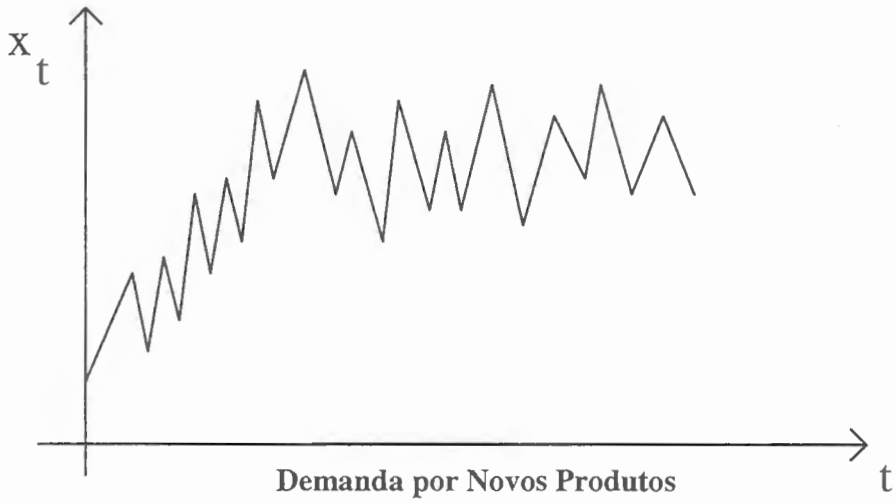
. Padrões ANORMAIS (Irregulares)



IMPULSOS



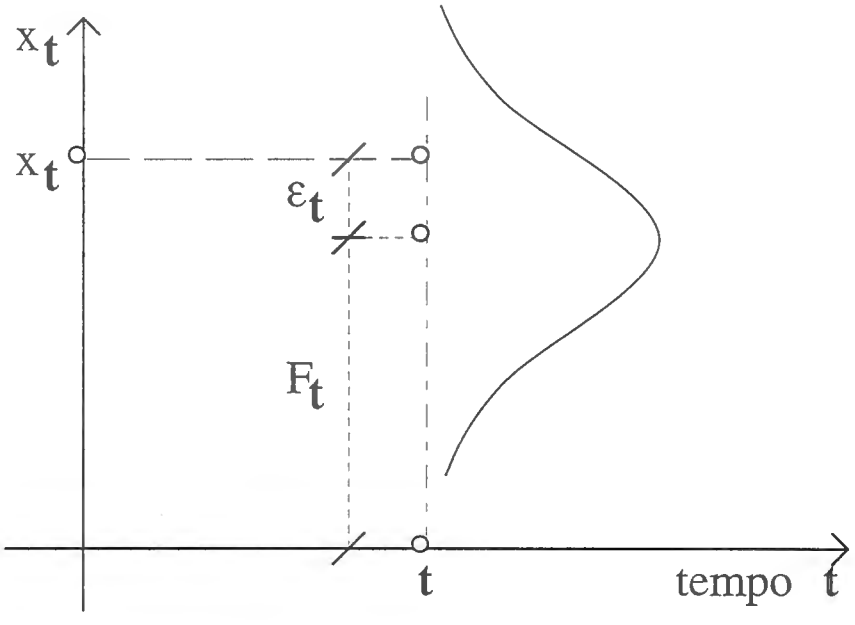
Função "DEGRAU" (Step)



Demanda por Novos Produtos

Demanda por Produtos em Obsolescência

1.3 - MODELO USUAL DAS SÉRIES TEMPORAIS



$x_t = F_t + \varepsilon_t$

x_t : valor do fator de interesse no período de tempo t.

F_t : uma função determinística do tempo t.

ε_t : componente aleatória ("Erro").

. Hipóteses Usuais

$E(\varepsilon_t) = 0$ $\qquad$ $V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$

A partir dessas hipóteses

$$E(x_t) = Ft + E(\varepsilon_t) \qquad \mathbf{E(x_t) = F_t}$$

$$V(x_t) = V(\varepsilon_t) \qquad \mathbf{V(x_t)} = \sigma_\varepsilon^2$$

. Em muitos modelos de Séries Temporais, a função F_t é dada por:

$$F_t = \sum_{i=1}^{m} a_i f_i(t) \qquad \text{onde}$$

$f_i(t)$: funções adequadas de t (i-ésimo termo do modelo).

a_i : coeficiente do i-ésimo termo do modelo.

que leva a

$$x_t = \sum_{i=1}^{m} a_i f_i(t) + \varepsilon_t \qquad t = 1, 2, ..., T$$

1.4 - MÉTODOS DE PREVISÃO PARA SÉRIES TEMPORAIS

. REGRESSÃO

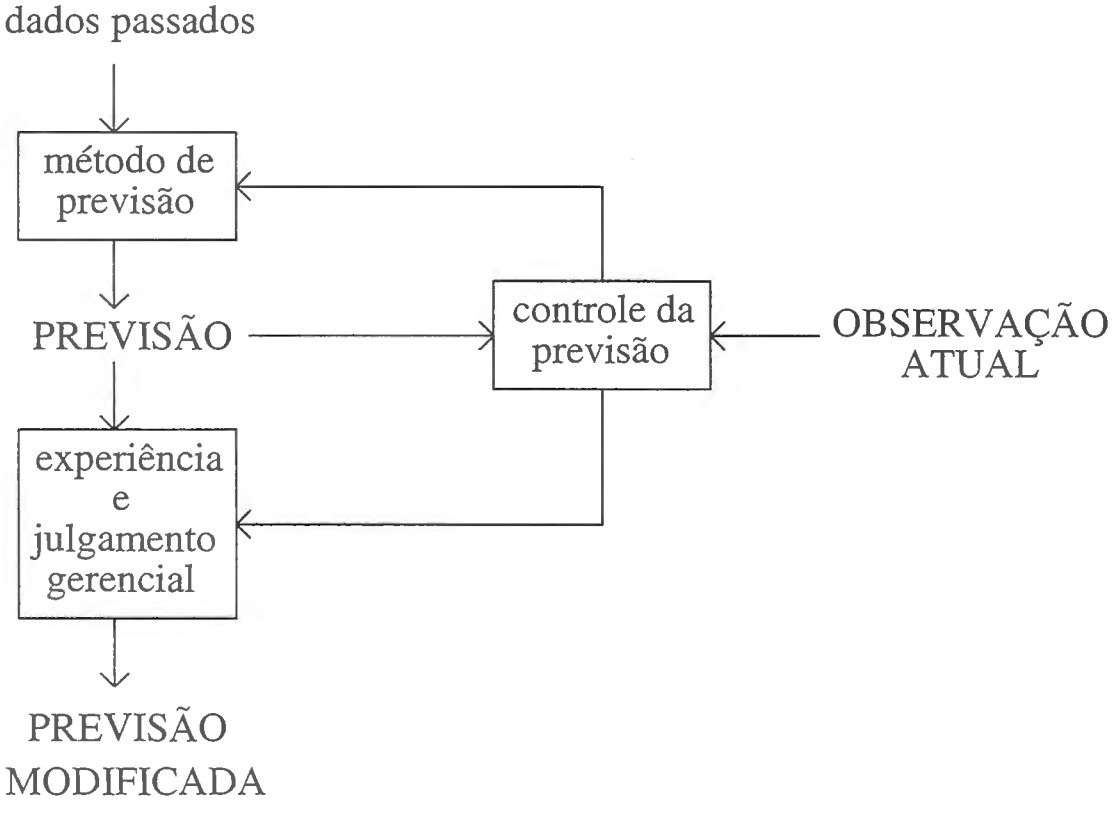
. MÉDIA MÓVEL

. AMORTECIMENTO EXPONENCIAL (média exponencial)

. MODELOS DE BOX-JENKINS

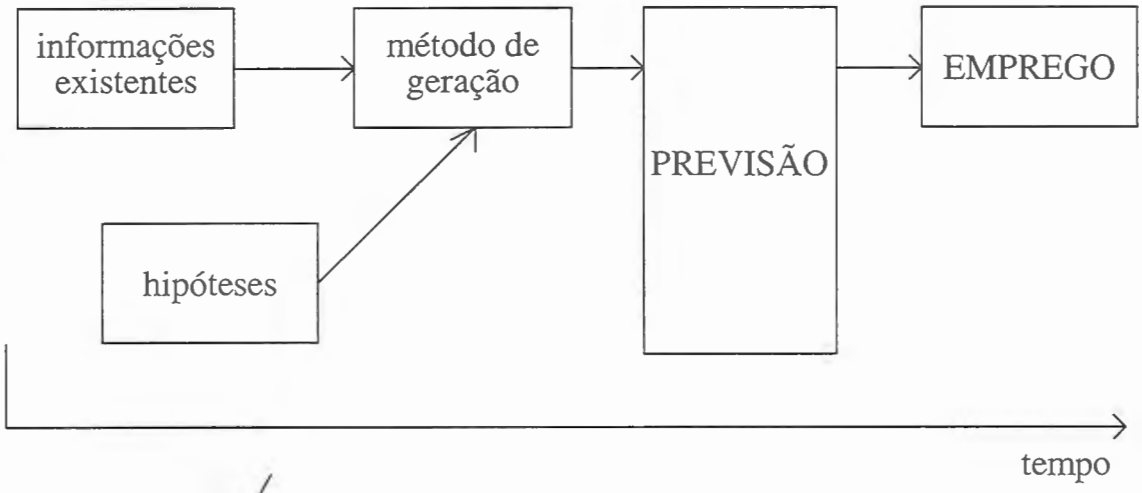
Obs.: Métodos Eficientes para previsões de CURTO PRAZO.

1.5 - O PROCESSO DE PREVISÃO



1.6 - ESCOLHA DO MODELO E MÉTODO DE PREVISÃO

. Questão Primária: Quais os OBJETIVOS (EMPREGO) da Previsão.



. Critérios
- PRECISÃO
- SIMPLICIDADE COMPUTACIONAL
- FLEXIBILIDADE

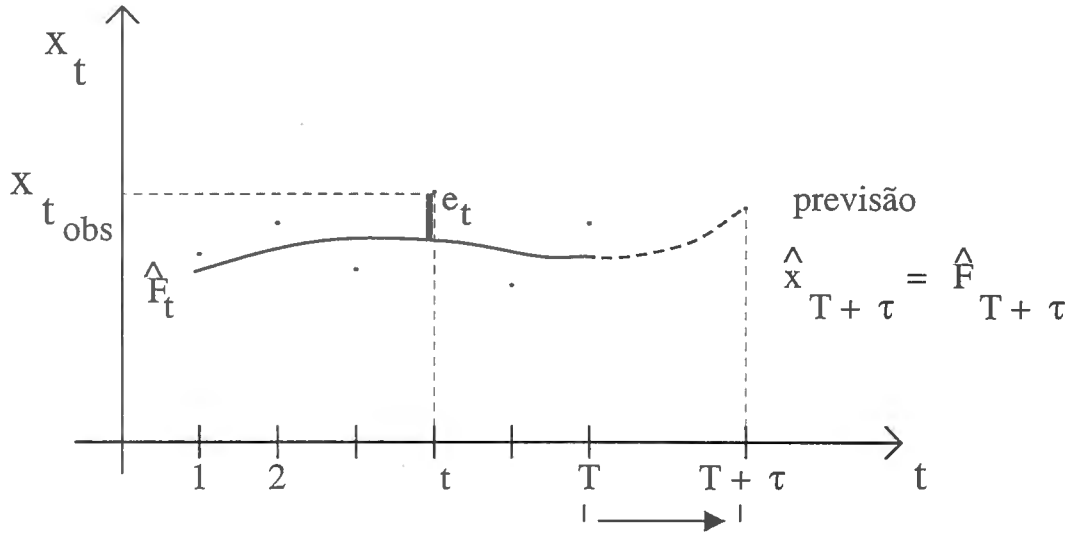
1.7 - USO DE PREVISÕES NOS SISTEMAS DE PRODUÇÃO (aplicações usuais)

. Fator de interesse x_t : DEMANDA por Produtos e/ou Serviços.

Áreas:

. PLANEJAMENTO E PROGRAMAÇÃO DA PRODUÇÃO
. GESTÃO DE ESTOQUES
. ORÇAMENTOS DE RECEITA E DESPESAS
. POLÍTICA DE PROPAGANDA E DE PREÇOS

2 - MÉTODOS DE REGRESSÃO



. Modelo geral $\quad x_t = \sum_{i=1}^{m} a_i f_i(t) + \varepsilon_t$

. Hipóteses

$E(\varepsilon_t) = 0 \qquad V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 \qquad \underset{i \neq j}{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$

. PREVISÃO da demanda $\underline{x}$ para o período $(T + \tau)$, calculada no período T:

$$\hat{x}_{T+\tau} = \sum_{i=1}^{m} \hat{a}_i(T) . f_i(T+\tau)$$

$\hat{a}_i(T)$: ESTIMATIVA do coeficiente do i-ésimo termo do modelo, calculada no (final do) período T.

2.1 - CRITÉRIO usual para cálculo das estimativas $\hat{a}_i(T)$: MÍNIMOS QUADRADOS DOS DESVIOS

$$e_t = \left[x_{t_{obs}} - \sum_{i=1}^{m} \hat{a}_i(T)\, f_i(t) \right] \qquad t = 1, 2, ..., T$$

. Soma dos quadrados dos desvios ponderados:

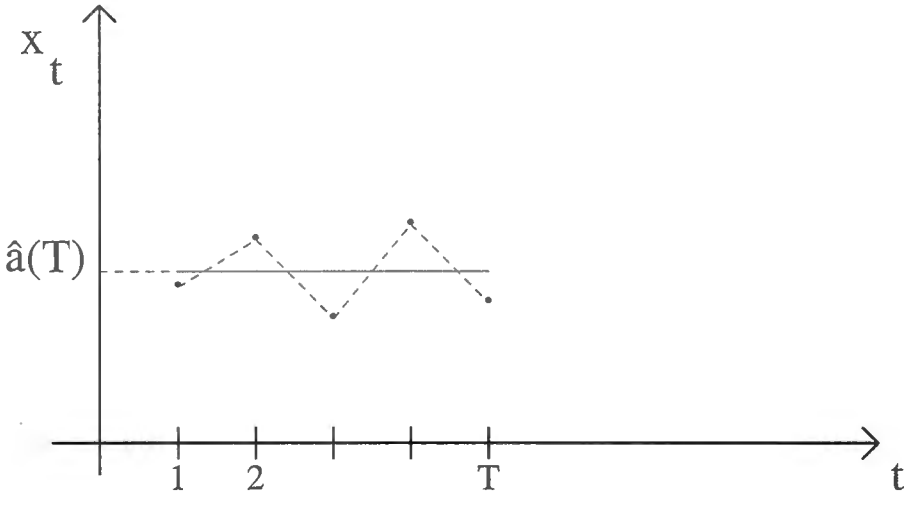
$$SS_E = \sum_{t=1}^{T} (w_t\, e_t)^2$$

. Os valores de $\hat{a}_i(T)$ $(i = 1, 2, ..., m)$ são tais que MINIMIZAM SS_E , sendo obtidos a partir do sistema de equações:

$$\frac{\partial\, SS_E}{\partial\, \hat{a}_i} = 0 \qquad i = 1, 2, ..., m\,.$$

. Na maioria dos casos, $w_t = 1$ $\quad t = 1, 2, ... , T.$

2.2 - Processo CONSTANTE



$x_t = a + \varepsilon_t$ $\qquad$ $(m = 1,\ a_1 = a,\ f_1(t) = t^0)$

. Estimativa do parâmetro <u>a</u> , calculada no período T : â(T)

$$SS_E = \sum_{t=1}^{T} [x_t - \hat{a}(T)]^2 \qquad (w_t = 1)$$

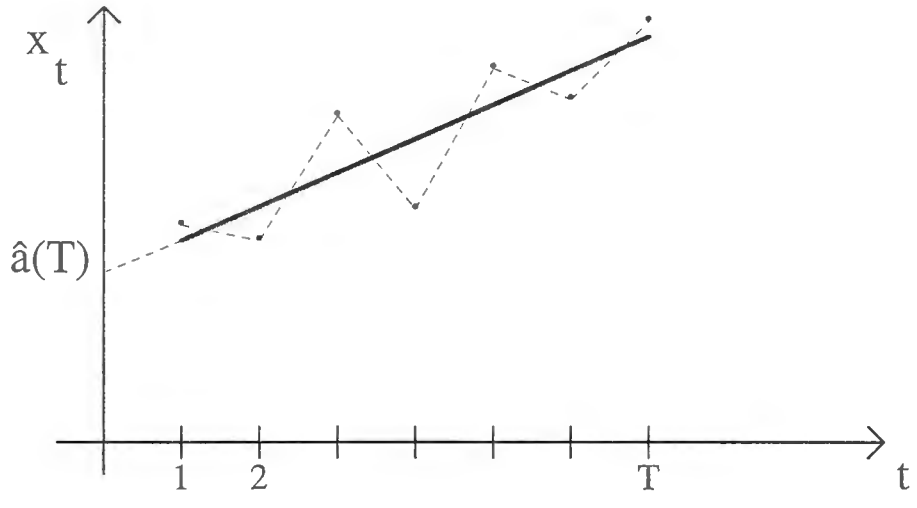
$$\frac{d\,SS_E}{d\,\hat{a}} = -2 \sum_{t=1}^{T} [x_t - \hat{a}(T)]$$

$$\frac{d\,SS_E}{d\,\hat{a}} = 0 \quad \rightarrow \quad \hat{a}(T) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} x_t$$

. PREVISÃO de <u>x</u> para o período $(T + \tau)$, calculada no período T:

$$\hat{x}_{T+\tau} = \hat{a}(T)$$

2.3 - Variação LINEAR



$$x_t = a + bt + \varepsilon_t$$

$$(m = 2, \quad a_1 = a, \quad a_2 = b, \quad f_1(t) = t^0, \quad f_2(t) = t)$$

. Estimativas dos parâmetros <u>a</u> e <u>b</u>, calculadas no período T : $\hat{a}(T)$ e $\hat{b}(T)$.

$$SS_E = \sum_{t=1}^{T} \left[x_t - \hat{a}(T) - \hat{b}(T)\, t\right]^2 \qquad (w_t = 1)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial SS_E}{\partial \hat{a}} = -2 \displaystyle\sum_{t=1}^{T} \left[x_t - \hat{a}(T) - \hat{b}(T)\, t\right] \\ \dfrac{\partial SS_E}{\partial \hat{b}} = -2 \displaystyle\sum_{t=1}^{T} t \left[x_t - \hat{a}(T) - \hat{b}(T)\, t\right] \end{cases}$$

. $\dfrac{\partial SS_E}{\partial \hat{a}} = 0$ e $\dfrac{\partial SS_E}{\partial \hat{b}} = 0$ levam a:

$$\begin{cases} \hat{a}(T).T + \hat{b}(T) \sum_{t=1}^{T} t = \sum_{t=1}^{T} x_t \\ \\ \hat{a}(T) \sum_{t=1}^{T} t + \hat{b}(T) \sum_{t=1}^{T} t^2 = \sum_{t=1}^{T} t\, x_t \end{cases}$$

. Sendo $\sum_{t=1}^{T} t = T(T+1)/2$ e

$\sum_{t=1}^{T} t^2 = T(T+1)(2T+1)/6$, vem que:

$$\begin{cases} \hat{a}(T) = \dfrac{2(2T+1)}{T(T-1)} \sum_{t=1}^{T} x_t - \dfrac{6}{T(T-1)} \sum_{t=1}^{T} t\, x_t \\ \hat{b}(T) = \dfrac{12}{T(T^2-1)} \sum_{t=1}^{T} t\, x_t - \dfrac{6}{T(T-1)} \sum_{t=1}^{T} x_t \end{cases}$$

. PREVISÃO de $\underline{x}$ para o período $(T + \tau)$, calculada no período T:

$$\hat{x}_{T+\tau} = \hat{a}(T) + \hat{b}(T).[T + \tau]$$

2.4 - Caso GERAL

$$x_t = \sum_{i=1}^{m} a_i f_i(t) + \varepsilon_t$$

. Estimativas dos parâmetros a_i $(i = 1, 2, ..., m)$, calculadas no período T : $\hat{a}_i(T)$.

$$SS_E = \sum_{t=1}^{T} \left[w_t \left[x_t - \sum_{i=1}^{m} \hat{a}_i(T) f_i(t) \right] \right]^2$$

Considerando:

. $x = [\, x_1, x_2, ..., x_T]$ vetor linha das T observações de x;

. F uma matriz (m x T) das funções $f_i(t)$, tal que:

$$F = \begin{bmatrix} f_1(1) & f_1(2) \ldots & f_1(T) \\ f_2(1) & f_2(2) \ldots & f_2(T) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_m(1) & f_m(2) \ldots & f_m(T) \end{bmatrix} \quad ;$$

. W uma matriz diagonal (T x T) dos pesos w_t associados aos desvios e_t, tal que:

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w_T \end{bmatrix} \quad ;$$

$$. \hat{a} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1(T) \\ \hat{a}_2(T) \\ \vdots \\ \hat{a}_m(T) \end{bmatrix}$$

vetor das estimativas dos parâmetros a_i (i = 1, 2, ..., m).

A soma dos quadrados dos desvios ponderados, fica:

$$SS_E = xW^2x' - \hat{a}' FW^2 x' - xW^2 F' \hat{a} + \hat{a}' FW^2 F' \hat{a}$$

e $$\frac{d\, SS_E}{d\, \hat{a}} = -2\, FW^2 x' + 2\, FW^2 F' \hat{a} \quad .$$

Fazendo $\frac{d\, SS_E}{d\, \hat{a}} = 0$, vem que :

$$\boxed{\hat{a} = G^{-1}\, g} \qquad \text{onde}$$

$$G = (FW)\,(FW)' \qquad \text{e} \qquad g = FW^2\, x' \quad .$$

Em notação escalar:

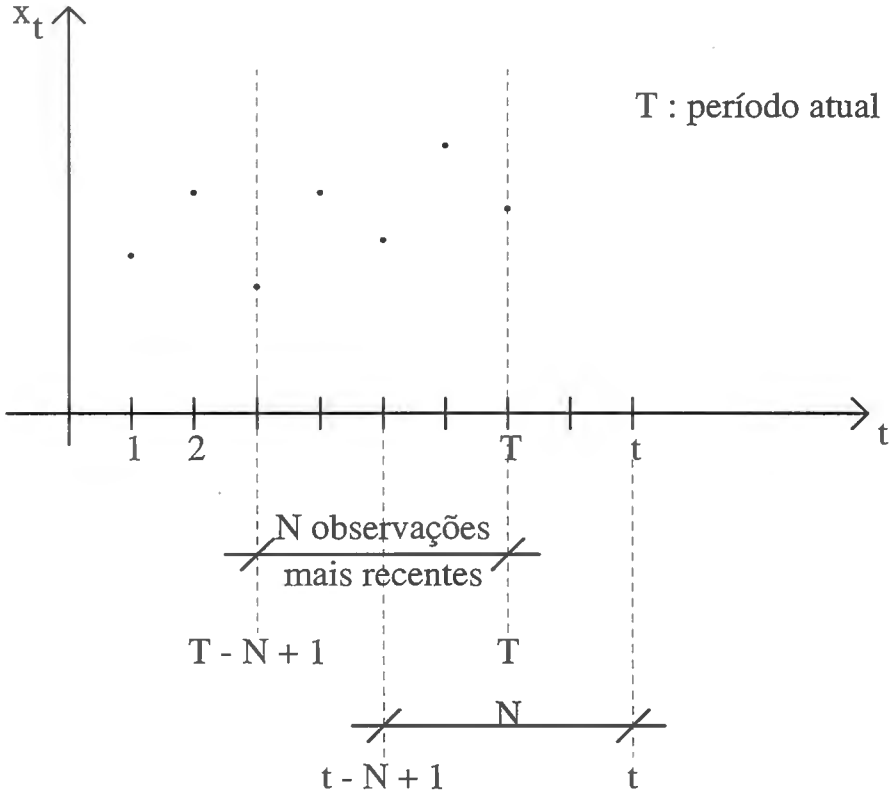
$$\begin{cases} G_{ij} = \sum_{t=1}^{T} w_t^2\, f_i(t)\, f_j(t) & i, j = 1, 2, \ldots, m \\ g_i = \sum_{t=1}^{T} w_t^2\, x_t\, f_i(t) & i = 1, 2, \ldots, m \end{cases}$$

2.5 - ESTIMATIVA da Variância σ_ε^2

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{T - m} \sum_{t=1}^{T} e_t^2$$

$$e_t = \left[x_{t_{obs}} - \sum_{i=1}^{m} \hat{a}_i(T) \,.\, f_i(t) \right]$$

3 - MÉTODOS DE MÉDIA MÓVEL



3.1 - Processo CONSTANTE

$$x_t = a + \varepsilon_t \qquad E(\varepsilon_t) = 0 \qquad V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$$

. Estimativa do parâmetro <u>a</u> : $\hat{a}$ (T)
(critério dos MÍNIMOS QUADRADOS)

$$SS_E = \sum_{t = T-N+1}^{T} [x_t - \hat{a}(T)]^2$$

. a partir de $\frac{d\,SS_E}{d\,\hat{a}} = 0$, obtém-se

$$\hat{a}(T) = \frac{1}{N} \sum_{t = T-N+1}^{T} x_t \equiv M_T$$

M_T : Média Móvel de N períodos.

OBS.: M_T pode ser obtido de maneira "recorrente", a partir de

$$M_T = M_{T-1} + \frac{1}{N}(x_T - x_{T-N})$$

. PREVISÃO de $\underline{x}$ para o período $(T + \tau)$, calculada no período T :

$$\hat{x}_{T+\tau} = \hat{a}(T) = M_T$$

3.2 - Variação LINEAR

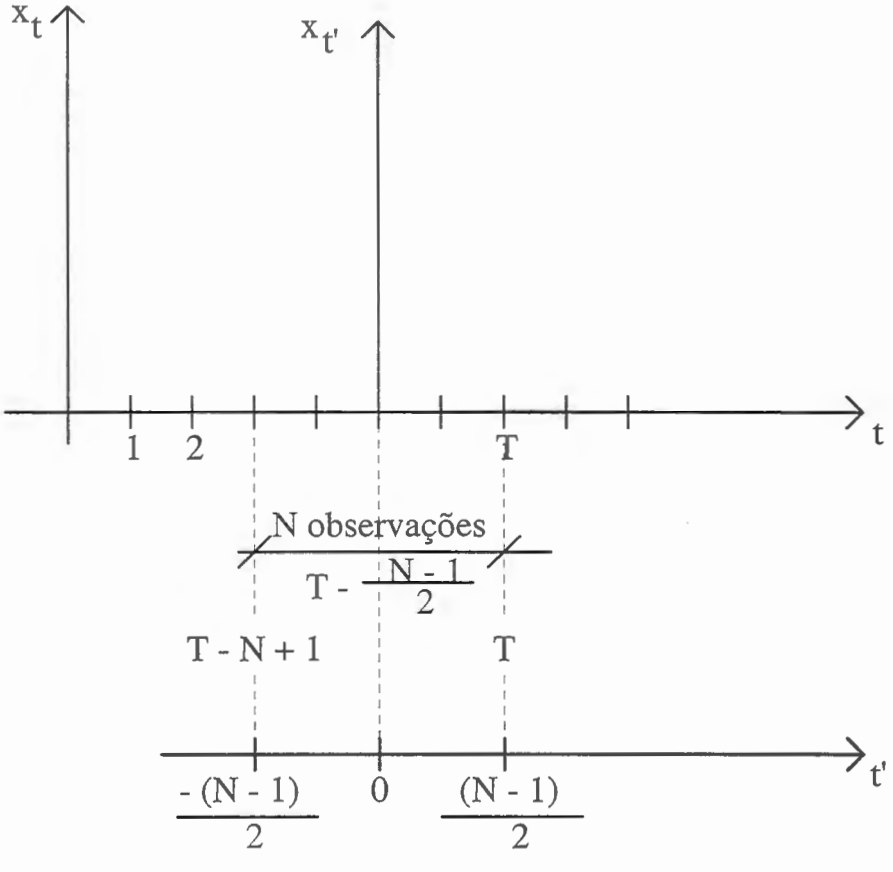
$$x_t = a + bt + \varepsilon_t \qquad E(\varepsilon_t) = 0 \qquad V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$$

3.2.1 - Estimativas dos parâmetros a e b por meio do critério dos MÍNIMOS QUADRADOS

$$SS_E = \sum_{t=T-N+1}^{T} [x_t - \hat{a}(T) - \hat{b}(T)\, t]^2$$

. Com o objetivo de simplificar os cálculos, efetua-se uma troca de variáveis de t para t ', onde:

$$t' = t - \left(T - \frac{N-1}{2}\right)$$



. A partir daí,

$$SS_E = \sum_{t'=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} [x_{t'} - \hat{a}'(T) - \hat{b}(T)\, t']^2$$

. $\dfrac{\partial\, SS_E}{\partial\, \hat{a}'} = 0$ e $\dfrac{\partial\, SS_E}{\partial\, \hat{b}} = 0$ levam a:

$$\begin{cases} \hat{a}'(T) = \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{t=T-N+1}^{T} x_t \equiv M_T \\[2ex] \hat{b}(T) = \dfrac{12}{N(N^2-1)} \displaystyle\sum_{t=T-N+1}^{T} \left(t - T + \dfrac{N-1}{2}\right) x_t \equiv W_T \end{cases}$$

OBS.: As estimativas M_T e W_T podem ser obtidas de maneira "recorrente", a partir de:

$$M_T = M_{T-1} + \frac{1}{N}(x_T - x_{T-N}) \qquad \text{e}$$

$$W_T = W_{T-1} + \frac{12}{N(N^2-1)}\left[\frac{N-1}{2} x_T + \frac{N+1}{2} x_{T-N} - N.\, M_{T-1}\right]$$

. Notar que $\hat{a}(T) = M_T - W_T\left(T - \dfrac{N-1}{2}\right)$.

. PREVISÃO de $\underline{x}$ para o período (T + τ), calculada no período T :

$$\hat{x}_{T+\tau} = \hat{a}(T) + \hat{b}(T)\,[T + \tau] \qquad \text{ou}$$

$$\hat{x}_{T+\tau} = \hat{a}'(T) + \hat{b}(T)\left[\frac{N-1}{2} + \tau\right] \quad \text{que leva a}$$

$$\hat{x}_{T+\tau} = M_T + W_T\left[\frac{N-1}{2} + \tau\right]$$

3.2.2 - Estimativas dos parâmetros a e b por meio das MÉDIAS MÓVEIS DE 2a. ORDEM

. Média Móvel (de 1a. ordem):

$$M_T = \frac{1}{N}\sum_{t=T-N+1}^{T} x_t$$

. Média Móvel de 2a. ordem:

$$M_T^{[2]} = \frac{1}{N}\sum_{t=T-N+1}^{T} M_t$$

. Suponha $x_t = a + bt$ (sem considerar a componente aleatória ε_t).

. Média Móvel de N períodos, calculada no período t :

$$M_t = \frac{1}{N}\left[x_{t-N+1} + x_{t-N+2} + \ldots + x_t\right]$$

sendo $x_t = a + bt$, vem que:

$$M_t = a + bt - b\,\frac{(N-1)}{2} \qquad (*)$$

. Média Móvel de <u>2a. ordem</u> de N períodos, calculada no período t :

$$M_t^{[2]} = \frac{1}{N}\left[M_{t-N+1} + M_{t-N+2} + \ldots + M_t\right]$$

sendo $M_t = a + bt - b\,\frac{(N-1)}{2}$, vem que:

$$M_t^{[2]} = a + bt - b\,(N-1) \qquad (**)$$

. De (*) e (**) , obtém-se:

$$a = 2M_t - M_t^{[2]} - bt \equiv \hat{a}(t)$$

$$b = \frac{2}{N-1}\left(M_t - M_t^{[2]}\right) \equiv \hat{b}(t)$$

e $$x_t = a + bt = 2M_t - M_t^{[2]} \equiv \hat{x}_t$$

. OBS.: Notar que $M_t^{[2]}$ pode ser calculado de maneira "recorrente", a partir de:

$$M_t^{[2]} = M_{t-1}^{[2]} + \frac{1}{N}(M_t - M_{t-N})$$

. PREVISÃO de $\underline{x}$ para o período $(T + \tau)$, calculada no período T :

$$\hat{x}_{T+\tau} = \hat{x}_T + \hat{b}(T) \,.\, \tau$$

$$\hat{x}_{T+\tau} = 2M_T - M_T^{[2]} + \tau\left(\frac{2}{N-1}\right)\left(M_T - M_T^{[2]}\right).$$

OBS.: As PREVISÕES a serem obtidas pelo método da Média Móvel de 2a. ordem (item 3.2.2) não necessariamente coincidem com as previsões fornecidas pelo método do item 3.2.1 (estimativas dos parâmetros pelo critério dos Mínimos Quadrados).

3.3 - ESCOLHA do valor de N .
(número de observações para cálculo da Média Móvel)

CRITÉRIOS GERAIS:

. Quanto MAIOR N , tanto MENOR a capacidade de "reação" do método a mudanças que possam ocorrer nos (verdadeiros) valores dos parâmetros do Modelo;

. Quanto MAIS ESTÁVEL for o processo de geração de $\underline{x}$, tanto MAIS ADEQUADOS serão os valores MAIORES de N.

EXEMPLO

As vendas semanais de um produto são apresentadas na tabela abaixo. Assume-se que o processo gerador da Demanda pode ser modelado através de uma variação LINEAR. Deseja-se utilizar o Método da Média Móvel de 5 semanas (N = 5) para prever as vendas da semana seguinte ($\tau = 1$).

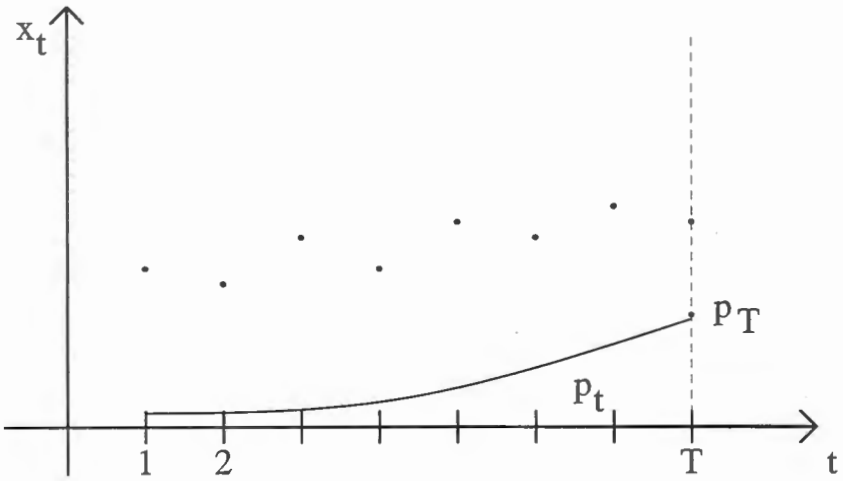
i) Comparar as previsões que seriam obtidas pelos dois métodos apresentados (itens 3.2.1 e 3.2.2) com as vendas que efetivamente ocorreram.

ii) Calcular as previsões que seriam obtidas pelo Método de Regressão, considerando T inicial = 5.

iii) Comparar os desvios que ocorreriam nos três métodos de previsão (itens 2.3, 3.2.1 e 3.2.2).

SEMANA (t)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
DEMANDA (x_t)	10	12	15	14	16	19	18	21	23	20	22	24	23	21	25

4 - MÉTODOS DE AMORTECIMENTO EXPONENCIAL (Média Exponencial)



p_t : Função <u>Exponencial</u> de t, que associa pesos distintos (importância relativa) aos valores $x_{t_{obs}}$.

4.1 - Processo CONSTANTE

$$x_t = a + \varepsilon_t \qquad E(\varepsilon_t) = 0 \qquad V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 \qquad \underset{i \neq j}{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$$

4.1.1 - Estimativa do parâmetro a , calculada no período T , utilizando o critério dos MÍNIMOS QUADRADOS PONDERADOS:

$$SS_E = \sum_{t=1}^{T} \beta^{T-t} \left[x_{t_{obs}} - \hat{a}(T) \right]^2 \qquad \text{com} \quad 0 < \beta < 1$$

$$\begin{cases} e_t : e_1 & e_2 & \dots & e_{T-1} & e_T \\ \beta^{T-t} : \beta^{T-1} & \beta^{T-2} & \dots & \beta^1 & \beta^0 = 1 \end{cases}$$

. Fazendo $\dfrac{d\, SS_E}{d\, \hat{a}} = 0$, tem-se:

$$\hat{a}(T) \sum_{t=1}^{T} \beta^{T-t} = \sum_{t=1}^{T} \beta^{T-t} x_t \quad \text{, que leva a}$$

$$\hat{a}(T) = \frac{1 - \beta}{1 - \beta^T} \cdot \sum_{t=1}^{T} \beta^{T-t} x_t \equiv S_T$$

Subtraindo S_{T-1} de S_T , obtém-se

$$S_T = \frac{1}{(1-\beta^T)} \cdot \left[(1-\beta)\, x_T + \beta(1-\beta^{T-1})\, S_{T-1}\right]$$

Denotando $\alpha = 1 - \beta$ e supondo que T é suficientemente grande tal que $\beta^T \cong 0$, tem-se

$$\boxed{S_T = \alpha\, x_T + (1 - \alpha)\, S_{T-1}}$$

A operação efetuada pela expressão acima é denominada AMORTECIMENTO EXPONENCIAL SIMPLES e

S_T : Estatística de Amortecimento Exponencial;

α : Constante de amortecimento.

. Notar que S_T (estimativa do parâmetro <u>a</u> , calculada no período T) é uma combinação linear de <u>todas</u> as observações passadas, ou seja:

$$S_T = \alpha\, x_T + (1 - \alpha)\, S_{T-1}$$

$$S_T = \alpha\, x_T + \alpha(1 - \alpha)\, x_{T-1} + (1 - \alpha)^2\, S_{T-2}$$

.

.

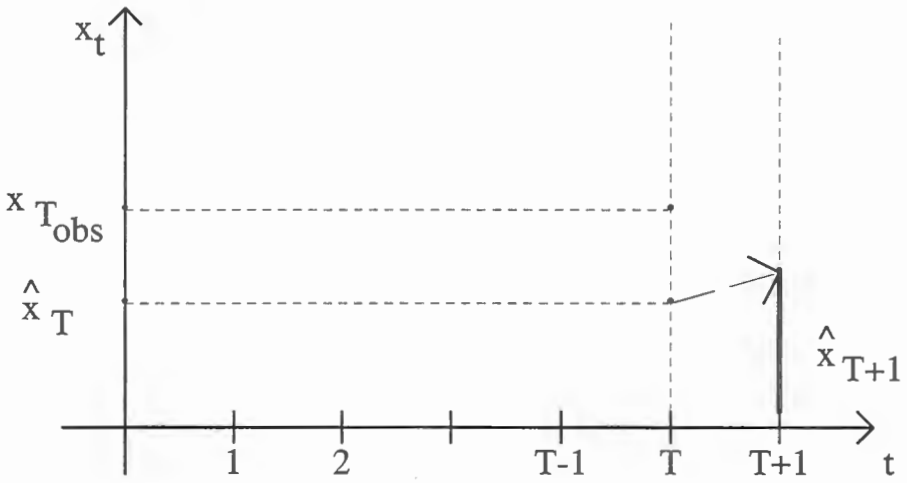
.

$$S_T = \alpha \sum_{k=0}^{T-1} (1 - \alpha)^k\, x_{T-k} + (1 - \alpha)^T\, S_0$$

e que $\alpha \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \alpha)^k = 1$.

4.1.2 - PREVISÃO de $\underline{x}$ para o período (T + τ), calculada no período T :

$$\hat{x}_{T+\tau} = \hat{a}(T) \equiv S_T$$



. No final do período (T - 1):

$$\hat{x}_{(T-1)+\tau} = \hat{a}(T-1) = S_{T-1}$$

$$\text{para } \tau = 1 \quad \rightarrow \quad \hat{x}_T = S_{T-1}$$

. No final do período T, para τ = 1 :

$$\hat{x}_{T+1} = S_T = \alpha\, x_{T_{obs}} + (1-\alpha)\, S_{T-1}$$

$$\hat{x}_{T+1} = S_{T-1} + \alpha\left(x_{T_{obs}} - S_{T-1}\right) \quad \text{ou seja,}$$

$$\boxed{\hat{x}_{T+1} = \hat{x}_T + \alpha\left(x_{T_{obs}} - \hat{x}_T\right)}$$

4.1.3 - Escolha de α e obtenção de S_0

$$\hat{x}_{T+\tau} = S_T = \alpha \sum_{k=0}^{T-1} (1-\alpha)^k x_{T-k} + (1-\alpha)^T S_0$$

. Escolha de α :

. Quanto MENOR α , tanto MENOR a capacidade de reação do método a mudanças que possam ocorrer no valor do parâmetro a .

. Valores usuais: $0{,}01 \leq \alpha \leq 0{,}30$

. Obtenção de S_0:

. Se existirem dados históricos $\rightarrow S_0$ = Média Aritmética das N observações mais recentes;

. Caso contrário $\rightarrow$ S_0 obtido por alguma Predição. Neste caso, pode-se iniciar o processo de Previsão com um valor MAIOR de α , durante os períodos iniciais, com o objetivo de permitir que as observações iniciais tenham um maior peso na "correção" da estimativa S_0 .

4.2 - Variação LINEAR

$x_t = a + bt + \varepsilon_t \qquad E(\varepsilon_t) = 0 \qquad V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 \qquad \underset{i \neq j}{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$

. Estimativas dos parâmetros <u>a</u> e <u>b</u> , por meio das ESTATÍSTICAS DE AMORTECIMENTO EXPONENCIAL de 2a. ORDEM:

$$\begin{cases} S_t = \alpha x_t + (1 - \alpha) S_{t-1} & \text{Estatística de 1a. ordem} \\ S_t^{[2]} = \alpha S_t + (1 - \alpha) S_{t-1}^{[2]} & \text{Estatística de 2a. ordem} \end{cases}$$

. Pode-se mostrar que:

$$\begin{cases} E(S_t) = E(x_t) - \dfrac{\beta}{\alpha} b & (*) \\ E(S_t^{[2]}) = E(S_t) - \dfrac{\beta}{\alpha} b & (**) \\ \text{onde} \quad \beta = 1 - \alpha . \end{cases}$$

. De (*) e (**) , obtém-se

$$E(x_t) = 2\, E(S_t) - E(S_t^{[2]})$$

de forma que pode-se estimar x_T por meio de :

$$\hat{x}_T = 2\,S_T - S_T^{[2]} \quad .$$

. De (**) , obtém-se (para t = T):

$$b = \frac{\alpha}{\beta}\left[E(S_T) - E\left(S_T^{[2]}\right)\right]$$

de maneira que a estimativa de $\underline{b}$ pode ser calculada por:

$$\hat{b}(T) = \frac{\alpha}{\beta}\left(S_T - S_T^{[2]}\right) .$$

.OBS.: $\hat{x}_T = 2\,S_T - S_T^{[2]}$ é uma estimativa do parâmetro $\underline{a}$, considerando a ORIGEM do tempo em T.

. PREVISÃO de $\underline{x}$ para o período (T + τ), calculada no período T :

$$\hat{x}_{T+\tau} = \hat{x}_T + \hat{b}(T)\,.\,\tau$$

$$\hat{x}_{T+\tau} = 2\,S_T - S_T^{[2]} + \frac{\alpha}{\beta}\left(S_T - S_T^{[2]}\right).\,\tau$$

$$\hat{x}_{T+\tau} = (2+\gamma)\, S_T - (1+\gamma)\, S_T^{[2]} \qquad \text{onde} \qquad \gamma = \tau\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

. Obtenção de $\underline{S_0 \quad e \quad S_0^{[2]}}$

$$\begin{cases} S_0 = \hat{a}(0) - \dfrac{\beta}{\alpha}\hat{b}(0) \\[2ex] S_0^{[2]} = \hat{a}(0) - 2\dfrac{\beta}{\alpha}\hat{b}(0) \end{cases}$$

onde :

. Se existirem dados históricos (anteriores a $t = 0$) , $\hat{a}(0)$ e $\hat{b}(0)$ podem ser calculados através de Regressão Linear;

. Caso contrário, $\hat{a}(0)$ e $\hat{b}(0)$ são estimados subjetivamente.

. EXEMPLO

Uma empresa utiliza um sistema computacional de grande porte e paga mensalmente de acordo com a demanda pelo serviço. A empresa já utiliza o sistema há dois anos e deseja estabelecer um procedimento para prever as despesas com 1 mês de antecedência ($\tau = 1$). Supõe-se que a demanda pelo serviço computacional tenha uma variação linear no tempo, sendo adotado o Método de Amortecimento Exponencial com $\alpha = 0{,}1$. A análise dos dados históricos (2 anos) forneceu as estimativas $\hat{a}(0) = 95$ e $\hat{b}(0) = 1{,}0$. (unidades: US$ 100)

i) Prever a despesa para o mês 1 (t =1).

ii) Supondo que as despesas mensais dos próximos 12 meses sejam as apresentadas na tabela abaixo, comparar as previsões com os valores ocorridos.

iii) Lançar em um gráfico (x_t x t) os valores previstos e os ocorridos.

mês (t)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
despesa (x_t)	98	94	99	104	108	100	106	104	118	109	102	116

4.3 - Variação LINEAR CÍCLICA

. Método de WINTERS

$$x_t = (a + bt)\, c_t + \varepsilon_t \qquad \text{, onde}$$

a : componente permanente
b : componente de "tendência"
c_t : FATOR SAZONAL para o período t
ε_t : componente aleatória

OBS.: Os fatores sazonais c_t são definidos de forma que

$$\sum_{t=1}^{L} c_t = L \qquad \text{, onde}$$

L = número de períodos do CICLO ("ESTAÇÃO").

4.3.1 - Procedimento para REVISÃO PERIÓDICA das estimativas dos parâmetros a, b e c_t. (Método Heurístico)

. No final de qualquer período T, após a observação do valor x_T :

I) Revisão da estimativa do parâmetro a

$$\hat{a}(T) = \alpha \left[\frac{x_T}{\hat{c}_T\,(T-L)} \right] + (1-\alpha)\left[\hat{a}\,(T-1) + \hat{b}\,(T-1)\right]$$

onde $0 < \alpha < 1$ é uma constante de amortecimento.

II) Revisão da estimativa do parâmetro b

$$\hat{b}(T) = \beta[\hat{a}(T) - \hat{a}(T-1)] + (1-\beta)\hat{b}(T-1)$$

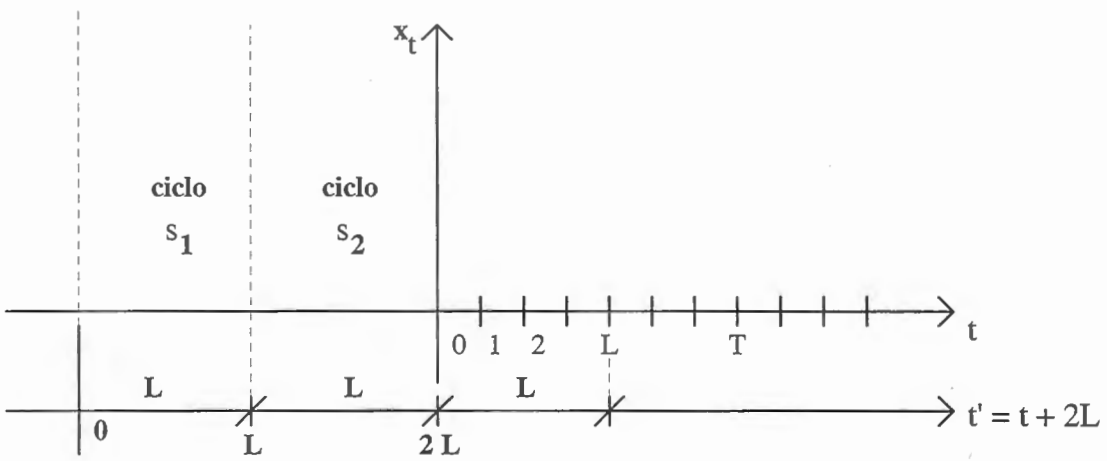
onde $0 < \beta < 1$ é uma segunda constante de amortecimento.

III) Revisão da estimativa do parâmetro c_T

$$\hat{c}_T(T) = \gamma\left[\frac{x_T}{\hat{a}(T)}\right] + (1-\gamma)\ \hat{c}_T(T-L)$$

onde $0 < \gamma < 1$ é uma terceira constante de amortecimento.

4.3.2 - Procedimento para obtenção das estimativas iniciais $\hat{a}(0)$, $\hat{b}(0)$ e $\hat{c}_t(0)$ para $t = 1, 2, ..., L$.



Considerando a disponibilidade dos valores de $\underline{x}$ ocorridos nos últimos 2 ciclos s_1 e s_2, faz-se :

$$. \hat{b}(0) = \frac{1}{L}\left(\bar{x}_{s_2} - \bar{x}_{s_1}\right)$$

onde

$\bar{x}_{s_1}$: média aritmética das demandas $\underline{x}$ ocorridas no ciclo s_1

$\bar{x}_{s_2}$: média aritmética das demandas $\underline{x}$ ocorridas no ciclo s_2

$$. \hat{a}(0) = \bar{x}_{obs} + \frac{3L}{2}\hat{b}(0) - \frac{1}{L^2}\sum_{t'=1}^{L} t' \left(x_{t'+L} - x_{t'}\right)$$

onde

$$\bar{x}_{obs} = \frac{1}{2L}\sum_{t'=1}^{2L} x_{t'}$$

$$. \hat{c}_t(0) = \frac{1}{2}\left[\frac{x_{t-2L}}{\hat{a}(0) - (2L-t)\,\hat{b}(0)} + \frac{x_{t-L}}{\hat{a}(0) - (L-t)\,\hat{b}(0)}\right]$$

para $t = 1, 2, \ldots, L$.

4.3.3 - PREVISÃO de $\underline{x}$ para o período $(T + \tau)$, calculada no período T :

$$\hat{x}_{T+\tau} = \left[\hat{a}(T) + \hat{b}(T).\tau\right].\ \hat{c}_{T+\tau}(T+\tau-L)$$

OBS.:

I) No caso de variação CÍCLICA, o modelo é dado por:

$$x_t = a \, . \, c_t + \varepsilon_t \; .$$

Neste caso, as estimativas dos parâmetros a e c_t, e as previsões de $\underline{x}$ são obtidas a partir das expressões do modelo LINEAR CÍCLICO, fazendo-se $\hat{b}(T) = 0$.

II) Para a variação CÍCLICA (b = 0) , as estimativas INICIAIS dos fatores sazonais são usualmente obtidas a partir de:

$$\hat{c}_t(0) = \frac{x_{t-L}}{\bar{x}_{s_2}} \qquad \text{para } t = 1, 2, ..., L \, .$$

onde $$\bar{x}_{s_2} = \frac{1}{L} \sum_{t=1}^{L} x_{t-L} \equiv \hat{a}(0).$$

III) Na expressão de $\hat{x}_{T+\tau}$, se $T + \tau - L \langle 0$, substitui-se

$\hat{c}_{T+\tau}(T + \tau - L)$ por $\hat{c}_{T+\tau}(0)$.

IV) Nas expressões de $\hat{a}(T)$ e $\hat{c}_T(T)$, quando $T - L \langle 0$ substitui-se $\hat{c}_T(T - L)$ por $\hat{c}_T(0)$.

. EXEMPLO

A demanda mensal por um certo produto é considerada CÍCLICA anual (L = 12 meses). Deseja-se utilizar o Método de Winters para a previsão dessa demanda, com constantes $\alpha = 0{,}2$, $\beta = 0{,}1$ e $\gamma = 0{,}5$. Os dados históricos (demanda) correspondentes aos dois últimos anos são apresentados na tabela abaixo.

i) Utilizando os dados do primeiro ano e considerando inicialmente $\hat{b}(0) = 0$ (variação cíclica), comparar as demandas que ocorreram no segundo ano com as respectivas previsões efetuadas para $\tau = 1$ mês.

ii) Considerando os dados dos dois últimos anos e variação Linear Cíclica, calcular a previsão da demanda correspondente ao mês de abril/93.

mês/ano	04/91	05/91	06/91	07/91	08/91	09/91	10/91	11/91	12/91	01/92	02/92	03/92
demanda x	4	2	5	8	11	13	18	15	9	6	5	4

mês/ano	04/92	05/92	06/92	07/92	08/92	09/92	10/92	11/92	12/92	01/93	02/93	03/93
demanda x	5	4	7	7	15	17	24	18	12	7	8	6

5 - ANÁLISE DE ERROS

. Def.: ERRO DE PREVISÃO no período t

$$\boxed{e_t = x_t - \hat{x}_t} \qquad \text{onde}$$

x_t: valor (ocorrido) de $\underline{x}$ no período t;
$\hat{x}_t$: previsão de $\underline{x}$ para o período t.

. Hipóteses usuais sobre o erro de previsão:

$$e_t \sim \text{NORMAL}\ (0,\ \sigma_e^2)$$

. Desvio absoluto médio do erro de previsão (ERRO ABSOLUTO MÉDIO): Δ

$$\Delta = E\{\,|\,e - E(e)\,|\,\} \quad \text{supondo } E(e) = 0$$

$$\Delta = E\{\,|\,e\,|\,\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,.\,\sigma_e \cong 0{,}8\ \sigma_e$$

. Expressões para cálculo de estimativas do ERRO ABSOLUTO MÉDIO, no final de um período T : $\hat{\Delta}(T)$

. $\hat{\Delta}(T) = \alpha\,|\,e_T\,| + (1-\alpha)\,\hat{\Delta}(T-1)$ ..... (média exponencial)

ou

. $\hat{\Delta}(T) = \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{t=T-N+1}^{T} |\,e_t\,|$ ..... (média móvel)

No caso de se calcular $\hat{\Delta}(T)$ por meio de "média exponencial", deve-se estimar um valor para $\hat{\Delta}(0)$.

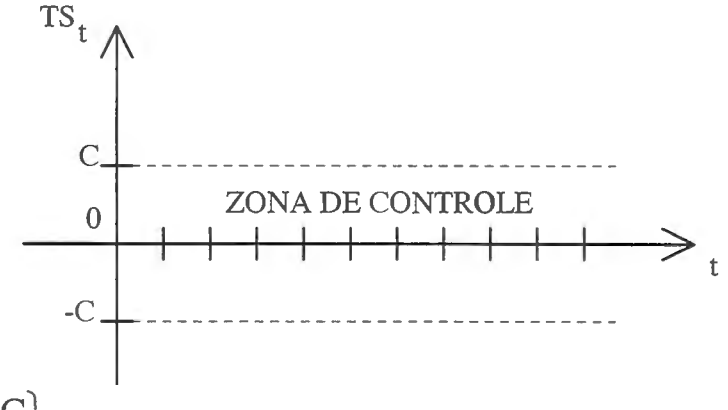
Havendo dados históricos da demanda $\underline{x}$ (H observações), $\hat{\Delta}(0)$ pode ser calculado por:

$$\hat{\Delta}(0) = \frac{1}{H} \sum_{t=-H+1}^{0} \left| x_{t_{obs}} - x_{t_{calc}} \right|$$

onde os valores $x_{t_{calc.}}$ $(t = -H + 1, ..., 0)$ são obtidos a partir de uma Função de Regressão sobre as H observações.

. Def.: SINAL DE RASTREAMENTO (TRACKING SIGNAL)

TS_t : Estatística baseada nos erros de previsão utilizada para controlar o Sistema de Previsão.



$$\left.\begin{array}{c} -C < TS_t < C \\ \text{ou} \\ |TS_t| < C \end{array}\right\} \rightarrow \text{Sistema de Previsão (modelo e método) apropriado.}$$

5.1 - SINAL DE RASTREAMENTO baseado na SOMA DOS ERROS DE PREVISÃO

. No final do período atual T :

$$Y(T) = \sum_{t=1}^{T} e_t$$

. A partir das hipóteses usuais sobre o erro de previsão e_t , pode-se considerar

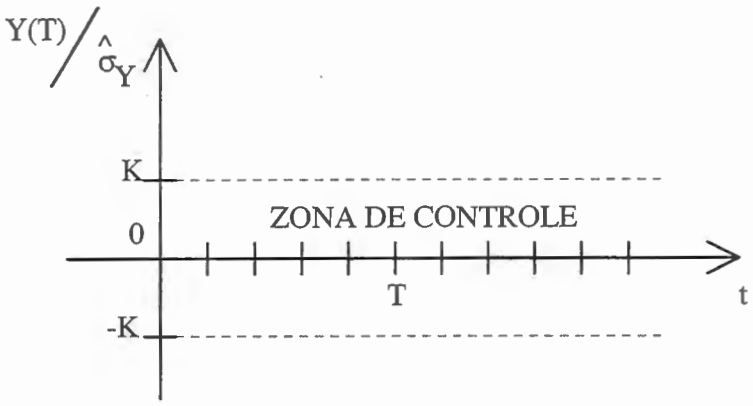
$$Y(T) \sim \text{NORMAL}\,(0, \sigma_Y^2)$$

onde σ_Y^2 pode ser estimada a partir das estimativas de $\sigma_\varepsilon^2 = V(x_t)$ e/ou $\sigma_e^2 = V(e_t)$.

. Neste caso, a Zona de Controle é definida por

$$-K < \frac{Y(T)}{\hat{\sigma}_Y} < K \qquad \text{ou} \qquad \left|\frac{Y(T)}{\hat{\sigma}_Y}\right| < K \ ,$$

sendo K obtido da tabela da Distribuição Normal Reduzida, em função do nível de significância *s* desejado.



. $s = 5\% \rightarrow K = 1{,}96$
. $s = 0{,}2\% \rightarrow K = 3{,}09$

5.1.1 - Modelo de Processo Constante e Método de Amortecimento Exponencial

. Para este caso, tem-se:

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{1-\beta^2} \cdot \sigma_\varepsilon^2 \quad \text{e} \quad \sigma_\varepsilon^2 = \frac{2-\alpha}{2} \cdot \sigma_e^2$$

onde $\sigma_e = \dfrac{\Delta}{0{,}8}$ e $\beta = 1 - \alpha$.

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{1-\beta^2} \cdot \frac{2-\alpha}{2} \cdot \left(\frac{\Delta}{0{,}8}\right)^2$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{2\alpha} \cdot \left(\frac{\Delta}{0{,}8}\right)^2$$

A estimativa $\hat{\sigma}_Y$ no final do período atual T , é calculada por meio de:

$$\boxed{\hat{\sigma}_Y = \sqrt{\frac{1}{2\alpha}} \cdot \frac{\hat{\Delta}(T)}{0,8}}$$

. A partir daí, a Zona de Controle fica:

$$\left| \frac{Y(T)}{\hat{\Delta}(T)} \right| < \sqrt{\frac{1}{2\alpha}} \cdot \frac{K}{0,8}$$

5.1.2 - Modelo de <u>m</u> parâmetros e Método de Amortecimento Exponencial

. Neste caso, tem-se:

$$\sigma_Y^2 \cong \frac{1}{1 - \beta^{2m}} \cdot \sigma_\varepsilon^2$$

. Para estimativas mais precisas, BROWN (*) apresenta as relações entre σ_ε^2 e σ_e^2 .

(*) BROWN, R.G. , Smoothing, Forecasting and Prediction of Discrete Time Series, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1963. (capítulo 12).

. Um procedimento mais simples consiste em estimar σ_ε^2 a partir de:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{T - m} \cdot \sum_{t=1}^{T} e_t^2$$

assim a estimativa $\hat{\sigma}_Y$ no final do período atual T , é calculada por:

$$\hat{\sigma}_Y = \sqrt{\frac{1}{1 - \beta^{2m}}} \cdot \hat{\sigma}_\varepsilon$$

$$\hat{\sigma}_Y = \left[\frac{1}{(1 - \beta^{2m})\,(T - m)} \cdot \sum_{t=1}^{T} e_t^2 \right]^{1/2}$$

5.2 - SINAL DE RASTREAMENTO baseado no ERRO "AMORTECIDO" no final do período atual T.

$$Z(T) = \alpha \,.\, e_T + (1 - \alpha)\, Z(T - 1)$$

onde Z(0) é estimado subjetivamente ou, na existência de dados históricos da demanda $\underline{x}$ (H observações), estimado por meio de

$$Z(0) = \frac{1}{H} \sum_{t=-H+1}^{0} \left(x_{t_{obs}} - x_{t_{calc}} \right)$$

onde os valores $x_{t_{calc.}}$ são obtidos a partir de uma Função de Regressão sobre os dados históricos.

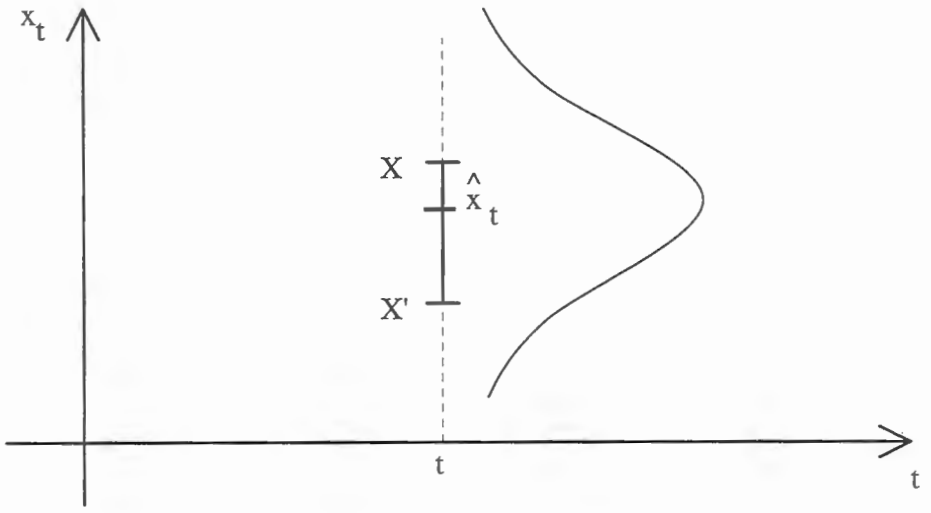
Pode-se iniciar o processo com um valor maior de α, durante os períodos iniciais, com o objetivo de permitir que as observações iniciais ($t \geq 1$) tenham um maior peso na "correção" da estimativa $Z(0)$.

. Neste caso, a Zona de Controle é determinada por:

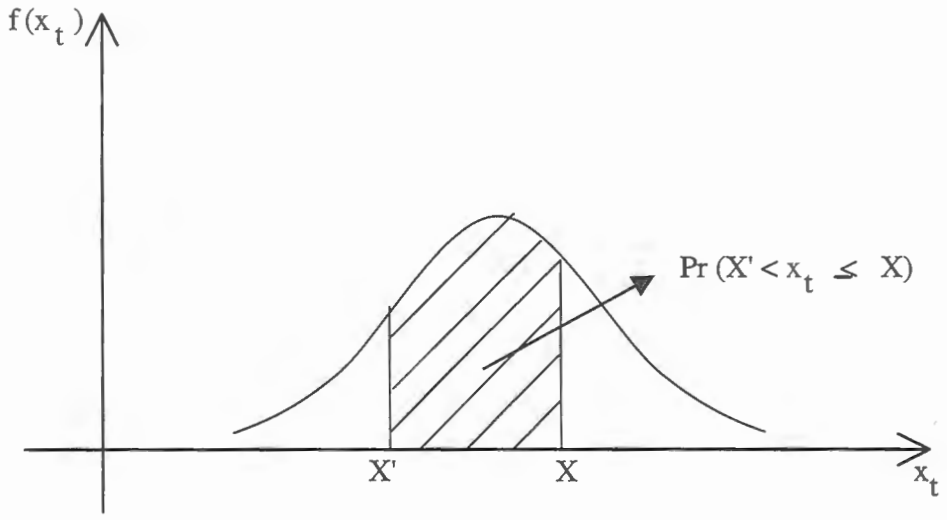
$$\left| \frac{Z(T)}{\hat{\Delta}(T)} \right| < C \qquad \text{com } 0{,}2 \leq C \leq 0{,}4 \text{ (valores usuais).}$$

OBS.: Se o SINAL DE RASTREAMENTO exceder a Zona de Controle em <u>duas</u> ou <u>três</u> observações <u>sucessivas</u>, pode-se concluir que o Sistema de Previsão não está apropriado. Nesse caso, a sua adequação pode requerer a alteração do modelo adotado (por exemplo, acrescentando-se novas componentes) e/ou do método utilizado (por exemplo, aumentando o valor da constante de amortecimento, no caso de média exponencial, pelo fato de que provavelmente certos parâmetros do modelo estão rapidamente se alterando). Uma vez detectadas as causas e efetuadas as alterações no Sistema de Previsão, as quantidades $Y(T)$, ou $Z(T)$, e $\hat{\Delta}(T)$ deverão ser apropriadamente reinicializadas.

6 - PREVISÃO DA FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADES DA DEMANDA



. Além de se obter uma estimativa $\hat{x}_t$ para x_t , deseja-se estimar a probabilidade de $X' < x_t \leq X$, dados X e X'.



. Def.: Função Distribuição de Probabilidade de x_t .

$G(X) = Pr\,(x_t \leq X)$

. Hipótese: G(X) não apresenta variação brusca no tempo (ou seja, praticamente constante).

. $Pr\,(X' < x_t \leq X) = G(X) - G(X')$.

6.1 - ESTIMATIVA da função G(X).

Considere-se que $\underline{x}$ seja medida em uma escala com (n + 1) limites $X_0 < X_1 < X_2 < .... < X_n$, de forma que para uma observação qualquer x_t exista um único valor de k tal que $X_{k-1} < x_t \leq X_k$.

Os limites X_0 e X_n são finitos e os valores usuais de n são entre 10 e 20 (número de classes).

Seja $p_k = Pr\,(X_{k-1} < x_t \leq X_k)$ para k = 1, 2, ..., n.

A partir daí, tem-se:

$$G(X_k) = Pr\,(x_t \leq X_k) = p_1 + p_2 + ... + p_k = \sum_{j=1}^{k} p_j$$

Assim, a função $G(X_k)$ pode ser estimada por meio das estimativas das probabilidades p_j (j = 1, 2, ..., k).

Seja $p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$ e $\hat{p}(t) = \begin{bmatrix} \hat{p}_1(t) \\ \hat{p}_2(t) \\ \vdots \\ \hat{p}_k(t) \\ \vdots \\ \hat{p}_n(t) \end{bmatrix}$

estimativas das probabilidades p_j no período t.

. Então $\hat{G}(X_k) = \sum_{j=1}^{k} \hat{p}_j(t)$

. Suponha que a observação de $\underline{x}$ no período atual T (x_T) seja tal que $X_{k-1} < x_T \leq X_k$, ou seja, x_T é uma observação da classe k.

. Seja u_k um vetor (n x 1) com (n - 1) valores nulos e o valor 1 correspondente à componente k. A partir do valor de $\hat{p}(T-1)$, pode-se revisar as estimativas de p , no período T, após a observação de $\underline{x}$ (valor x_T), por meio de:

$$\boxed{\hat{p}(T) = \alpha \,.\, u_k + (1-\alpha)\ \hat{p}(T-1)}$$

. Em notação escalar:

$$\begin{cases} . \hat{p}_k(T) = \alpha + (1-\alpha)\,\hat{p}_k(T-1) \\ . \hat{p}_j(T) = 0 + (1-\alpha)\,\hat{p}_j(T-1) \qquad j = 1, 2, \ldots, n \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad j \neq k. \end{cases}$$

. **<u>Estimativas iniciais das probabilidades</u>**
p_j (j = 1, 2, ..., n):

. Havendo dados históricos (H observações), as estimativas $\hat{p}_j(0)$ podem ser calculadas por:

$$\hat{p}_j(0) = \frac{H_j}{H} \qquad \text{onde}$$

H_j = número de observações da classe j (ou seja, $X_{j-1} < x_t \leq X_j$) dentre as H observações.

. Não havendo a disponibilidade de dados históricos, as probabilidades $p_j(0)$ deverão ser estimadas subjetivamente.

6.2 - Problemas de Previsão

a) No final do período atual T, dado $0 < q < 1$, determinar $\hat{X}(q)$ uma estimativa de $X(q)$ tal que $\Pr(x_{T+\tau} \leq X(q)) = q$.

. Se q for tal que $\hat{G}(X_k) = q$, sendo X_k o limite superior da classe k, então $\hat{X}(q) = X_k$;

. Caso contrário, se $\hat{G}(X_{k-1}) < q < \hat{G}(X_k)$ então pode-se obter $\hat{X}(q)$ por interpolação linear fazendo:

$$\hat{X}(q) = \frac{[\hat{G}(X_k) - q]X_{k-1} + [q - \hat{G}(X_{k-1})]X_k}{\hat{G}(X_k) - \hat{G}(X_{k-1})}$$

b) No final do período atual T, dados X_r e X_s, limites superiores das classes $\underline{r}$ e $\underline{s}$, com $X_r < X_s$, estimar a $\Pr(X_r < x_{T+\tau} \leq X_s)$.

. Sendo $\Pr(X_r < x_t \leq X_s) = G(X_s) - G(X_r)$

e $$\hat{G}(X_k) = \sum_{j=1}^{k} \hat{p}_j(T) ,$$

tem-se que

$$\hat{\Pr}(X_r < x_{T+\tau} \leq X_s) = \sum_{j=r+1}^{s} \hat{p}_j(T) .$$

EXEMPLO

Os dados da tabela abaixo referem-se à Função Distribuição de Probabilidade da demanda por um certo produto, estimada no final do período (T - 1). Supondo que $x_T = 34$ e $\alpha = 0{,}1$,

i) Calcular as estimativas $\hat{p}_j(T)$, $j = 1, 2, ..., 5$.

ii) Estimar o valor X da demanda tal que
$Pr\ (\ x_{T+1} \leq X\ ) = 90\%$.

iii) Estimar a $Pr\ (\ 20 < x_{T+1} \leq 40\ )$.

Classe j	Limite Superior X_j	$\hat{p}_j(T-1)$
	0	---
1	10	0,60
2	20	0,15
3	30	0,15
4	40	0,05
5	50	0,05

7 – MODELOS DE BOX-JENKINS

"Apropriados para séries temporais onde $\{x_t, t = 1, 2, ...\}$ não podem ser consideradas variáveis aleatórias independentes".

7.1 - Modelos AUTOREGRESSIVOS de ordem p: AR(p) .

$$x_t = K + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \ldots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t$$

onde:

K = constante

$\phi_1, \phi_2, ..., \phi_p$: parâmetros do modelo

ε_t = componente de erro aleatório, usualmente suposta uma v.a. ~ NORMAL $(0, \sigma^2_\varepsilon)$.

OBS.: Os modelos autoregressivos AR(p) podem ser usados para representar tanto Séries Temporais Estacionárias (Processo CONSTANTE) quanto Não-Estacionárias.

7.2 - Modelos de "MÉDIA MÓVEL" de ordem q : MA(q) .

$$x_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

onde:

μ = componente constante, que representa o nível médio da série temporal

θ_1 , θ_2 , ..., θ_q : parâmetros do modelo

ε_i = componente de erro aleatório do período de tempo i (i = t-q, ..., t), usualmente suposta uma v.a. ~ NORMAL (0, σ_ε^2).

ε_i (i = t - q, ..., t) são consideradas v.a. independentes.

OBS.: Os modelos de média móvel MA(q) são adequados para Séries Temporais Estacionárias (Processo CONSTANTE).

7.3 - Modelo misto AUTOREGRESSIVO - MÉDIA MÓVEL de ordem (p, q) : ARMA (p, q).

$$x_t = K' + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \ldots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q} .$$

. Seja o operador de "troca regressiva" B , tal que $By_t = y_{t-1}$. Aplicando-se o operador B em x_t e ε_t , tem-se: $Bx_t = x_{t-1}$ e $B\varepsilon_t = \varepsilon_{t-1}$.

. A partir daí, o modelo ARMA (p, q) pode ser expresso por:

$$. x_t = K' + \phi_1 Bx_t + \phi_2 B^2 x_t + \ldots + \phi_p B^p x_t + \varepsilon_t - \theta_1 B\varepsilon_t - \theta_2 B^2 \varepsilon_t - \ldots - \theta_q B^q \varepsilon_t .$$

$$. (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p) x_t = K' + (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q) \varepsilon_t$$

. ou seja $\boxed{\Phi_p (B)\, x_t = K' + \Theta_q (B)\, \varepsilon_t}$

onde

$$\begin{cases} \Phi_p (B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p \\ \Theta_q (B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q \end{cases}$$

7.4 - Modelo INTEGRADO AUTOREGRESSIVO - MÉDIA MÓVEL de ordem (p, d, q) : ARIMA (p, d, q) .

. Seja o operador "diferencial regressivo" ∇ , tal que $\nabla y_t = y_t - y_{t-1}$. Aplicando-se ∇ sobre x_t , tem-se:

. $\nabla x_t = x_t - x_{t-1} = x_t - Bx_t = (1 - B)x_t$

. $\nabla^2 x_t = \nabla(\nabla x_t) = \nabla(x_t - x_{t-1}) = \nabla x_t - \nabla x_{t-1} =$

$= (x_t - x_{t-1}) - (x_{t-1} - x_{t-2}) = x_t - 2x_{t-1} + x_{t-2} = (1 - B)^2 x_t$.

. sucessivamente $\nabla^d x_t = (1 - B)^d x_t$.

. O modelo ARIMA (p, d, q) é definido por:

$$\Phi_p (B) . \nabla^d x_t = \Theta_q (B) \varepsilon_t .$$

. Exemplo: ARIMA (1, 1, 1)

$$\Phi_1 (B) . \nabla x_t = \Theta_1 (B) \varepsilon_t$$

$$(1 - \phi_1 B) (x_t - x_{t-1}) = (1 - \theta_1 B) \varepsilon_t$$

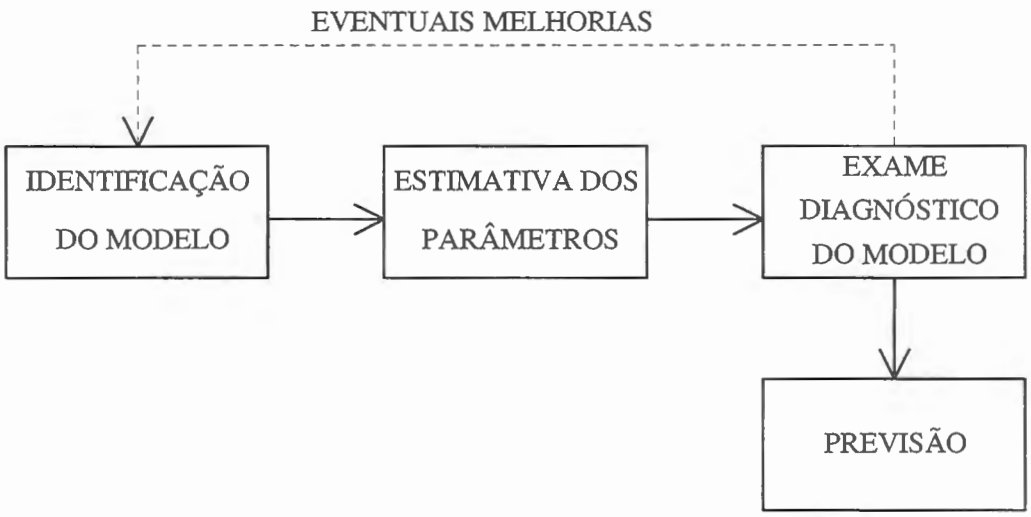
$$x_t - x_{t-1} - \phi_1 Bx_t + \phi_1 Bx_{t-1} = \varepsilon_t - \theta_1 B\varepsilon_t$$

$$x_t - x_{t-1} - \phi_1 x_{t-1} + \phi_1 x_{t-2} = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

$$\boxed{x_t = (1 + \phi_1) x_{t-1} - \phi_1 x_{t-2} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}}$$

7.5 - PROCEDIMENTO DE PREVISÃO UTILIZANDO OS MODELOS DE BOX-JENKINS

. BOX, G.E.P. and JENKINS, G.M., "Time-Series Analysis, Forecasting and Control", Holden-Day, San Francisco, 1970.



7.5.1 - IDENTIFICAÇÃO DO MODELO

Realizada por meio de Análise Estatística de dados históricos (pelo menos 50 observações, para obtenção de resultados satisfatórios), utilizando a Função de Autocorrelação ρ_k e a Função de Autocorrelação Parcial ϕ_{kk} da demanda $\underline{x}$, onde, considerando $x_1, x_2, ..., x_N$ uma Série Temporal Estacionária (processo CONSTANTE), tem-se:

. $$\rho_k = \frac{E\left[(x_t - \mu)\,(x_{t+k} - \mu)\right]}{\sigma_x^2} \quad , \quad k = 0, 1, 2, ...$$

. ϕ_{kk} : k-ésimo coeficiente em um processo AUTOREGRESSIVO de ordem k, obtido a partir das equações de YULE-WALKER :

$$\rho_j = \phi_{k1}\,\rho_{j-1} + \phi_{k2}\,\rho_{j-2} + \dots + \phi_{kk}\,\rho_{j-k}$$

para $j = 1, 2, \dots, k$.

OBS.: Um primeiro método "automático" para identificação do modelo foi apresentado em:
. KANG, A., BEDWORTH, D. and ROLLIER, D., "Automatic Identification of Autoregressive Integrated Moving Average Time Series", IEE Transactions, Institute of Industrial Engineers, vol. 14, No. 3, Sept. 1982.

7.5.2 – ESTIMATIVA DOS PARÂMETROS

O procedimento usual consiste em estimar os parâmetros do modelo por meio do Método dos Mínimos Quadrados.

7.5.3 - EXAME DIAGNÓSTICO DO MODELO

Efetuado a partir de uma Análise Estatística dos desvios $e_t = x_t - \hat{x}_t$ sobre os dados históricos, considerando sua Função de Autocorrelação, com o objetivo de se verificar a ADEQUAÇÃO do modelo e/ou eventuais melhorias sobre ele.

7.5.4. - PREVISÃO da demanda $\underline{x}$

Considere-se, como exemplo , o modelo ARIMA (1, 1, 1). No final do período atual T , após a observação de x_T , tem-se:

$$x_{T+\tau} = (1+\phi_1)\, x_{T+\tau-1} - \phi_1\, x_{T+\tau-2} + \varepsilon_{T+\tau} - \theta_1\, \varepsilon_{T+\tau-1}$$

. Para $\tau = 1$,

$$x_{T+1} = (1+\phi_1)\, x_T - \phi_1\, x_{T-1} + \varepsilon_{T+1} - \theta_1\, \varepsilon_T$$

cuja previsão (estimativa) $\hat{x}_{T+1}$ será :

$$\hat{x}_{T+1} = (1+\hat{\phi}_1)\, x_T - \hat{\phi}_1\, x_{T-1} - \hat{\theta}_1\, e_T \quad ,$$

onde $e_T = x_T - \hat{x}_T$.

. Para $\tau = 2$,

$$\hat{x}_{T+2} = (1+\hat{\phi}_1)\, \hat{x}_{T+1} - \hat{\phi}_1\, x_T$$

. Para $\tau > 2$, de maneira semelhante obtém-se:

$$\hat{x}_{T+\tau} = (1+\hat{\phi}_1)\, \hat{x}_{T+\tau-1} - \hat{\phi}_1\, \hat{x}_{T+\tau-2} \cdot$$

- BIBLIOGRAFIA

BEDWORTH, D.D. & J.E. BAILEY. Integrated production control systems: management, analysis, design. John Wiley, New York, 1987.

HAX, A.C. & D. CANDEA. Production and inventory management. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1984.

JOHNSON, L.A. & D.C. MONTGOMERY. Operations research in production planning, scheduling and inventory control. John Wiley, New York, 1974.

SILVER, E.A. & R. PETERSON. Decision systems for inventory management and production planning. John Wiley, New York, 1985.