INTRODUÇÃO A PROGRAMAÇÃO LINEAR

APRESENTAÇÃO

Desde o segundo semestre de 1990 a disciplina SEM-265 - Pesquisa Operacional I tem estado sob minha responsabilidade, junto ao curso de Engenharia de Produção da EESC-USP.

A dificuldade de suporte bibliográfico, a disposição dos alunos junto a Biblioteca Central desta Escola, nos levou a preparar este material, que nesta versão, ainda, não contempla todo o programa oferecido num semestre com quatro horas de aula semanais.

Objetivamos a elaboração de um texto, mostrando o desenvolvimento teórico do método simplex e reforçando a interpretação econômica e geométrica que a compreensão teórica possibilita. Tivemos, assim, a preocupação de motivar os alunos para a prática no uso de técnicas de programação matemática, por considerá-las uma ferramenta importante para análise e solução de problemas. O texto é baseado fundamentalmente nos livros de Ramalhete et al., Hillier - Liebermann, Bregalda et al e de Chvátal constantes na bibliografia.

Gostaríamos de agradecer ao Sr.Antonio Gallo, pela datilografia da primeira versão, ao Sr. Luiz Fernando Ferreira pela digitação da redação final, ambos do Laboratório de Engenharia de Produção. Agradecemos, ainda, ao Sr. João Paulo Moretti, pelos desenhos realizados e Sr. Paulo Victor Souza Ceneviva pela impressão do trabalho final, ambos do CETEPE, EESC-USP.

Maria Rita Pontes Assumpção Alves
Departamento de Engenharia Mecânica

SETEMBRO/1991.

CÓDIGO: 3.10.00.00-6

ÍNDICE

ÍNDICE ILUSTRAÇÕES

INTRODUÇÃO

A Pesquisa Operacional é um conjunto de atividades de pesquisa para apoio à tomada de decisão junto às funções de gerenciamento, através do uso de métodos formais e científicos tais como: análise de sistemas e construção de modelos matemáticos para a solução de problemas.

É objeto de trabalho do profissional da Pesquisa Operacional:

- ter compreensão completa sobre o sistema cliente;
- propor a construção de modelos corretos para representar o sistema cliente;
- utilizar métodos adequados para solução do modelo;
- se ocupar da manutenção do modelo proposto, de forma que sua utilização continue a dar respostas satisfatórias à situação analisada, que é real e desta forma dinâmica.

Assim sendo, é importante para a formação do profissional em Pesquisa Operacional conhecimento sobre como elaborar diagnóstico sobre uma situação-problema, de forma a determinar quais pontos relevantes que devem ser controlados e outros que não podem ou não estarão sob controle na construção do modelo de representação desta situação. Para isso é importante o conhecimento sobre análise e inferência sobre dados. Esta matéria pode ser chamada de ANÁLISE DE SISTEMAS que trata com fluxos de informações, fluxo de materiais e instruções normativas, além de técnicas de análise estatística. Resulta na descrição da situação, proporcionando informações básicas necessárias à formulação do problema e do modelo, necessárias à sua solução.

O desenvolvimento do modelo, geralmente levanta outras dúvidas a respeito dos objetivos do cliente, das linhas de ação alternativas para encaminhamento à solução e das variáveis não controladas pelo cliente. Desta forma a análise do problema e a construção do modelo, freqüentemente atuam uma sobre a outra, produzindo um conhecimento mais completo do sistema e do problema a ser resolvido.

A P.O., faz uso de modelos simbólicos para representar as variáveis do problema e as relações entre as mesmas. É uma abstração da situação analisada, tomando a forma de relações matemáticas que refletem a estrutura daquilo que representam. Porém, todo modelo é uma simplificação da realidade, e sendo assim, ao ser usado para definir uma solução, esta deve ser testada para análise da eficiência do modelo. O resultado desta análise serve de retro alimentação para adequação do modelo a uma representação mais correta da situação. O modelo, ao ser implementado, deve contar com a aceitação e confiança do cliente e para isso é importante que o formulador do problema consiga captar as expectativas do cliente e satisfaça-as na utilização do modelo para determinar a solução esperada. A Pesquisa Operacional consegue melhores resultados, quando existe participação e colaboração ativa entre os gerentes funcionais do sistema cliente e do grupo de P.O.

APLICAÇÕES

As aplicações da Pesquisa Operacional ocorrem nas empresas e em agências governamentais e são bastante diversas nas áreas funcionais de tomada de decisão.

Dependendo da empresa, as aplicações relacionam-se com a extração de recursos naturais, fabricação, transporte e armazenamento, tamanho e localização da fábrica, gerenciamento de estoques, programação de atividades, designação de equipamentos, previsões, marketing, propaganda, gerenciamento de caixa e recursos financeiros, planejamento empresarial, tanto a longo como a curto prazo.

Existe um número de problemas típicos que ocorrem com grande freqüência e, por esta razão, desenvolveram-se métodos para obtenção de solução a partir dos modelos estabelecidos. Tais problemas típicos são:

1. Alocação de Recursos
2. Dimensionamento de Estoques
3. Manutenção
4. Filas de Espera
5. Seqüenciação e Coordenação de Operações
6. Determinação de Rotas
7. Situações de Competição
8. Busca de Informações

A maioria dos problemas de gerenciamento de operações, objeto da Engenharia de Produção, não poderá enquadrar-se em um único tipo de modelo. Os problemas são bastante interligados, posto que a empresa é um todo. A forma de decompô-la em partes é um artifício para tornar possível a obtenção de resultados que poderão, então, ser usados como dados na solução de outra parte e assim por diante. Ao lidar com múltiplos modelos, obtém-se soluções geralmente em seqüência e repetindo-se o ciclo, um resultado globalmente satisfatório pode ser obtido.

A aplicação de P.O. mais difundida é no PROBLEMA DE ESTOQUE que se ocupa da guarda e/ou armazenagem de recursos materiais. As decisões requeridas envolvem a determinação da quantidade de recursos que se deve adquirir (produzir ou comprar) e de quando fazê-lo. Resolvido o problema de estoque para vários itens, pode resultar na necessidade de se designar instalações industriais para atender a esta quantia na data estabelecida. Então estaremos a frente de um PROBLEMA DE ALOCAÇÃO DE RECURSOS que supõe que os equipamentos estejam disponíveis ininterruptamente. Ocorre, desta forma, a necessidade de planejar a manutenção dos equipamentos e instalações e programar a reposição de peças desgastadas. Além disso, devem-se ter à disposição, operários e o material necessário nas datas esperadas. Se isso não ocorrer, há que se considerar atrasos, que podem acarretar problemas de fila de espera.

Os modelos de COORDENAÇÃO priorizam os serviços que estão a espera para serem atendidos, segundo uma ordem definida pela solução do problema de SEQÜENCIAÇÃO. Este determina a seqüência segundo a qual as tarefas serão executadas, para que o objetivo expresso em termos de tempo total ou tempo de execução seja atingido. Além disso há os MODELOS DE FILAS que se ocupam da definição de número de postos de serviço para atender a uma demanda, traçada por análise de projeção de dados históricos.

Estas considerações estão sendo colocadas sem se preocupar com agentes externos à organização, tais como fornecedores de matéria prima, que também afetam o desempenho do sistema. Quando considerado, estaremos a frente de uma situação de competição: comprar a um preço mais baixo. Isto remete ao uso da TEORIA DOS JOGOS.

A extensão dos problemas de P.O. na Engenharia de Produção e o alcance das soluções obtidas, remete a classificar os problemas entre: táticos e estratégicos. Problemas táticos são aqueles com curto período para resolução e que se ocupam de atividades operacionais mais rotineiras. Problemas estratégicos são aqueles de decisão com conseqüências mais a longo prazo, envolvendo riscos e investimentos maiores.

O envolvimento do grupo de P.O. na empresa, se dá num crescendo, partindo no início para solução de problemas táticos para posteriormente apoiar decisões nos problemas estratégicos.

A esta classificação, e conseqüente envolvimento do grupo de P.O. para apoio a decisões, está associado o risco existente ao usar-se um modelo para obter a solução. A construção do modelo, envolve custo e é em si investimento. O modelo parte de uma análise descritiva do sistema e prevê a situação resolvida. Fundamenta-se, desta forma, em previsões para o ambiente estudado. Um problema projetado para um futuro mais a longo prazo, está pautado em hipóteses sobre uma incerteza maior, que aqueles que trabalham com horizontes mais curtos e atividades mais rotineiras, portanto repetitivas, e por esta razão mais "previsíveis" e fáceis de controlar, através de modelos.

O ENGENHEIRO DE PRODUÇÃO E A P.O.

Os métodos de P.O. podem classificar-se segundo a *natureza dos dados* envolvidos no problema se determinísticos ou probabilísticos, se inteiros ou contínuos e o *ambiente para tomada de decisão* com linhas de ação definidas, conforme maior ou menor determinação segundo a certeza com que se darão.

Assim sendo, quanto consideramos um ambiente estático no tempo e as variáveis contínuas, que possa ser representado por equações lineares teremos os MODELOS LINEARES. Dentre estes modelos temos os problemas de alocação de recursos (composição de mix de produtos atendendo a determinadas restrições de recursos, composição de ração alimentar para atender a requisitos nutritivos, planejamento de níveis de produção mensal ou trimestral para atender a demandas estabelecidas e a determinada capacidade de armazenagem). Estes problemas que apresentam estruturas similares na sua formulação e são resolvidos pelo Método Simplex, algoritmo básico de Programação Linear, são tratados na disciplina de Pesquisa Operacional I, quando ainda são discutidas metodologias para o trabalho em Pesquisa Operacional.

Além destes pontos a referida disciplina apresenta MODELOS DE REDES com os problemas de distribuição que definem quantidade transportada de bens a rotas desde origens, pontos de fornecimento, a destinos, pontos de demanda, de forma a minimizar o custo de transporte, podendo, ou não, serem considerados entrepostos; e, também, o problema de atribuição de tarefas a operadores de forma a maximizar o desempenho do sistema (Problema de Designação). Estes problemas são particularizados devido a apresentarem uma estrutura análoga na sua formulação e embora sejam também problemas de programação linear, têm técnicas específicas para resolução e resultam em soluções com valores inteiros.

Além destes, os modelos de redes para os problemas de definição de Rota Mínima e Rota com Fluxo Máximo fazem parte da ementa da disciplina P.O. I, e são integrantes da Análise de Fluxo em Redes.

Outro problema de modelo em Rede é a determinação do caminho crítico, usado para Programação de Projetos. Este assunto é parte do programa da disciplina Pesquisa Operacional II, oferecida no 9º período, tendo como pré-requisito a disciplina P.O. I. Ainda faz parte desta disciplina Dimensionamento de Estoques, Teoria das Filas e Simulação.

Esta disciplina apresenta a natureza e categorização dos problemas de estoques, tipos e custos envolvidos, sistemas típicos e critérios de dimensionamento.

Os MODELOS DE FILAS se ocupam em resolver o problema da determinação do número de postos de serviço para atendimento, de forma a minimizar uma medida de performance do sistema, tal como o tempo de espera. Têm aplicações em postos de gasolina, atendimento hospitalar, bancário, manutenção, etc., para resolução de problemas de congestão.

Estes modelos fazem parte do programa de P.O. II, assim como SIMULAÇÃO. Estes últimos são usados numa situação onde não se aplica apropriadamente qualquer outro modelo, e a tomada de decisão é feita sobre a seleção da melhor solução entre várias alternativas simuladas.

Além das disciplinas obrigatórias, a disciplina optativa P.O. III apresenta métodos para definir estratégias que embasem uma série de decisões em seqüência para resolução de problemas. Se trata da programação dinâmica que pode cuidar de variáveis probabilísticas, quando então, temos os processos estocásticos. Os processos estocásticos embasam tomada de decisão em cada estágio, considerando as possibilidades de ocorrência definidas pela situação definida pelo estágio anteriormente analisado.

Esta disciplina optativa apresenta também métodos de abordagem para solução de problemas em ambiente de competição - a teoria dos jogos.

Além destes modelos e métodos oferecidos no curso de Engenharia de Produção da EESC, pelas disciplinas de Pesquisa Operacional, também existem a PROGRAMAÇÃO INTEIRA, cujas soluções são requeridas a terem valor inteiro, PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR que trata com funções não lineares e PROGRAMAÇÃO HEURÍSTICA que trata da construção de uma solução, através do conhecimento do problema. Todos os modelos, a menos de Simulação e Programação Heurística, são modelos de otimização, qual seja, segundo a formulação do problema e sua resolução, sendo viável, apontam a solução ótima.

Algumas vezes para viabilizar a busca de solução, há que se propor alguma relaxação e posterior análise da situação para reafirmar o problema. Outras vezes, para acelerar o processo de resolução usa-se uma heurística.

Qualquer solução indicada, merece uma reflexão frente ao contexto do problema, ou seja, uma análise de pós-otimização.

Para o engenheiro de produção é importante o conhecimento dos modelos e métodos da pesquisa operacional, de forma que tenha habilidade em buscá-los adequadamente, conforme a natureza e ambiente de inserção do problema que se queira resolver. Alguns modelos tem a disposição aplicativos dedicados a métodos específicos, restando então ao engenheiro, a análise do ambiente para formulação do problema e análise de pós-otimização sobre a solução obtida, para uma adequada implementação das ferramentas oferecidas pela Pesquisa Operacional.

CAPÍTULO 1

PROGRAMAÇÃO LINEAR

Apresentaremos um exemplo de aplicação da Programação Linear, definições e um breve histórico a seu respeito.

1.1. Problema da Dieta

POLLY se assombra com seu gasto em alimentação para conseguir toda energia (2000 calorias), proteínas (55 g) e cálcio (800 mg) que necessita diariamente. Ela escolhe seis alimentos mais baratos como fontes de seus nutrientes que são mostrados na tabela 1.1.

TABELA 1.1 - Dados para cada porção de alimento.

ALIMENTO	TAMANHO	ENERGIA (kcal)	PROTEÍNA (g)	CÁLCIO (mg)	PREÇO (cent)
Farinha de Aveia	28 g	110	4	2	3
Galinha	100 g	205	32	12	24
Ovo	2	160	13	54	13
Leite	237 ml	160	8	285	9
Torta de Cereja	170 g	420	4	22	20
Feijão	260 g	260	14	80	19

Polly começa a pensar sobre seu menu. Por exemplo, 10 porções de feijão lhe garante todos os seus nutrientes por apenas $1,90 por dia. Por outro lado, seu estômago suporta apenas duas porções de feijão por dia. Ela decide, então, impor limitações às quantias de porções de cada alimento por dia, de acordo com seu bem estar, como descrito abaixo:

Farinha de Aveia	-	no máximo 4 porções por dia
Galinha	-	no máximo 3 porções por dia
Ovos	-	no máximo 2 porções por dia
Leite	-	no máximo 8 porções por dia
Torta de Cereja	-	no máximo 2 porções por dia
Feijão	-	no máximo 2 porções por dia

Outra análise nos dados mostra a Polly que 8 porções de leite e 2 porções de torta de cereja por dia irá satisfazer os requisitos de nutrientes ao custo de apenas $1,12. Outras tentativas sugerem cortar um pouco da torta de cereja ou de leite ou talvez tentar uma diferente combinação. Mas tantas combinações podem ser tentadas até conseguir a melhor... Tentativas e erros podem ser feitos e o processo é cansativo.

Para ser sistemático e auxiliar a decisão de Polly podemos especular sobre quantias não especificadas do menu que deverá ser composto por x_1 porções de farinha de aveia, x_2 porções de galinha, x_3 porções de ovos e assim com os demais. Para conseguir os limites impostos pelo paladar, o menu deve satisfazer:

$$\begin{array}{l} 0 \le x_1 \le 4 \\ 0 \le x_2 \le 3 \\ 0 \le x_3 \le 2 \\ 0 \le x_4 \le 8 \\ 0 \le x_5 \le 2 \\ 0 \le x_6 \le 2 \end{array} \qquad (1.1)$$

E, naturalmente, existem os requisitos de energia, proteina e cálcio; expressos pelas inequações:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} 110\,x_1 &+& 250\,x_2 &+& 160\,x_3 &+& 160\,x_4 &+& 420\,x_5 &+& 260\,x_6 &\ge& 2000 \\ 4\,x_1 &+& 32\,x_2 &+& 13\,x_3 &+& 8\,x_4 &+& 4\,x_5 &+& 14\,x_6 &\ge& 55 \\ 2\,x_1 &+& 12\,x_2 &+& 54\,x_3 &+& 285\,x_4 &+& 22\,x_5 &+& 80\,x_6 &\ge& 800 \end{array} \qquad (1.2)$$

Se valores x_1, x_2, x_3, ..., x_6 satisfazem as inequações (1.1) e (1.2), então eles descrevem um menu satisfatório; tal menu custará por dia:

$$3\,x_1 + 24\,x_2 + 13\,x_3 + 9\,x_4 + 20\,x_5 + 19\,x_6 \qquad (1.3)$$

Para conseguir o menu mais barato, Polly deve encontrar valores para x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 e x_6 que satisfaçam as inequações (1.1), (1.2) e (1.3), encontrando o valor mínimo para a última. De forma matemática este fato pode ser expresso da seguinte maneira:

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & 3\,x_1 + 24\,x_2 + 13\,x_3 + 9\,x_4 + 20\,x_5 + 19\,x_6 \\
\text{sujeito a} & \\
& 0 \le x_1 \le 4 \\
& 0 \le x_2 \le 3 \\
& 0 \le x_3 \le 2 \\
& 0 \le x_4 \le 8 \\
& 0 \le x_5 \le 2 \\
& 0 \le x_6 \le 2 \qquad (1.4)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
110\,x_1 + 250\,x_2 + 160\,x_3 + 160\,x_4 + 420\,x_5 + 260\,x_6 \ge 2000 \\
4\,x_1 + 32\,x_2 + 13\,x_3 + 8\,x_4 + 4\,x_5 + 14\,x_6 \ge 55 \\
2\,x_1 + 12\,x_2 + 54\,x_3 + 285\,x_4 + 22\,x_5 + 80\,x_6 \ge 800
\end{array}
$$

Este problema é conhecido como *problema da dieta.*

1.2. Programação Linear

Problemas deste tipo são chamados "problemas de programação linear" ou "problemas de PL"; programação linear é um ramo da matemática aplicada. Outros exemplos:

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & 5\,x_1 + 4\,x_2 + 3\,x_3 \\
\text{sujeito a} & 2\,x_1 + 3\,x_2 + x_3 \le 5 \\
& 4\,x_1 + 3\,x_2 + 2\,x_3 \le 11 \\
& 3\,x_1 + 4\,x_2 + 2\,x_3 \le 8 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0 \qquad (1.5)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & 3x_1 - x_2 \\
\text{sujeito a} & -x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 \geq -3 \\
& 7x_2 + 2x_4 = 5 \\
& x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
& x_3 + x_4 \leq 2 \\
& x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
\tag{1.6}
$$

Em geral, se c_1, c_2, c_3, ..., c_n são números reais, então a função $\underline{f}$ de variáveis reais x_1, x_2, x_3, ..., x_n definida por:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_3) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

é chamada *função linear*. Se f é uma função linear e se b é um número real, então a equação

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b$$

é chamada de *equação linear* e as desigualdades

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b$$
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq b$$

são chamadas de *inequações lineares*. Equações e inequações lineares representam as *restrições lineares*. Finalmente um *problema de programação linear* é um problema de maximização (ou minimização) de uma função linear, sujeito a um número finito de restrições lineares. Serão usados diferentes subscritos $\underline{i}$ para representar diferentes restrições e diferentes subscritos $\underline{j}$ para denotar as diferentes variáveis. Inicialmente restringiremos nossos estudos para problemas de PL na seguinte forma:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximizar} & \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \\
\text{s. a} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \quad (i = 1, \ldots, m) \\
& x_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n)
\end{array}
\tag{1.7}
$$

Estes problemas referem-se aos problemas de PL na *forma padrão*. Por exemplo, (1.5) está na forma padrão (com $n = 3$, $m = 3$, $a_{11} = 2$, $a_{12} = 3$, e assim por diante). O que distingue os problemas na forma padrão dos outros? Primeiro, todas as restrições estão na forma de *inequações* lineares ($\leq$). Segundo, as últimas n das m + n restrições de (1.7) são especiais: elas simplesmente afirmam que nenhuma das n variáveis pode assumir valores negativos. Tais restrições são chamados de *restrições de não-negatividade*. (Note que o problema (1.6) difere da forma padrão em ambos os fatos: duas das suas restrições são equações lineares e as variáveis x_1 e x_4 podem assumir valores negativos). Outra condição necessária é que $b \geq 0$.

A função linear que deve ser maximizada ou minimizada em um problema de PL é chamada de *função objetivo* do problema. Por exemplo, a função z de variáveis x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 definida por

$$z = f(x_1, \ldots, x_6) = 3\,x_1 + 24\,x_2 + 13\,x_3 + 9\,x_4 + 19\,x_6$$

é a função objetivo para o problema de dieta da Polly (1.4). Números que satisfazem todas as restrições de um problema de PL constituem uma *solução viável* do problema, por exemplo, notamos que

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 8, \quad x_5 = 2, \quad x_6 = 0$$

é uma solução viável de (1.4). Finalmente, uma solução viável que maximiza a função objetivo (ou minimiza, dependendo da forma do problema) é chamada de *solução ótima*; o valor correspondente da função objetivo é chamado de *valor ótimo* do problema. Retornando ao problema da dieta, sua única solução ótima é:

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 4.5, \quad x_5 = 2, \quad x_6 = 0$$

ou simplesmente (4, 0, 0, 4.5, 2, 0). Correspondendo à solução ótima o valor ótimo de z é \$0,925. Nem todo problema de PL tem uma única solução; alguns problemas tem muitas diferentes soluções e outros podem não ter solução. O último caso pode ocorrer por duas razões radicalmente diferentes: ou nenhuma solução viável existe, ou existem muitas soluções viáveis. O primeiro caso pode ser ilustrado pelo exemplo abaixo:

PROBLEMA (1.8)

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & 3x_1 - x_2 \\ \text{s. a} & -2x_1 - 2x_2 \leq -10 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

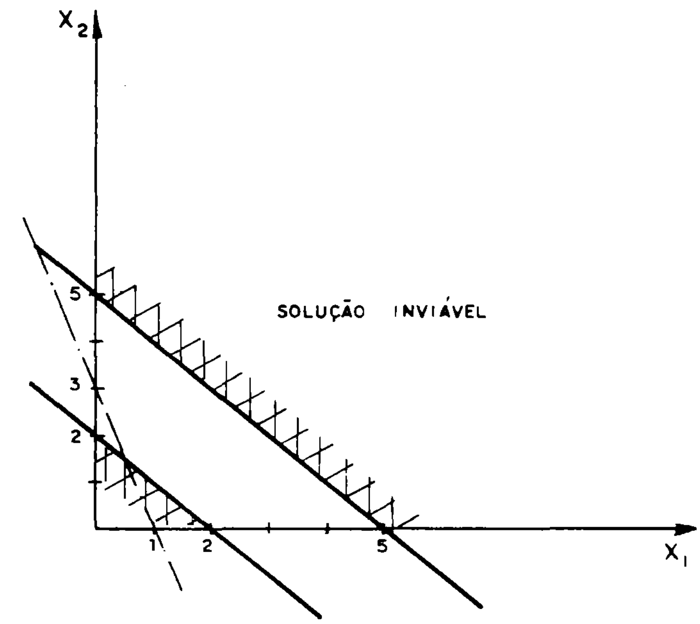

Figura 1.1 - Representação geométrica do problema 1.8.

que não apresenta nenhuma solução viável. Tais problemas são chamados de *inviáveis*. Por outro lado, embora o problema

PROBLEMA (1.9)

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & 3x_1 - x_2 \\ \text{s. a} & -2x_1 - x_2 \leq -1 \\ & -x_1 - 2x_2 \leq -2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

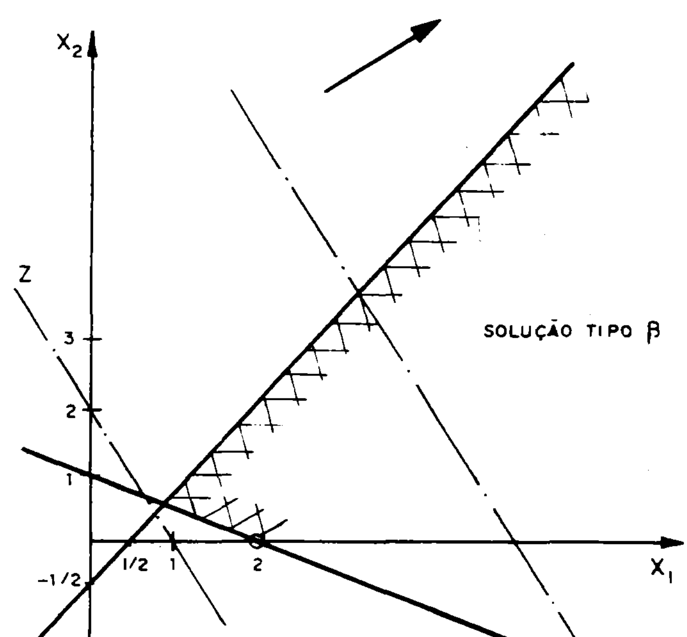

Figura 1.2 - Representação geométrica do problema 1.9.

tenha soluções viáveis, nenhuma delas é ótima: para qualquer número M existe uma solução viável x_1, x_2 tal que $3\ x_1 - x_2 > M$. Neste sentido, (1.9) tem uma abundância de soluções viáveis e nenhuma delas pode aspirar ser a melhor. Problemas deste tipo são chamados de *ilimitados*. Qualquer problema de PL pertence a uma destas três categorias: tem solução ótima, é inviável ou é ilimitado. Se o modelo leva à uma solução inviável ou ilimitada, deve-se voltar a formulação do problema.

1.3. Questões para uso de Modelos de Programação Linear

As suposições da programação linear estão implícitas na formulação do modelo-exemplo. Ressaltaremos as hipóteses usadas para que se possa avaliar quando é adequada a aplicação destes modelos.

PROPORCIONALIDADE

Esta hipótese implica que a cada unidade acrescida numa variável x_k significa um aumento proporcional ao seu custo na medida de eficácia z, ou seja, se x_k recebe o valor de $\underline{s}$ na solução, o valor da medida de eficácia é $\underline{s}c_k$. Assim é também com seu coeficiente tecnológico a_{ik}: o aumento de uma unidade no valor da variávei x_k implica no uso de mais a_{ik} unidades do recurso k.

A questão real de que há sempre custo adicional incorporado à decisão de uma nova atividade, quebrando assim a suposição de proporcionalidade, pode ser desprezada no modelo. Se este custo não é desprezível faz-se de forma a que seja incorporado a c_k. Outra questão é a de que a eficiência aumenta, conforme o nível de produção (x_k) alcance taxas elevadas, aumentando, assim, o lucro marginal e diminuindo o uso da capacidade de produção por aumento unitário na taxa de produção (economia de escala).

ADITIVIDADE

A proporcionalidade é uma suposição sobre atividades individuais, consideradas independentemente uma das outras. Ela, sozinha, não é suficiente para garantir que a função objetivo e as funções de restrição sejam lineares. O cruzamento entre atividades ocorre, interferindo assim na produtividade, se houver interação entre algumas delas de forma a mudar a medida de eficácia ou o uso total de algum recurso. A hipótese de aditividade implica na não consideração de interdependência entre quaisquer das atividades. Ou seja, a suposição de aditividade requer que, dados quaisquer níveis de atividade (x_1, x_2, ..., x_n), o uso total de cada recurso e a medida total de eficácia resultante são iguais à *soma* das quantidades correspondentes a cada uma das atividades.

No caso de duas atividades competitivas, quando a lucratividade é reduzida com a ocorrência de ambas ou a produtividade no uso de um recurso para uma delas é dependente da alocação do mesmo a outra atividade, a aditividade não ocorre. Esta situação adequa-se ao uso de modelos não lineares.

DIVISIBILIDADE

Esta hipótese implica que a solução do problema pode ser um número não inteiro. Quando for necessária uma solução inteira pode ser usado PL, com posterior arrendondamento da solução a inteiros adjacentes, acompanhado de análise da situação. Quando este procedimento não for satisfatório, faz-se uso da programação inteira.

CERTEZA SOBRE O VALOR DOS PARÂMETROS a_{ij}, b_i e c_{ij}

Os modelos de PL são normalmente formulados supondo-se um curso de ação futura, no qual os parâmetros são baseados em previsões, sujeitos a algum grau de incerteza. Por essa razão é necessária uma *análise de sensibilidade* dentro das condições reais em que a solução será adotada. Um procedimento conveniente é identificar os parâmetros mais sensíveis (ou seja, aqueles que influem sobremaneira na solução do problema) para estimar os outros. Aí então buscar a solução que permaneça boa, para os valores prováveis dos parâmetros sensíveis, através da análise paramétrica.

No caso do grau de incerteza ser muito grande é conveniente tratá-los como variáveis aleatórias.

Apesar destas hipóteses restritivas subjacentes aos modelos de programação linear, eles são muito úteis em problemas de otimização, devido a simplicidade na sua resolução. Os problemas de programação linear podem ser tipicamente interpretados como problemas de alocação de recursos limitados a atividades competindo pelo uso dos mesmos.

1.4. Breve Histórico

Como disciplina matemática a P.L. é muito jovem. Inicia em 1947 quando G.B. Dantzig desenvolveu o "Método Simplex" para solucionar problemas da Força Aérea Americana formulados por programação linear. O que seguiu a isto, foi um período excitante de rápido desenvolvimento neste campo. Bem cedo tornou-se claro que uma surpreendente amplitude de problemas, aparentemente não relacionados com gerência da produção, poderiam ser expressos em termos de P.L. e mais importante, solucionados pelo método simplex. Tais problemas vinham sendo tratados por uma abordagem orientada apenas pela experiência e intuição. O uso de P.L. frequentemente traz um considerável aumento na eficiência de toda operação.(Até então a expansão da eficiência era devido a inovação tecnológica. Este novo modo de aumentar a eficiência - *sob condições tecnológicas existentes* - pela melhoria na organização e no planejamento - fez muitos administradores apreciarem a importância prática da matemática. No mínimo, os fez cientes da vantagem em expressar seus problemas de decisão em termos curtos, claros e bem definidos). Com o aumento da popularidade da P.L., aplicações em novas áreas ocorreram, muitas delas muito óbvias. De outra parte, certas aplicações estimularam futuras pesquisas teóricas, devido a necessidade de solucionar problemas que por outro método eram tidos como desestimuladores. Neste fascinante jogo entre teoria e prática, é que este novo ramo da matemática é estabelecido.

Como o cálculo desenvolvido no século XVII motivado pela mecânica, o desenvolvimento da P.L. no século XX deu-se para solucionar problemas de administração. Outras profundas influências estimulam a evolução do novo campo em seu início. A economia foi uma delas: nos primórdios de 1947, T.C. Koopmans salienta que a P.L. oferece uma excelente estrutura para análise das teorias da economia clássica, tal como o célebre sistema proposto em 1847 por L. Walras. De outro lado, a P.L. traz de volta teoremas da matemática pura, previamente conhecidos, referentes a diversos tópicos como a geometria de conjuntos convexos, problemas de natureza combinatorial e a teoria dos jogos. Finalmente, foi feliz, e talvez mesmo inevitável que a P.L. desenvolve-se conjuntamente com a moderna tecnologia dos computadores, sem o qual a P.L. aplicada a problemas de grande porte seria impensável.

Campos científicos raramente nascem da noite para o dia. Com a vantagem da percepção tardia, pode-se traçar fontes fundamentais para um decisivo "abrir caminhos" a este desenvolvimento. O campo da P.L. não é excessão. O núcleo da sua teoria matemática é o estudo de sistemas de inequações lineares; tais sistemas foram investigados por Fourier em 1826. Desde então, certamente poucos matemáticos consideraram a questão, embora nenhum deles tivesse projetado um algorítimo cuja eficiência chegasse próxima à do método simplex. Contudo, alguns deles provaram vários casos especiais do Teorema Fundamental, agora chamado de *Teorema da Dualidade* da P.L.. Do lado da aplicação, L.V. Kantarovich apontou o significado prático de uma classe restrita de problemas de P.L., e propôs um algoritmo rudimentar para sua solução em 1939.

Pesarosamente, seu esforço permaneceu desprezado e desconhecido, até muito depois da P.L. tornar-se uma elegante teoria, devido ao trabalho independente de Dantzig e outros.

1.5. Problemas

1.1) Uma indústria tirou da linha de produção um certo produto obsoleto e não lucrativo. Isto implicou num considerável excedente na sua capacidade de produção. A gerência está considerando a alocação desta capacidade produtiva a um ou mais dentre três novos produtos (1, 2 ou 3). A capacidade disponível, que pode limitar a produção, está resumidade na tabela abaixo:

Tipo de Máquina	Tempo Disponível (em horas máquinas por semana)
Fresa	500
Torno Mecânico	350
Retífica	150

O número de horas/máquina requerido por unidade de cada produto 1, 2 e 3.

	Coeficiente de Produtividade (em horas máquina por unidade)		
Produtos	1	2	3
Tipo de Máquina			
Fresa	9	3	5
Torno Mecânico	5	4	0
Retífica	3	0	2

O Departamento de Vendas informa que o potencial de vendas dos produtos 1 e 2 excede a taxa de produção máxima e que o potencial

de vendas para o produto 3 é de 20 por semana.
O lucro unitário por produto é de \$30, \$12 e \$15, respectivamente para os produtos 1, 2 e 3.

Formule o problema de forma a que a gerência possa decidir pela produção semanal de maior lucro.

1.2) Um criador de porcos quer determinar a ração de menor custo que atenda aos requisitos nutritivos para sua criação.
A quantia de cada tipo de ingrediente nutritivo contido em cada tipo de alimento que compõe a ração, assim como o custo de cada alimento são dados na tabela abaixo:

Tipo de Alimento / Ingrediente Nutritivo	Quilo de Milho	Quilo de Sorgo	Quilo de Alfafa	Requisito Mínimo Diário
Carboidratos	90	20	40	200
Proteínas	30	80	60	180
Vitaminas	10	20	60	150
Custo (\$)	21	18	15	

Formule o modelo de programação linear para este problema. Ela está na forma canônica?

1.3) Quais os problemas abaixo estão na forma padrão?

a) maximizar $3\,x_1 - 5\,x_2$

s. a
$$\begin{aligned} 4\,x_1 + 5\,x_2 &\geq 3 \\ 6\,x_1 - 6\,x_2 &= 7 \\ x_1 + 8\,x_2 &\leq 20 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

b) minimizar $3x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + 5x_5$

s. a

$$
\begin{aligned}
9x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 3x_5 &\le 5 \\
8x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 3x_5 &\le 2 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0
\end{aligned}
$$

c) maximizar $8x_1 - 4x_2$

s. a

$$
\begin{aligned}
3x_1 + x_2 &\le 7 \\
9x_1 + 5x_2 &\le -2 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

1.4) Represente os problemas a e c, da questão 1.3, graficamente.

CAPÍTULO 2

ALGORITMO SIMPLEX - LÓGICA

Mostraremos a solução de um problema de P.L., para apresentar a mecânica de funcionamento do algoritmo simplex.

2.1. PRIMEIRO EXEMPLO

Ilustraremos o método simplex no seguinte exemplo na *forma padrão:*

$$
\begin{array}{ll}
\text{MAXIMIZAR} & 5\,x_1 + 4\,x_2 + 3\,x_3 \\
\text{s. a.} & 2\,x_1 + 3\,x_2 + x_3 \le 5 \\
 & 4\,x_1 + x_2 + 2\,x_3 \le 11 \\
 & 3\,x_1 + 4\,x_2 + 2\,x_3 \le 8 \\
 & x_1,\ x_2,\ x_3 \le 0
\end{array}
\qquad (2.1)
$$

É muito mais conveniente lidar com equações do que com relações de desigualdade. Por isso um passo preliminar do método é converter as restrições de desigualdade em restrições equivalentes de igualdade, colocando-o na *forma canônica*. Isto é feito pela introdução das chamadas *variáveis de folga*.

Considerando a primeira das restrições em (2.1)

$$2\,x_1 + 3\,x_2 + x_3 \le 5 \qquad (2.2)$$

Para qualquer solução viável x_1, x_2, x_3, o valor do lado esquerdo de (2.2) é no máximo o valor do lado direito: frequentemente haverá uma folga entre os dois valores. Iremos denotar a folga desta restrição como x_4. Ou seja definimos $x_4 = 5 - 2\,x_1 - 3\,x_2 - x_3$; com esta notação a equação (2.2) pode agora ser escrita simplesmente como $x_4 \ge 0$. De modo análogo as duas próximas restrições definem as variáveis x_5 e x_6. Definimos, ainda, a função objetivo $5\ x_1 + 4\ x_2 + 3\ x_3$ por z. Resumindo, para quaisquer valores de x_1, x_2, x_3 iremos definir valores x_4, x_5, x_6 e z por meio das fórmulas

$$\begin{aligned} x_4 &= 5 - 2\ x_1 - 3\ x_2 - x_3 \\ x_5 &= 11 - 4\ x_1 - x_2 - 2\ x_3 \\ x_6 &= 8 - 3\ x_1 - 4\ x_2 - 2\ x_3 \\ z &= 5\ x_1 + 4\ x_2 + 3\ x_3 \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Com esta notação nosso problema pode ser reescrito como

MAX Z SUJEITO A $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$ (2.4)

As novas variáveis x_4, x_5, x_6 definidas por (2.3) são chamadas *variáveis de folga;* as variáveis originais são normalmente chamadas por *variáveis de decisão*. É importante notar que as equações em (2.3) explicam claramente a equivalência entre (2.1) e (2.4). Mais precisamente:

- Qualquer solução viável x_1, x_2, x_3 de (2.1) pode ser extendida de um único modo determinado por (2.3), numa solução viável $x_1, \ldots, x_6$ de (2.4);
- Qualquer solução viável $x_1, x_2, \ldots, x_6$ de (2.4) pode ser restringida, simplesmente deletando as variáveis de folga, em uma solução viável x_1, x_2, x_3 de (2.1).
- Esta correspondência entre soluções viáveis de (2.1) e soluções viáveis de (2.4) levam soluções ótimas de (2.1) em soluções ótimas de (2.4), e vice-versa.

A estratégia do método simplex é a de melhoramentos sucessivos; tendo achado alguma solução viável $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_6$ de (2.4), iremos tentar passar a outra solução viável $X_1, X_2, \ldots, X_6$ que é melhor desde que:

$$5\ X_1 + 4\ X_2 + 3\ X_3 > 5\ x_1 + 4\ x_2 + 3\ x_3$$

Repetindo este processo um número finito de vezes, devemos eventualmente chegar a uma solução ótima.

Para começar, precisamos de alguma solução viável inicial $x_1, x_2, \ldots, x_6$. Achar uma em nosso exemplo não é difícil: basta dar valor zero às variáveis de decisão x_1, x_2, x_3 e calcular o valor das variáveis de folga em (2.3). Então nossa solução inicial.

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 5, \quad x_5 = 11, \quad x_6 = 8 \qquad (2.5)$$

gera o valor zero para z.

Segundo a estratégia esboçada acima, deveremos buscar uma outra solução viável que gera um valor maior para z. Achar tal solução também não é difícil. Para o nosso exemplo, considerando $x_2 = x_3 = 0$ e aumentando o valor de x_1, obtemos $z = 5\,x_1$, $z > 0$. Assim, se fazemos $x_1 = 1$, obtemos $z = 5$ (e $x_4 = 3$, $x_5 = 7$, $x_6 = 5$). Melhor será se $x_1 = 2$, quando $z = 10$ (e $x_4 = 1$, $x_5 = 3$, $x_6 = 2$). Porém, se fizermos $x_3 = 3$, nós temos $z = 15$ e $x_4 = x_5 = x_6 = -1$; isto já não pode ocorrer, desde que a *viabilidade* requer as restrições de não-negatividade para todas as variáveis. A questão que se coloca neste ponto, então é: *quanto podemos aumentar x_1 (mantendo $x_2 = x_3 = 0$ ao mesmo tempo) e manter a viabilidade (x_4, x_5, $x_6 \geq 0$)?*

Respondendo a esta questão:

A condição $x_4 \geq 0$, imposta por (2.4), implica (através de (2.3)) que $5 - 2\,x_1 - 3\,x_2 - x_3 \geq 0$, fazendo com que $x_1 \leq 5/2$; de modo análogo, $x_5 \geq 0$ implica em $x_1 \leq 11/4$ e $x_6 \geq 0$, implica em $x_1 \leq 8/3$. Destes três limites, o primeiro é o mais restritivo. Aumentando, então x_1 até aquele limite, obtemos nossa próxima solução viável:

$$x_1 = 5/2, \; x_2 = 0, \; x_3 = 0, \; x_4 = 0, \; x_5 = 1, \; x_6 = 1/2 \qquad (2.6)$$

Note que esta solução gera $z = 25/2$, que é melhor que $z = 0$.

Queremos agora uma solução viável que seja melhor que (2.6). Porém, esta tarefa, nas condições dadas, é mais difícil que na primeira iteração. *O que fez a primeira iteração ser fácil?* Tínhamos a disposição não só a solução viável (2.5), como também o sistema de equações lineares (2.3) orientando a tarefa de achar uma solução melhor. Se queremos fazer do mesmo modo, temos que "fabricar" um novo sistema de equações lineares, relacionado a (2.6), do mesmo modo como (2.3) era com (2.5). Devemos, então, gerar um sistema que nos forneça as condições necessárias para escolha da alternativa de melhoria no valor de z.

Quais propriedades deve ter este sistema? Note que (2.3) expressa as variáveis que assumem valores positivos em (2.5), em termos das que assumem valor zero em (2.5). Similarmente, o novo sistema deverá expressar aquelas variáveis que assumem valores positivos em (2.6), em termos daquelas que assumem valor zero em (2.6): resumindo, devemos expressar x_1, x_5, x_6 (bem como z) em termos de x_2, x_3 e x_4. Em particular a variável x_1, que teve seu valor mudado de zero para um número positivo, deverá ter sua posição mudada do lado direito para o lado esquerdo do sistema de equações. Assim a variável x_4, que teve seu valor positivo mudado para zero, deverá mover-se do lado esquerdo para o lado direito do sistema de equações.

Para construir tal sistema novo, começamos com a variável x_1. A fórmula desejada para x_1, em termos de x_2, x_3 e x_4, é obtida facilmente da primeira equação de (2.3):

$$x_1 = 5/2 - 3/2\ x_2 - 1/2\ x_3 - 1/2\ x_4 \qquad (2.7)$$

Agora para expressar x_5, x_6 e z em termos de x_2, x_3 e x_4, simplesmente substituímos (2.7) nas correspondentes linhas em (2.3):

$$\begin{aligned} x_5 &= 11 - 4\ (5/2 - 3/2\ x_2 - 1/2\ x_3 - 1/2\ x_4) - x_2 - 2\ x_3 \\ &= 1 + 5\ x_2 + 2\ x_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_6 &= 8 - 3\ (5/2 - 3/2\ x_2 - 1/2\ x_3 - 1/2\ x_4) - 4\ x_2 - 2\ x_3 \\ &= 1/2 + 1/2\ x_2 - 1/2\ x_3 + 3/2\ x_4 \end{aligned}$$

$$z = 5\ (5/2 - 3/2\ x_2 - 1/2\ x_3 - 1/2\ x_4) + 4\ x_2 + 3\ x_3$$

$$z = 25/2 - 7/2\ x_2 + 1/2\ x_3 - 5/2\ x_4$$

Então, temos o novo sistema que nos dá as condições desejadas para orientação à próxima iteração em busca da melhoria no valor de z:

$$\begin{aligned} x_1 &= 5/2 - 3/2\ x_2 - 1/2\ x_3 - 1/2\ x_4 \\ x_5 &= 1 + 5\ x_2 + 2\ x_4 \\ x_6 &= 1/2 + 1/2\ x_2 - 1/2\ x_3 + 3/2\ x_4 \\ z &= 25/2 - 7/2\ x_2 + 1/2\ x_3 - 5/2\ x_4 \end{aligned} \qquad (2.8)$$

Como fizemos na primeira iteração, iremos tentar aumentar o valor de z pelo acréscimo no valor de uma variável do lado direito do sistema (2.8), adequadamente escolhida. Note que o aumento no valor das variáveis x_2 e x_4, provoca um decréscimo no valor de z (o custo destas variáveis nesta iteração são negativos). Então, não temos escolha. A variável do lado direito a ter seu valor acrescido é x_3. Quanto podemos fazer x_3 crescer? A resposta pode vir diretamente de (2.8): como x_2 e x_4 continuam com valor nulo, a restrição $x_1 \geq 0$ implica em $x_3 \leq 5$, a restrição $x_6 \geq 0$ implica em $x_3 \leq 1$, $x_5 \geq 0$ não restringe o valor de x_3. Daí, $x_3 = 1$ é o melhor que podemos obter; nossa nova solução é

$$x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 0,\ x_5 = 1,\ x_6 = 0 \qquad (2.9)$$

(O valor de z aumenta de 12,5 para 13. Verifique.)

Como já vimos, conseguir um resultado melhor não é suficiente. Queremos também um sistema de equações lineares relacionado com (2.9) para análise da situação. Neste sistema as variáveis x_1, x_3, x_5 irão aparecer à esquerda do novo sistema, enquanto as variáveis com valor zero x_2, x_4, x_6 irão aparecer à direita. Para construir o sistema, começamos com o recém-chegado ao lado esquerdo, ou seja, com a variável x_3. Da terceira equação de (2.8) temos $x_3 = 1 + x_2 + 3\,x_4 - 2\,x_6$: substituindo x_3 nas equações restantes em (2.8), obtemos

$$\begin{aligned} x_3 &= 1 + x_2 + 3\,x_4 - 2\,x_6 \\ x_1 &= 2 - 2\,x_2 - 2\,x_4 + x_6 \\ x_5 &= 1 + 5\,x_2 + 2\,x_4 \\ z &= 13 - 3\,x_2 - x_4 - x_6 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Agora vamos para a terceira iteração. Primeiro de tudo, temos que escolher uma das variáveis do lado direito, cujo aumento provoque um acréscimo no valor da função objetivo. Entretanto, não existe tal variável. Se aumentarmos o valor de qualquer variável do lado direito de z em (2.10), fazemos o valor de z decrescer. Assim, temos que ter uma parada. De fato, a ocorrência desta parada, indica o que fizemos: solucionamos o problema; a solução descrita em (2.10) é ótima. Por que? A resposta é vista na última linha de (2.10):

$$z = 13 - 3\,x_2 - x_4 - x_6 \tag{2.11}$$

Explique porque.

A última solução (2.10) gerou $z = 13$; provar que esta solução é ótima, significa provar que qualquer outra solução viável satisfaz $z \le 13$. Desde que qualquer solução viável $x_1, \ldots, x_6$ satisfaça, entre outras relações, as desigualdades $x_2 \ge 0$, $x_4 \ge 0$ e $x_6 \ge 0$, a desigualdade desejada $z \le 13$, segue diretamente de (2.11).

2.2. Dicionários

Em geral, dado um problema na forma padrão

$$\text{Maximizar} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{2.12}$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

Introduzindo as variáveis de folga x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m} e denotando a função objetivo por z, definimos

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.13}$$

Esta forma de explicitar o problema é chamada *forma canônica*. A particularidade desta forma é que cada variável x_{n+1} ... x_{n+m} possuem coeficiente zero em todas as equações, exceto em uma, em que o coeficiente é um. São chamadas variáveis básicas. Assim, existe uma variável básica diferente por equação. As variáveis x_1, ..., x_n são consideradas *não básicas*, nesta iteração.

As variáveis básicas também são consideradas dependentes, pois podem ser escritas como função das não básicas, isto é,

$$x_{n+i} = b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n, \quad (i = 1, \ldots, m)$$

Assim temos que o valor das variáveis básicas fica determinado quando fixamos os valores das não básicas, e que todas as soluções viáveis do sistema são obtidas quando atribuimos todos os valores possíveis às variáveis não básicas.

O fato de considerarmos que as m últimas variáveis são básicas não afeta a generalidade, pois é sempre possível ordenar as colunas desta maneira. Por outro lado, pode não ser possível colocar um conjunto qualquer de m variáveis na base (isto é, colocar o sistema na forma canônica em relação a estas variáveis). Entretanto se o sistema não for redundante (isto é, se nenhuma equação for combinação linear das outras), existe pelo menos um conjunto de variáveis que pode ser colocado na base.

Na estrutura do método simplex, cada solução viável $x_1, \ldots, x_n$ de (2.12) é representada por n + m valores não-negativos $x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}$ com $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$, definidos por (2.13). Em cada iteração o método simplex move de alguma solução $x_1, \ldots, x_{n+m}$ para outra solução viável $X_1, \ldots, X_{n+m}$, que é melhor que a anterior, no sentido que

$$\sum_{j=1}^{n} c_j X_j > \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

(A afirmação acima não é muito correta, desde que esta desigualdade não é sempre restrita, como no caso de ter-se mais que uma solução ótima, ou seja, múltiplas soluções).

Como vimos, é conveniente associar um sistema de equações lineares com cada uma das soluções viáveis: tais sistemas facilitam a busca de melhores soluções viáveis. Isto porque ele transforma valores arbitrários às variáveis do lado direito, em correspondentes valores de variáveis do lado esquerdo e da função objetivo. Este sistema é chamado de dicionário. Assim, qualquer dicionário associado com (2.12) será um sistema de equações nas variáveis $x_1, \ldots, x_{n+m}$ e z. Entretanto, nem todo sistema de equações nestas variáveis constitui um dicionário. Para começar, temos definidas $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ e z em termos de $x_1, {}_2, \ldots, x_n$, de modo que n + m + 1 variáveis são densamente interdependentes. Esta interdependência deve ser capturada por qualquer dicionário associado com (2.12); a transformação deve ser correta. Mais precisamente, devemos insistir que:

Qualquer solução do conjunto de equações compreendendo um dicionário, deve também ser uma solução de (2.13), e vice-versa. (2.14)

No nosso exemplo, para alguma escolha de valores para x_1, x_2, ..., x_6 e z, as três seguintes afirmações são equivalentes:

x_1, x_2, ..., x_6, z constitue uma solução para (2.3),
x_1, x_2, ..., x_6, z constitue uma solução para (2.8),
x_1, x_2, ..., x_6, z constitue uma solução para (2.10).

Neste sentido os três dicionários (2.3), (2.8) e (2.10) contém as mesmas informações que dizem respeito à interdependência entre as sete variáveis. No entanto, cada dicionário apresenta esta informação do seu próprio modo. A forma de (2.3) sugere que somos livres para escolher valores numéricos para x_1, x_2, x_3, tendo em consequência a determinação dos valores de x_4, x_5, x_6 e z. Neste dicionário, as variáveis de decisão x_1, x_2, x_3 atuam como variáveis independentes, enquanto z e as variáveis de folga x_4, x_5, x_6 são dependentes delas. O dicionário (2.8) apresenta x_2, x_3, x_4 como independentes e x_1, x_5, x_6 e z como dependentes. No dicionário (2.10), as variáveis independentes são x_2, x_4, x_6 e as dependentes são x_3, x_1, x_5 e z. Em geral:

As equações de qualquer dicionário devem expressar m das x_1, x_2, ..., x_{n+m} e a função objetivo z em termos das restantes n variáveis. (2.15)

As propriedades (2.14) e (2.15) são as propriedades definidoras de dicionários.

Em adição a estas duas propriedades, os dicionários (2.3), (2.8) e (2.10) tem a seguinte propriedade:

Colocando valor zero às variáveis do lado direito (variáveis independentes) e calculando as variáveis do lado esquerdo (variáveis dependentes), encontramos uma solução viável.

Dicionários com esta propriedade são chamados dicionários viáveis. Então, cada dicionário viável descreve uma solução viável.

Entretanto, nem toda solução viável é descrita por um dicionário viável; por exemplo a solução viável $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, $x_5 = 5$, $x_6 = 3$ de (2.1).

Soluções viáveis que podem ser descritas por dicionários são ditas básicas, quando as variáveis independentes tomam valor zero. As características principais do método simplex é o fato que ele trabalha exclusivamente com soluções básicas viáveis e ignora outras soluções viáveis. É a representação do problema em termos da Base considerada na iteracão.

2.3. Segundo Exemplo

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{MAXIMIZAR} & x_1 + x_2 & & \\
\text{s. a.} & 2x_1 + x_2 & \le & 8 \\
 & x_1 + 2x_2 & \le & 7 \\
 & x_2 & \le & 3 \\
 & x_1,\ x_2 & \ge & 0
\end{array}
$$

Para colocar o problema na forma preparada ou canônica acrescentamos as variáveis de folga,

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{Maximizar} & x_1 + x_2 & & \\
\text{s. a.} & 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 8 \\
 & x_1 + 2x_2 + \quad + x_4 & = & 7 \\
 & x_2 + \quad + x_5 & = & 3 \\
 & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 & \ge & 0
\end{array}
$$

Assim temos o primeiro dicionário viável:

$$\begin{array}{rcl} x_3 & = & 8 - 2x_1 - x_2 \\ x_4 & = & 7 - x_1 - 2x_2 \\ x_5 & = & 3 \qquad\; - x_2 \\ \hline z & = & \qquad x_1 + x_2 \end{array} \tag{2.16}$$

que nos dá a solução viável

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 8$, $x_4 = 7$, $x_5 = 3$, $z = 0$ (implícita no dicionário).

Tentaremos aumentar o valor de z, tomando uma das variáveis do lado direito de z em (2.16) positiva. Em exemplos pequenos, escolhemos a viável que, na fórmula de z, tenha o maior coeficiente: o aumento nesta variável fará com que z seja acrescido a uma taxa mais rápida, (mas não necessariamente para o nível mais alto). No nosso exemplo, qualquer uma das variáveis pode ser escolhida. Escolhemos arbitrariamente x_2. Contudo, os valores das variáveis x_3, x_4, x_5 decrescem, e nenhum deles pode tornar-se negativo. Das três restrições

$$\begin{array}{lclcl} x_3 \geq 0 & & 8 - x_2 \geq 0 & & x_2 \leq 8 \\ x_4 \geq 0 & \longrightarrow & 7 - 2x_2 \geq 0 & \longrightarrow & x_2 \leq 7/2 \\ x_5 \geq 0 & & 3 - x_2 \geq 0 & & x_2 \leq 3 \quad \text{é mais restritiva.} \end{array}$$

Desta forma, como x_5 impõe o limite superior ao acréscimo de x_2, para construção do novo dicionário viável, a solução melhorada deverá ter $x_2 = 3$ e $x_5 = 0$. Devemos passar x_2 para o lado direito, e x_5 para o lado esquerdo no novo dicionário. Da terceira equação de (2.16) temos

$$x_2 = 3 - x_5 \tag{2.17}$$

Substituindo (2.17) nas equações restantes de (2.16), chegamos aos dicionários desejado:

$$
\begin{array}{rcl}
x_2 & = & 3 \qquad\qquad - \; x_5 \\
x_3 & = & 5 - 2\,x_1 + \; x_5 \\
x_4 & = & 1 - \;\; x_1 + 2\,x_5 \\
\hline
z & = & 3 + \;\; x_1 - \;\; x_5
\end{array}
\tag{2.18}
$$

que nos dá a solução básica, $x_2 = 3$; $x_3 = 5$; $x_4 = 1$ e $z = 3$, implícita no dicionário. Pela leitura do dicionário vemos, ainda, se podemos melhorar a solução. No caso, com a entrada da variável x_1, podemos provocar uma melhoria no valor de z. Em quanto podemos aumentar o valor de x_1?

$x_2 \geq 0$, não restringe o valor de x_1

$x_3 \geq 0 \longrightarrow 5 - 2\,x_1 \geq 0 \longrightarrow x_1 \leq 5/2.$

$x_4 \geq 0 \longrightarrow 1 - x_1 \geq 0 \longrightarrow x_1 \leq 1$

O limite de crescimento do valor a ser atribuído a x_1 é dado pela restrição $x_4 \geq 0$. Assim $x_1 = 1$ e $x_4 = 0$ e montamos o 3 dicionário, partindo da explicitação de $x_1 = 1 - x_4 + 2\,x_5$

$$
\begin{array}{rcl}
x_1 & = & 1 + 2\,x_5 - \;\; x_4 \\
x_2 & = & 3 - \;\; x_5 \\
x_3 & = & 3 - 3\,x_5 + 2\,x_4 \\
\hline
z & = & 4 + \;\; x_5 - \;\; x_4
\end{array}
\tag{2.19}
$$

A variável x_5 ainda provoca melhoria no valor de z, se a ela for atribuído um valor positivo.

Qual variável barra o crescimento de x_5? De forma a manter a factibilidade (ou seja, a viabilidade) deveremos ter:

$x_3 \geq 0 \longrightarrow 3 - 3\,x_5 \geq 0 \longrightarrow x_5 < 1$

$x_1 \geq 0 \longrightarrow 1 + 2\,x_5 \geq 0 \longrightarrow x_5$ irrestrito por x_1

$x_2 \geq 0 \longrightarrow 3 - x_5 \geq 0 \longrightarrow x_5 < 3.$

Assim temos x_3 bloqueando o crescimento de x_5. A variável x_3 deverá tomar valor zero na nova situação. Transladando de lado as variáveis x_3 e x_5 obtemos o novo dicionário:

$$\begin{aligned} x_5 &= 1 - 1/3\ x_3 + 2/3\ x_4 \\ x_1 &= 3 - 2/3\ x_3 + 1/3\ x_4 \\ x_2 &= 2 + 1/3\ x_3 - 2/3\ x_4 \\ z &= 5 - 1/3\ x_3 - 1/3\ x_4 \end{aligned} \tag{2.20}$$

que me dá a solução ótima. Por quê?

Porque todos os coeficientes na função objetivo são não positivos, fazendo com que não haja possibilidade de melhoria no valor da função objetivo. Represente e interprete geometricamente o problema e o processo de solução através dos dicionários.

2.4. Problema

2.1) Formule e resolva graficamente e construindo dicionários o seguinte problema:

A direção de marketing de uma empresa de mobiliário metálico de escritório sugere o lançamento de novos modelos de mesa e estante, em substituição aos modelos atuais. Aquela direção não vê dificuldade de colocação no mercado para estantes, enquanto que tem informações que a demanda mensal por mesa se restringe no máximo a 160 unidades. As restrições tecnológicas para fabricação dos produtos são dadas pelo Departamento de Estampagem e pelo Departamento de Montagem e Acabamento, conforme os dados:

- cada mesa necessita de 2 horas-máquina de Estampagem e 4 horas-homem de montagem e acabamento;
- cada estante necessita de 4 horas-máquina de Estampagem e 4 horas-homem de montagem e acabamento;
- a disponibilidade mensal do Departamento de Montagem e Acabamento é de 880 horas-homem e do Departmento de Estampagem é de 720 horas-máquina.

Por outro lado, as margens brutas unitárias estimadas são de \$6000 para mesas e de \$3000 para estantes.

A empresa deseja determinar o plano de produção mensal para estes novos modelos, de forma a maximizar a margem bruta de lucro. Resolva o problema através de dicionários e represente geometricamente o conjunto das soluções, apontando:

1. Uma solução não viável, mas básica
2. Uma solução viável, mas não básica
3. As soluções viáveis básicas, definidas pelos dicionários
4. A solução ótima.

CAPÍTULO 3

ALGORITMO SIMPLEX - DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

Neste capítulo daremos a fundamentação teórica para o método simplex, apresentando a forma preparada do problema para sua resolução a cada iteração.

3.1. Desenvolvimento

Dado um PPL na forma padrão:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = cx \\ \text{s. a.} \quad & \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Se $b > 0$, acrescentando variáveis de folga e chamando B, o conjunto de índices das variáveis de folga, temos o PPL na forma canônica

$$\begin{aligned} \max \quad & z = cx \\ \text{s. a.} \quad & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Este PPL apresenta uma solução básica viável (SBV) inicial óbvia, dada pelos coeficientes das variáveis de folga. Nesta situação, as variáveis de decisão, do problema original, são variáveis não básicas.

Parcionamos a matriz A e o vetor de custo C pelos índices componentes de B, e pelos índices não componentes de B, formando o conjunto N, das variáveis decisão do problema original.

De uma forma geral; podemos representar o PPL em forma tabular, como abaixo:

0	C	z - 0
A^B	A^N	b

A SBV inicial, definida pelas variáveis de folga, tem nulos os coeficientes do vetor C.

No caso de termos, $A_{m \times n}$, $b_{m \times 1}$ e $x_{n \times 1}$, $n \geq m$ e $C\,[A] = C\,[A:b] = m$ temos um sistema *consistente* e *sem redundâncias*. É um sistema *indeterminado* de n - m graus de liberdade (determina valores para m variáveis em função das demais n - m). Chamaremos, por simplificação de notação, A^B como B e A^N como N.

Resolvendo o sistema $\begin{bmatrix} B & : & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b$

Multiplicando pela inversa de B, temos:

$$\begin{bmatrix} B^{-1}.\ B & : & B^{-1}.\ N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = B^{-1}\ b$$

Lembrando que a matriz multiplicada por sua inversa é a identidade de mesma ordem temos

$$\begin{bmatrix} I & : & B^{-1}.\ N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = B^{-1}\ b$$

ou

$$x_B + B^{-1}\ .\ N \quad x_N = B^{-1}\ b$$

Assim, como nos dicionários definidos no capítulo II, obtemos valor para m das n variáveis, em função de n - m variáveis, através de:

$$\boxed{x_B = B^{-1}\ b - B^{-1}\ N\ x_N} \qquad (3.1)$$

Análogo aos dicionários vistos anteriormente, arbitrando valores para as variáveis x_N (não básicas-independentes) determinamos valores para as variáveis x_B (básicas-dependentes).

Considerando, agora a função objetivo z. Substituindo x_B em z, temos:

$$z = cx = c_B x_B + c_N x_N = c_B (B^{-1} b - B^{-1} N x_N) + c_N x_N$$

$$z = c_B B^{-1} b - c_B B^{-1} N x_N + c_N x_N$$

$$\boxed{z = c_B B^{-1} b + (c_N - c_B B^{-1} N) x_N} \qquad (3.2)$$

Assim completamos o dicionário usado para resolução do problema de P.L.:

$$\begin{cases} z = c_B B^{-1} b + (c_N - c_B B^{-1} N) x_N \\ x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N \end{cases}$$

Chamamos o coeficiente das variáveis não básicas em z, como *custo relativo* $\hat{c}$ de x_N em função da base B, $\hat{c} = c_N - c_B B^{-1} N$. E o valor atribuído a z neste dicionário denotamos por $\bar{z} = c_B B^{-1} b$.

Temos assim, o problema representado neste dicionário, na *forma preparada*, em função da base B. Todas as condições são dadas para análise da situação:

Arbitrando valor zero as variáveis não básicas temos a solução básica viável dada por:

$$\begin{cases} x_B = B^{-1} b \longrightarrow \text{variáveis básicas} \\ x_N = 0 \longrightarrow \text{variáveis não básicas, quando } z = c_B B^{-1} b \\ \text{e os coeficientes em } z\text{, das variáveis não básicas dados por} \\ \hat{c} = c_N - c_B B^{-1} N \end{cases}$$

(3.3)

Esta solução é relativa a matriz B, composta pelos vetores-coluna representativos das variáveis x_B na matriz A original. Conforme decidamos pela melhoria do valor da função objetivo z, reformulamos a base através da troca da escolhida variável não básica x_N, cujo $\hat{c}_N > 0$ por uma variável x_B. Assim o problema tem nova representação através da nova base B, constituindo um novo dicionário.

O processo leva, assim, a mudanças de BASES para determinação de soluções representando o sistema $Ax = b$. Ainda mais, melhoram o valor de z. De uma forma sistemática, o Simplex usa o método de Gauss-Jordan na busca de soluções básicas ao sistema $Ax = b$, controlado sempre por duas condições:

1a.) A cada iteração obter-se melhoria no valor z.
2a.) Que o valor das variáveis sejam sempre não negativos.

Estas questões são resolvidas na definição do novo dicionário (ou iteração do Método Simplex), que define a nova base para continuidade na resolução do problema. Será que sempre podemos escolher uma variável entrando, achar uma variável saindo, e construir o novo dicionário por pivoteamento, sujeito às duas condições acima?

Esta questão será respondida, após apresentação da forma tabular de resolução do simplex.

3.2. Forma Tabular (TABLEAU do Simplex)

O simplex pode ser, e freqüentemente o é, apresentado de forma diferente que a de dicionários. A forma mais popular é através de quadros (ou tableau), formalizada no item 3.1 e agora apresentada usando o segundo exemplo, item 2.3, do capítulo anterior. Para começar necessitamos reescrever as equações do dicionário (2.16) na forma canônica:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 + x_2 = z \\ \hline 2x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + + x_4 = 7 \\ x_2 + + x_5 = 3 \end{array}}$$

que será transportado em quadro:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b
base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	2	1	1	0	0	8
x_4	1	2	0	1	0	7
x_5	0	1	0	0	1	3
	1	1	0	0	0	z-0

(3.4)

vemos que as colunas A^3, A^4, A^5 constroem a identidade I e representam as variáveis básicas x_3, x_4 e x_5 no problema original. As colunas A^1 e A^2 são relativas às variáveis não básicas x_1 e x_2 nesta iteração. Este quadro se refere ao dicionário (2.16).

Escolhida a variável x_2 para entrar na base no lugar da variável x_3, usamos o método Gauss-Jordan, para representação do problema em função da nova Base, composta pelas variáveis x_3, x_4 e x_2. Este procedimento é feito por pivoteamento em torno do elemento a_{rs}, onde s é o índice da variável a entrar na base e r é o da variável a deixar a Base, do quadro, no caso a_{52}, notado por P (5,2). Assim é feito em cada iteração (mudança de dicionário (ou base) representando o problema). Desta forma:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b		
base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			Equivalência com os dicionários
x_3	2	1	1	0	0	8	B = {3,4,5}	
x_4	1	2	0	1	0	7		
x_5	0	$\boxed{1}$	0	0	1	3		(2.16)
	1	1	0	0	0	z-0		
x_3	2	0	1	0	-1	5	P (5,2)	
x_4	$\boxed{1}$	0	0	1	-2	1	B = {3,4,2}	
x_2	0	1	0	0	1	3		(2.18)
	1	0	0	0	-1	z-3		
x_3	0	0	1	-2	$\boxed{3}$	3	P (4,1)	
x_1	1	0	0	1	-2	1	B = {3,1,2}	
x_2	0	1	0	0	1	3		(2.19)
	0	0	0	-1	1	z-4		
x_5	0	0	1/3	-2/3	1	1	P (3,5)	
x_1	1	0	2/3	-1/3	0	3	B = {5,1,2}	
x_2	0	1	-1/3	2/3	0	2		(2.20)
	0	0	-1/3	-1/3	0	z-5		

Cada dicionário e quadro apresentam a forma preparada para análise do problema naquela iteração da sua resolução.

A forma preparada, expõe o problema gerado segundo a base B. Genericamente, temos

$$\begin{cases} A\underset{\sim}{x} = b \\ cx = z \end{cases}$$

Pelo parcionamento de A, pelas variáveis básicas B e não básicas N temos:

$$\begin{cases} [B : N] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b \\ [c_B : c_N] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = z \end{cases}$$

Colocando na forma preparada temos

$$\begin{cases} [I : B^{-1} N] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = B^{-1} b \\ [0 : c_N - c_B B^{-1} N] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = z - c_B B^{-1} b \end{cases}$$

Chamando $z_j = c_B B^{-1} N^j$, j denotando uma variável x_j, representamos genericamente um quadro do Simplex, da seguinte forma:

(SBV) base	$\underset{\sim}{x}_B$	$\underset{\sim}{x}_N$	$\underset{\sim}{b}$
x_B	I	$B^{-1} N$	$B^{-1} b$
	O	$\underset{\sim}{c}_N - \underset{\sim}{c}_B B^{-1} N$	$Z - c_B B^{-1} b$

como usado nos quadros de resolução do exemplo anterior.

Outra notação também encontrada é a seguinte:

c^j			$\underset{\sim}{c}^B$	$\underset{\sim}{c}^N$
$\underset{\sim}{c}_B$	A^j / SBV	$\underset{\sim}{b}$	B	N
$\underset{\sim}{c}_i$	$\underset{\sim}{x}_B$	B^{-1} b	I	B^{-1} N
z^j		$c_B\ B^{-1}\ \underset{\sim}{b}$	$\underset{\sim}{c}_B$	$\underset{\sim}{c}_B\ B^{-1}\ N^j$
$c^j - z^j$			$\underset{\sim}{0}$	$c_j - \underset{\sim}{c}_B\ B^{-1}\ N^j$

onde $z^j = \underset{\sim}{c}_B\ B^{-1}\ N^j$ recebe o nome de *custo de oportunidade* da atividade j, representada pela variável x_j.

Também podemos expressar $z^j = y\ N^j$ onde $y = \underset{\sim}{c}_B\ B^{-1}$ é o *vetor multiplicador* da base B.

Vale lembrar que B e N denotam respectivamente os parcionamentos da matriz A do problema original, $B = A^B$ e $N = A^N$, como visto em 3.1. Assim $N^j = A^j$ do problema original.

O último quadro de resolução do exemplo, é representado nesta última forma como:

c_j			1	1	0	0	0
A^j			$\hat{A}^1$	$\hat{A}^2$	$\hat{A}^5$	$\hat{A}^3$	$\hat{A}^4$
$\underset{\sim}{c}_B$	SBV	$\underset{\sim}{b}$	x_1	x_2	x_5	x_3	x_4
0	x_5	1	0	0	1	1/3	-2/3
1	x_1	3	1	0	0	2/3	-1/3
1	x_2	2	0	1	0	-1/3	2/3
z^j		5	1	1	0	1/3	1/3
$c^j - z^j$			0	0	0	-1/3	-1/3

Notadas as várias formas de representação dos quadros simplex, passamos à análise de casos particulares que podem ocorrer durante a resolução do problema.

3.3. Operacionalização

3.3.1. Escolhendo a variável para entrar na base

A variável entrando é *uma variável não básica* x_s*, com valor positivo em* $\hat{c}$*, coeficiente de custo relativo à base em questão. Este controle é feito na linha referente à função* z do corrente dicionário (ou matriz aumentada na iteração). Esta regra é ambígua, no sentido que pode ocorrer mais que uma variável a entrar na base, ou nenhuma delas. A última alternativa implica que o corrente dicionário descreve uma solução ótima, e o método deve terminar. Mais precisamente, consideremos a linha do dicionário, referente a z:

$$z = \bar{z} + \hat{c}_N x_N = \bar{z} + (c_N - c_B B^{-1} N)\, x_N$$

com o índice $\underline{N}$ denotando as variáveis não básicas x_j. Nossa corrente solução, com $x_j = 0$ se j é não básica, dá à função objetivo o valor numérico $\bar{z}$. Se o custo relativo para qualquer j não básico, for negativo, então qualquer solução viável, com $x_j \geq 0$ dá à função objetivo um valor numérico no máximo igual a $\bar{z}$, o que implica que a solução corrente é ótima, $\bar{z} = z^*$.

A segunda alternativa, qual seja, *se existe mais que uma candidata a entra na base*, qualquer uma destas candidatas pode servir. (Em cálculos manuais envolvendo problemas de pequeno porte, é costume escolher o candidato x_s de maior coeficiente positivo $\hat{c}_s$. Esta prática, leva ao ótimo local, mas não necessariamente a uma taxa mais rápida para o ótimo global (vide item b, exercício 3.3). Na maioria das implementações computacionais do Método Simplex esta prática não é usada. Assim sendo, um critério para escolha de uma variável a entrar na nova base, caso não estejamos no ótimo é: Para todo $c_N - c_B B^{-1} N \geq 0$, escolhemos x_s tal que $\hat{c}_s = c_s - c_B B^{-1}\ {}^sA = \max \left[c_n - c_B B^{-1} . N \right]$, onde A^s é o vetor coluna relativo à variável x_s, na matriz N representando as variáveis não básicas x_N. Assim, escolhemos a variável x_s para entrar na base.

No caso de empate, qualquer uma poderá ser a escolhida.

Se tivermos o custo relativo de variável não básica igual a zero, significa que ela poderá entrar na base sem modificar o valor de z. Teremos, então, *múltiplas soluções*. (vide item c, excercício 3.3).

3.3.2. Escolhendo uma variável para deixar a base

A variável a deixar a base é *aquela variável cuja não negatividade impõe o mais restritivo limite superior ao acréscimo da variável entrando*. Formalizando este critério, para a variável x_s a entrar na base e seguindo o raciocínio:

$$x_B = B^{-1} . b - B^{-1} . N\ x_N$$

Como a variável x_s é a única das variáveis não básicas a ter seu valor acrescido além de zero na nova base, permanecendo as demais nulas, podemos reescrever

$$x_B = B^{-1} . b - B^{-1} . A^s x_s$$

Como a nova base deverá respeitar a condição de não negatividade, qual seja $x \geq 0$, devemos ter, para toda variável básica

$$x_B \geq 0 \longrightarrow B^{-1} . b - B^{-1} . A^s x_s \geq 0$$

A variável a deixar a base, que chamaremos x_r, será aquela que tiver o menor valor obtido do cociente entre o seu componente no vetor $B^{-1} . b$ e o componente na mesma posição (linha) da coluna relativa a x_s no tableau, *se positivo*, resultante do produto $B^{-1} . A^s$, que é denotada por $\hat{A}^1$.

Chamando $B^{-1} . b$ por $\hat{b}$ e $B^{-1} . A^s$ por $\hat{A}^s = \left[\hat{a}_{is}\right]$ temos para todo i pertencente a base B e $\hat{a}_{is} > 0$, $\hat{b}_i / \hat{a}_{is}$. Assim o critério para a escolha da variável x_r a sair da base B, é formalizado por:

$$\theta_r = \min (\hat{b}_i / \hat{a}_{is} \text{ t.q. } \hat{a}_{is} > 0)$$

Então a nova Base será obtida da antiga, com o acréscimo de x_s e a retirada de x_r.

Também esta regra é ambígua, no sentido que pode oferecer mais que uma candidata a deixar a base, ou nenhuma delas. A última alternativa é ilustrada no dicionário e representada no Tableau

$$\begin{array}{rcl} x_2 &=& 5 + 2\,x_3 - x_4 - 3\,x_1 \\ x_5 &=& 7 - 3\,x_4 - 4\,x_1 \\ \hline z &=& 5 + x_3 - x_4 - x_1 . \end{array} \longrightarrow$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
x_2	3	1	-2	1	0	5
x_5	4	0	0	3	1	7
	-1	0	1	-1	0	z - 5
			$\hat{A}^3$			

A variável a entrar na base é x_3, mas nenhuma das duas variáveis básicas x_2 ou x_5 impõe um limite superior ao seu crescimento. Desta forma nós podemos fazer x_3 tão grande quanto quisermos (mantendo $x_1 = x_4 = 0$) e ainda manter a compactibilidade (viabilidade): colocando $x_3 = t$, para qualquer t positivo, nós obtemos uma solução viável com $x_1 = 0$, $x_2 = 5 + 2t$, $x_4 = 0$, $x_5 = 7$, e $z = 5 + t$. Desde que t pode ser arbitrariamente grande, z pode ser arbitrariamente grande. Concluímos, então, que o problema é *ilimitado: ou seja, para qualquer número M, existe uma solução viável* x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, tal que $x_3 - x_4 - x_1)$ M. A mesma conclusão pode ser tirada no geral: se não existe nenhuma candidata para deixar a base, então podemos fazer o valor da variável entrando, e desta forma, também o valor da função objetivo, tão grande quanto queiramos. Neste caso o problema é ilimitado. Diz-se que a solução é do tipo β. [Vide problema (1.9)].

De outro lado, *se existe mais que uma candidata a deixar a base*, qualquer uma delas pode servir. Uma vez que as candidatas a entrar na nova base e a deixar a base anterior estejam definidas, segue o pivoteamento no Tableau, em torno do elemento a_{rs}. Teremos o problema representado pela nova base, com a exclusão da Base Antiga da variável x_r e inclusão da variável x_s.

3.4. Casos Especiais

3.4.1. Degenerescência

A presença de mais de uma candidata a deixar a base tem consequências interessantes. Para ilustrar consideremos o dicionário

$$
\begin{array}{rcrrrrrr}
x_4 & = & 1 & - & & & - & 2\,x_3 \\
x_5 & = & 3 & - & 2\,x_1 & - 4\,x_2 & - & 6\,x_3 \\
x_6 & = & 2 & + & x_1 & - 3\,x_2 & - & 4\,x_3 \\
\hline
z & = & & & 2\,x_1 & - \;\; x_2 & + & 8\,x_3
\end{array}
$$

Tendo escolhido x_3 para entrar na base, calculamos que cada uma das três variáveis básicas x_4, x_5, x_6 limita o crescimento de x_3 em 1/2. Cada uma das três variáveis é uma candidata a deixar a base. Escolhemos arbitrariamente x_4, obtemos o dicionário

$$
\begin{array}{rcrrrrrr}
x_3 & = & 0,5 & - & & & - & 0,5\,x_4 \\
x_5 & = & & - & 2\,x_1 & - 4\,x_2 & + & 3\,x_4 \\
x_6 & = & & & x_1 & - 3\,x_2 & + & 2\,x_4 \\
\hline
z & = & 4 & + & 2\,x_1 & - \;\; x_2 & - & x_4
\end{array}
$$

Este dicionário difere de todos os dicionários que temos encontrado sob um importante aspecto: *além das variáveis não básicas*, as variáveis básicas x_5 e x_6 tem valor zero na solução associada. Soluções básicas com uma ou mais variáveis básicas com valor zero são chamadas *degeneradas*.

Embora inofensivo por si só, degeneração pode ter efeitos danosos. Ilustraremos isto na próxima iteração do nosso exemplo. Temos aí, que x_1 entra na base e x_5 sai. Devido a degenerescência, a restrição $x_5 \geq 0$ limita o aumento de x_1 para zero. Então, o valor de x_1 permanece sem mudar e assim ocorre com o valor das restantes variáveis e da função objetivo z. Isto é danoso porque o método simplex deve melhorar, a cada iteração, o valor da função objetivo. Com o pivoteamento o dicionário muda para:

$$\begin{array}{lllll}
x_1 = & & - 2 x_2 & + 1,5 x_4 & - 0,5 x_5 \\
x_3 = & 0.5 & & - 0,5 x_4 & \\
x_6 = & & - x_2 & + 3,5 x_4 & - 0,5 x_5 \\
\hline
z = & 4 & + 3 x_2 & - x_4 & - x_5
\end{array}$$

mas não afeta a solução associada a base. Continuando teremos ainda uma solução degenerada, e nas próximas teremos a solução ótima do problema.

Assim sendo, o empate entre duas ou mais variáveis a sair da base, tem importância teórica pelo que *pode* ocorer.

Primeiro, porque todas as variáveis básicas empatadas chegam a zero, simultaneamente, quando for dado valor positivo à variável entrando. Portanto, a ou as variáveis básicas não escolhidas para deixar a Base seriam anuladas. (e são, então, chamadas variáveis básicas degeneradas) na nova solução básica viável (denerada). Assim teríamos não somente as variáveis não básicas nulas, mas também variáveis básicas, quando a solução é dita *solução degenerada.*

Segundo, se uma destas variáveis básicas degeneradas retiver seu valor de zero até que seja escolhida numa iteração subsequente para ser a variável básica saindo, a variável entrando correspondente também terá valor zero para manter a viabilidade, não melhorando o valor de z.

Terceiro, se z pode permanecer imutável a cada iteração, então o método simplex pode ficar dando voltas, repetindo a mesma sequência de iterações periodicamente. Neste caso o procedimento cicla, podendo não chegar a solução.

É o que veremos a seguir.

3.4.2. Terminação com ciclos

Vimos que o método simplex pode entrar numa sequência de iterações e representar uma solução ótima, mesmo degenerada. Porém, pode ocorrer a situação representada pelo seguinte dicionário:

$$
\begin{array}{lcl}
x_5 & = & -\,0{,}5\,x_1 + 5{,}5\,x_2 + 2{,}5\,x_3 - 9\,x_4 \\
x_6 & = & -\,0{,}5\,x_1 + 1{,}5\,x_2 + 0{,}5\,x_3 - x_4 \\
x_7 & = & 1 - x_1 \\
\hline
z & = & +\,10\,x_1 - 57\,x_2 - 9\,x_3 - 24\,x_4
\end{array}
$$

que nos fará concordar com o seguinte:

(i) A variável entrando sempre será a variável não básica que tenha o maior coeficiente positivo na linha-z do dicionário.

(ii) Se uma ou mais variáveis básicas competem para deixar a base, então a candidata com menor indice será escolhida para sair.

Mostraremos, para o exemplo as primeiras seis iterações que seguem o dicionário acima, apresentados na forma tabular:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	b
x_1	1	-11	-5	18	2	0	0	0
x_6	0	$\boxed{4}$	2	-8	-1	1	0	0
x_7	0	11	5	-18	-2	0	1	1
z	0	53	41	-204	-20	0	0	0

→ índices
Base: 1,6,7
Ñ Base: 2,3,4,5

x_2	0	1	0.5	-2	-0.25	0.25	0	0
x_1	1	0	$\boxed{0.5}$	-4	-0.75	2.75	0	0
x_7	0	0	-0.5	4	0.75	13.25	1	1
z	0	0	14.5	-98	-6.75	-13.25	0	0

→ I.Base: 2,1,7
Ñ Base: 3,4,5,6

x_3	2	0	1	-8	-1.5	5.5	0	0
x_2	-1	1	0	2	0.5	-2.5	0	0
x_7	1	0	0	0	0	0	1	1
z	-29	0	0	18	15	-93	0	0

→ I.Base: 2,3,7
Ñ Base: 1,4,5,6

x_4	-0.5	0.5	0	1	0.25	-1.25	0	0
x_3	-2	4	1	0	$\boxed{0.5}$	-4.5	0	0
x_7	1	0	0	0	0	0	1	1
z	-20	-9	0	0	10.5	-70.5	0	0

→ I.Base: 3,4,7
Ñ Base: 1,2,5,6

x_5	-4	8	2	0	1	-9	0	0
x_4	0.5	-1.5	-0.5	1	0	1	0	0
x_7	1	0	0	0	0	0	1	1
z	22	-93	-21	0	0	24	0	0

→ I.Base: 5,4,7
Ñ Base: 1,2,3,6

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	b
x_6	0.5	-1.5	-0.5	1	0	1	0	0
x_5	0.5	-5.5	-2.5	9	1	0	0	0
x_7	1	0	0	0	0	0	1	1
z	10	-57	-9	-24	0	0	0	0

I.Base: 6,5,7
(V. Folga)
Ñ Base: 1,2,3,4
(V. Decisão Ori-
ginais)

Desde que o resultado da sexta iteração é idêntico ao dicionário inicial, o método simplex irá repetir as seis iterações sem achar a solução ótima. O bloco de iterações representa o fenômeno chamado de *ciclagem*. Mais precisamente, dizemos que o método simplex cicla, se um dicionário aparece em duas diferentes iterações (e tal sequência de operações pode se repetir sem fim). Note que ciclagem pode aparecer apenas na presença de degenerescência. A ciclagem é a única razão pela qual o método simplex pode falhar na terminação. Este fenômeno é raríssimo e só tem importância teórica.

Prova-se que se o método simplex cicla sem achar o ótimo, *para um problema que tenha o ótima*, então o dicionário deve envolver ao menos seis variáveis e três equações.

Existem formas de prevenir-se da ocorrência de ciclagem. O método de perturbação e o método lexigráfico evitam ciclos por uma escolha cuidadosa da variável deixando a base em cada iteração do simplex. *Usaremos apenas a regra de escolha da variável de menor índice para as variáveis entrando e sainda da base, quando ocorrer empate.*

Lembre-se que a ocorrência de ciclagem só se dá na presença de degeneração, e é um fenômeno raríssimo.

3.5. Adaptação de Outras Formas de Modelos à Forma Padrão

3.5.1. Problema de Minimização

No caso de termos:

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= cx \\ \text{s.a.} \quad Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Podemos tratá-lo como um problema de maximização, se pensarmos que Min $z = cx$ é o mesmo que Max $(-z) = -cx$.

No problema de minimização, temos que buscar uma variável a entrar na base que "piore" o valor de z. Desta forma escolhemos x_s, tal que tenha o menor dos custos relativos negativos, na linha z do dicionário (ou do tableau).

Lembrando que o custo relativo das variáveis não básicas é igual a:

$$\hat{c}_n = c_n - c_B B^{-1} . N$$

na solução ótima, deveremos ter todos eles positivos (teste de otimalidade) para o problema de minimização.

Se tal não ocorrer escolhemos x_s para entrar na nova base, tal que para todo $\hat{c}_N \leq 0$, tenhamos como critério de escolha:

$$c_s - c_B B^{-1}. N = \min \left\{(c_N - c_B B^{-1}. N), \text{ tal que } (c_N - c_B B^{-1} N) < 0\right\}$$

A condição de otimalidade para o problema é dada quando todos os custos relativos associados às variações não básicas forem positivos. Outra forma de trabalharmos com um problema de minimização é considerarmos a linha de custo relativo no quadro simplex, multiplicada por (-1). Assim:

Trabalhando com a desigualdade $\hat{c}_N \leq 0$, podemos escrever

$$-c_N + c_B B^{-1} . N \geq 0$$

Assim fazendo, o custo relativo no problema de minimização pode ser tratado para o critério de entrada da variável, como no problema de maximização. Basta que na linha de controle z, no quadro, tenhamos $z^j - c^j$.

3.5.2. Restrições de desigualdade ≥

Neste caso, teremos um excesso do lado esquerdo para promover a igualdade com o lado direito. Acrescentamos, então, uma variável desvio acompanhada do sinal negativo representando este excesso. Esta variável recebe por isso o nome de variável de excesso, x_e.

Por exemplo, 1a. restrição do exercício 1.3.a do capítulo 1:

$$4 x_1 + 5 x_2 \geq 3$$

fica equivalente a

$$4 x_1 + 5 x_2 - x_3 = 3$$

No caso das restrições serem do tipo $Ax \leq b$, o acréscimo das variáveis de folga a cada uma das restrições me fornecia uma solução básica viável inicial óbvia, associada com o valor de $z = 0$ dada por: valor das variáveis de folga igual aos componente do vetor b, relativos às restrições associada, e variáveis legítimas (do problema) tomando, então, o valor zero. Esta solução básica inicial era viável, desde que

$$b \geq 0$$

No caso das restrições com variáveis de excesso, tal não ocorre posto que se $b \geq 0$, $x_e = -b$, quando as variáveis de decisão do problema são colocadas em zero. Pelo exemplo, teríamos

$$x_3 = -3$$

contradizendo a hipótese de, no simplex trabalharmos sempre com $x_B \geq 0$.

3.5.3. Restrições de igualdade

No caso de termos $Ax = b$, não temos uma base óbvia inicial, como em $Ax \leq b$ com o acréscimo das variáveis de folga. Para obtê-la, acrescentamos variáveis artificiais x_a, criando um problema artificial $Ax - Ix_a = b$, que será equivalente ao problema original, se e somente se, $x_a = 0$.

Assim podemos fazer, também, com as restrições $Ax \geq b$. Trataremos a matriz aumentada $[A : -I]$ como A, e o vetor solução $(x, x_a)^t$ como x, da forma como fizemos até aqui para as restrições $\leq$. Como não temos uma base óbvia usamos variáveis artificiais, que nos dá esta base óbvia para iniciarmos a resolução do problema.

Este artifício de uso de variáveis artificiais para obtenção básica viável chama-se *Método de Duas Fases.*

Além deste, existem outros métodos para obtenção de solução viável básica inicial, que aqui serão apenas citados: o método de "M grande" e o método da única variável artificial. Este último é uma variante do Método das Duas Fases. Este método será visto no capítulo 5.

3.5.4. Variáveis irrestritas

Se uma variável x_j é considerada livre (isto é, não possui restrições de sinal), podemos substituí-la por duas variáveis não negativas.

$$x_j = x'_j - x''_j$$

onde

$$x'_j \geq 0, \qquad x''_j \geq 0 \qquad \text{e } x_j \text{ irrestrita}$$

3.5.5. Lado direito negativo (b < 0)

Neste caso, basta multiplicar a restrição por (-1).

EXEMPLO:

Tomemos o problema (1.6) do capítulo 1. Podemos reescrevê-lo como:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Max} & -3x_1 + x_2 & & \\
\text{s.a.} & x_1 - 6\,x_2 + x_3 - x_4 & \leq & 3 \\
& 7\,x_2 + 2\,x_4 & \leq & 5 \\
& 7\,x_2 + 2\,x_4 & \geq & 5 \\
& x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 1 \\
& x_1 + x_2 + x_3 & \geq & 1 \\
& x_3 + x_4 & \leq & 2 \\
& x'_1,\ x''_1,\ x_2,\ x_3,\ x'_4,\ x''_4 & \geq & 0
\end{array}$$

$$\text{e} \quad \begin{cases} x_1 = x'_1 - x''_1 \\ x_4 = x'_4 - x''_4 \end{cases}$$

3.6. Problemas

3.1) Transforme os problema do exercício 1.3, (Capítulo 1) na forma padrão.

3.2) Com a leitura dos capítulos 2 e 3, expresse com suas palavras o que faz o Método Simplex.

3.3) Dado o seguinte PPL

$$\begin{cases} \text{Max } f = 2\,x_1 + 3\,x_2 \\ \text{s.a.} \\ \quad -6\,x_1 + x_2 \le 3 \\ \quad -2\,x_1 + x_2 \le 13 \\ \quad 2\,x_1 - 3\,x_2 \le 13 \\ \quad x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

a) Resolva usando o algoritmo simplex e faça a interpretação geométrica.

b) Resolva novamente o problema P, acrescentando a restrição

$$x_1 + 3\,x_2 \le 74$$

Pela interpretação geométrica, critique o critério de escolha da variável a entrar na Base;

c) Acrescentar ao problema P, a restrição $2\,x_1 + 3\,x_2 \le 79$. Determine a solução ótima e faça a interpretação geométrica.

CAPÍTULO 4

O ALGORITMO SIMPLEX - OPERACIONALIZAÇÃO E INTERPRETAÇÕES ECONÔMICA E GEOMÉTRICA

Neste capítulo, através de um exemplo, fazemos a interpretação geométrica e econômica do algoritmo simplex.

4.1. O Exemplo da Fábrica de Mobiliário de Escritório

Consideremos o problema da fábrica de mobiliário de escritório.

Sejam x_1 e x_2 o número de mesas e de estantes dos novos modelos, respectivamente, a produzir mensalmente e z a margem bruta total no mesmo período. Tem-se, evidentemente, x_1 e x_2 como variáveis de decisão e como objetivo determinar valores para estas variáveis que maximizem

$$z = 6\ x_1 + 3\ x_2 \ (\text{em } \$\ 10^3)$$

tendo em conta as restrições impostas pelas limitações da capacidade produtiva e do mercado.

Relativamente ao Departamento de Estampagem, sabe-se que:

- Cada mesa necessita de 2 H-M, pelo que o número total de horas-máquina necessárias à produção de x_1 mesas é $2\ x_1$;
- Cada estante necessita de 4 H-M, pelo que o número total de horas-máquina necessárias à produção de x_2 estantes é de $4\ x_2$;
- A disponibilidade mensal é de 720 horas-máquina.

Então a restrição relativa a este Departamento é:

Tempo total de máquina gasto na produção de mesas	mais	Tempo total de máquina gasto na produção de estantes	não pode exceder	Disponibilidade em horas-máquina

que se traduz algebricamente na desigualdade linear:

$$2\ x_1 + 4\ x_2 \leq 720$$

Analogamente, tem-se para o Departamento de Montagem e Acabamento:

$$4\ x_1 + 4\ x_2 \leq 880$$

No que diz respeito ao mercado, a restrição traduz-se na forma:

$$x_1 \leq 160$$

Para além destas restrições, tem-se ainda

$$x_1 \geq 0 \quad \text{e} \quad x_2 \geq 0,$$

pois não faz sentido produção negativa.

Em síntese, o problema consiste em escolher x_1 e x_2 de forma a maximizar:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar } z = & 6\ x_1 + 3\ x_2 \\ \text{sujeito a} & 2\ x_1 + 4\ x_2 \leq 720 \\ & 4\ x_1 + 4\ x_2 \leq 880 \\ & x_1 \qquad\quad\ \leq 160 \\ & \quad x_1,\ x_2 \geq 0. \end{array} \qquad (4.1)$$

4.2. Representação Gráfica de Problemas de Programação Linear

Para entender a resolução de problemas de P.L. é de grande utilidade a representação gráfica de problemas simples, com no máximo duas variáveis de decisão. Além de visualizar a atuação do simplex, a importância é devida também à compreensão de propriedades básicas teóricas, fundamentais para análise de sensibilidade e dualidade que serão vistas mais adiante, essenciais na interpretação da solução do problema e análise de pós-otimização.

PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO

Considere-se o exemplo da fábrica de mobiliário de escritório. Construa-se então um sistema de eixos cartesianos x_1 X x_2. O primeiro passo consiste em identificar os valores de x_1 e x_2 que satisfaçam todas as restrições.

No que diz respeito às condições de não negatividade, elas indicam que (x_1, x_2) viáveis, se encontram no 1. Quadrante. A restrição $x_1 \leq 160$ significa que (x_1, x_2) não se encontra à direita da reta $x_1 = 160$.

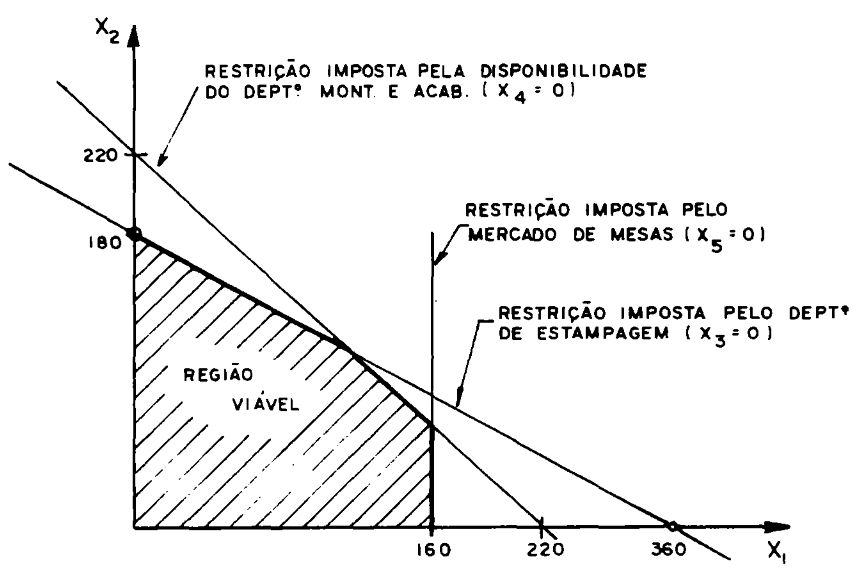

Figura 4.1 - Conjunto K das soluções viáveis, no exemplo da fábrica de mobiliário de escritório.

As restrições $2\ x_1 + 4\ x_2 \leq 720$ e $4\ x_1 + 4\ x_2 \leq 880$ impõem que (x_1, x_2) se encontre abaixo ou sobre as retas $2\ x_1 + 4\ x_2 = 720$ e $4\ x_1 + 4\ x_2 = 880$. O resultado final encontra-se na figura 4.1, onde a região hachuriada indica o conjunto dos pontos que satisfazem todas as restrições (conjunto das soluções admissíveis ou viáveis).

Por último, procure(m)-se o(s) ponto(s) nesta região que maximiza(m) o valor de $z = 6\ x_1 + 3\ x_2$. Nesta fase, procede-se por tentativas; mais adiante se enunciará uma regra prática que permite resolver esta questão de uma forma quase automática. O processo baseia-se na representação gráfica da reta $6\ x_1 + 3\ x_2 =$ constante, para três valores dados.

Comece, por exemplo, por representar no gráfico as retas $6\ x_1 + 3\ x_2 = 600$ e $6\ x_1 + 3\ x_2 = 960$. A interseção de cada uma destas retas com o conjunto de soluções viáveis indica o conjunto dos planos de produção que possibilita a mesma margem bruta de lucro, igual à constante usada. A reta $6\ x_1 + 3\ x_2 = 600$ além de ser paralela à segunda, traduz um valor inferior para z(600) e encontra-se mais próxima da origem; portanto, o procedimento consiste em traçar uma terceira reta paralela que contenha pelo menos um ponto da região viável e esteja, neste caso, o mais distante da origem, sendo portanto, o ponto que maximiza o valor de z.

Assim, extraímos a seguinte regra prática: trace-se uma qualquer reta de nível, com inclinação dada pela função objetivo, e desloque-a paralelamente a si própria, no sentido do crescimento de z, até ao(s) extremo(s) ponto(s) de tangência à região viável. Assim fazendo, obtemos a regra $6\ x_1 + 3\ x_2 = 1140$, passando no ponto (160, 60), conforme a figura 4.2. A solução pretendida é $x_1^* = 160$ e $x_2^* = 60$, valores que dão, respectivamente, o número de mesas e estantes a produzir por mês pela empresa em causa, de forma a maximizar o lucro. Deste programa de produção resulta para a empresa uma margem bruta mensal de

$ 1140×10^3, com uso total da capacidade disponível nos departamento de Montagem e Acabamento e atendendo plenamente ao mercado de mesas.

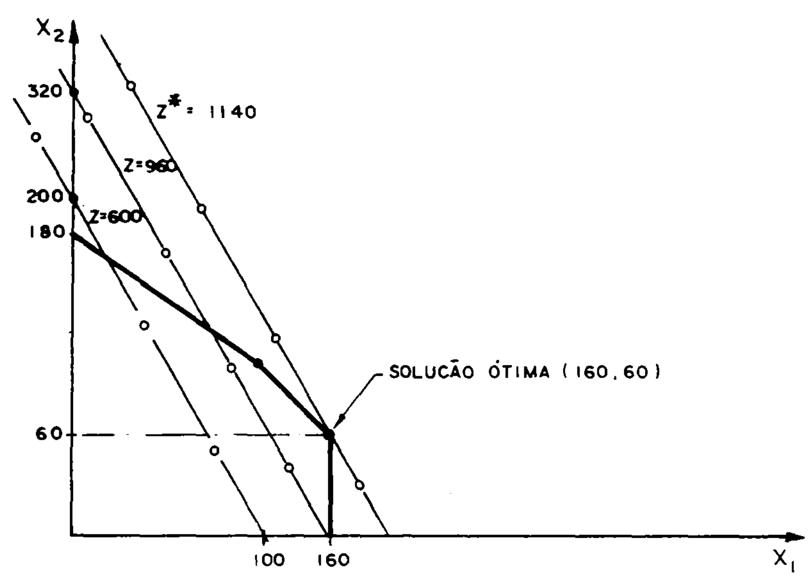

Figura 4.2 - Solução ótima do exemplo 1.

4.3. Interpretação do Problema de Programação Linear em Termos de Atividades

Em termos gerais, pode considerar-se como preocupação fundamental da PL o estudo do comportamento de um conjunto complexo em que intervêm homens, serviços, máquinas, materiais diversos; isto é, um sistema.

A abordagem através da PL pressupõe que um sistema nestas condições é decomponível em funções elementares chamadas "atividades". Uma atividade funciona em PL como uma "caixa preta" na qual entram "fatores" ou recursos, tais como mão-de-obra, matéria-prima, equipamentos, etc. (inputs) e saem "produtos", os mais diversos (outputs). Por outras palavras, uma *atividade* consiste em produzir um certo conjunto de produtos, com uso de certo conjunto de *fatores* (ou recursos). O que se passa dentro da caixa preta não é do âmbito da PL; essa é uma tarefa daqueles que dominam as técnicas de transformação de "inputs" em "outputs". Na ótica da PL interessam, isso sim, as quantidades de recursos que entram e as quantidades de produtos que saem. Cada atividade é caracterizada pelas proporções entre os seus "bens" (fatores e produtos) serem fixas e bem determinadas. Estes fatores recebem o nome de coeficientes tecnológicos e expressam a quantia necessária do recurso em questão para obter-se uma unidade do produto. São parâmetros do problema, coletados no ambiente pesquisado. No nosso exemplo são definidos, pelos técnicos do Departamento de Processos de Fabricação, as necessidades respectivas do Departamento de Estampagem e de Montagem e Acabamento relativas à quantidade de horas-máquina e horas-homem para produção de uma mesa, ou de uma estante (tempo-padrão).

A medida quantitativa de cada atividade designa-se por "nível da atividade": *variar o nível de atividade é variar o montante dos respectivos fluxos de entrada e de saída* (realocar os recursos para o nível de produção).

Pode medir-se o nível de uma atividade tomando como referência (padrão) a quantidade de um dos bens envolvidos; a escolha desse bem depende do problema em causa, considerando-se normalmente o fluxo respectivo igual à unidade e operando-se sobre os outros fluxos, relativos aos recursos, de modo a manter as proporções que caracterizam a atividade. Este nível designa-se por "nível unitário da atividade".

Considere-se agora um sistema, dispondo de M bens (fatores e produtos) e desenvolvendo N atividades. Este sistema defronta-se, naturalmente, com restrições quanto a recursos disponíveis e quanto à quantidade e qualidade dos produtos a produzir.

Como se pode sempre associar a cada atividade unitária um certo lucro (custo), o problema que se põe, do ponto de vista econômico, é *o de determinar os níveis das diversas* *atividades de forma a maximizar o lucro total* (minimizar custo total), respeitando as limitações que lhes são *impostos pela disponibilidade dos recursos, quantidade e qualidade dos produtos.*

Algebricamente, cada atividade é normalmente representada por um vetor de m componentes, em que cada componente se refere a um recurso, convencionando-se que: as componentes negativas representam os fatores de produção utilizados na atividade, as componentes positivas representam os produtos resultantes da atividade e as nulas dizem respeito aos recursos que não entram na atividade considerada.

Genericamente, a atividade j será representada pelo vetor:

$$A^j =- (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})^t,$$

em que as suas componentes se referem, salvo indicação contrária, ao nível unitário de atividade.

Ressalta-se, que os vetores A^j na forma vetorial no problema de PL, podem ser interpretados como as atividades do sistema e a matriz dos coeficientes tecnológicos, A, composta por todos os vetores A^j, na forma matricial de todo o sistema. Assim, temos a matriz tecnológica, representando as atividades do sistema:

$$A = (A^1, A^2, \ldots, A^n)$$

À luz desta interpretação, as *variáveis de decisão* do modelo, x_1, x_2, ..., x_N, são os *níveis das atividades* do sistema e, conseqüentemente, $x_j\ A^j$ (j = 1, 2, ..., n) representa o funcionamento da atividade j no nível x_j.

Empregando m fatores para as n atividades com os níveis não negativos, x_1, x_2, ..., x_n, obtém-se a sua combinação.

$$\underset{\sim}{Ax} = A^1x_1 + A^2x_2 + \ldots + A^Nx_n = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

ou

$$\underset{\sim}{Ax} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ A^1 & A^2 & A^3 & & A^n \end{array} \end{array} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

constituindo $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ um *programa* de produção.

As componentes positivas da matriz acima, indicam então as quantidades dos bens produzidos no sistema, enquanto que as componentes negativas indicam as quantidades dos bens consumidos e as componentes nulas se referem aos bens intermédios, isto é, produzidos e consumidos (totalmente) no sistema.

O sistema de equações do modelo exprime, então aquilo que a empresa pode fazer, isto é, delimita o seu campo de escolha. A forma do sistema representa com se relacionam as características tecnológicas, os recursos disponíveis, as satisfação da demanda e da qualidade dos produtos. A função objetivo *orienta* a escolha do programa.

Em resumo, o problema de programação das atividades de um sistema real (por exemplo empresa) pode ser traduzido matematicamente através de um modelo de PL resultante da conjunção de três componentes quantitativos: um objetivo, tecnologias alternativas ou processos para atingir o objetivo e escassez de recursos ou outras limitações. Dado o objetivo, é evidente que só existe problema (de decisão) se o mesmo puder ser alcançado por diversos modos, ou seja, caso ocorram várias formas de solução do problema.

As várias alternativas de solução ocorrem porque $\underset{\sim}{A}x = b$, com $n > m$, é um sistema indeterminado. Conforme a escolha da base para sua solução, teremos valores para o nível de produção das atividades $(x_1, \ldots, x_n)$.

Considerando que $Ax = b$ é um sistema consistente e sem redundâncias, e que A é m x n, podemos dizer que no máximo m das n atividades serão ativadas (terão valor maior do que zero), enquanto que as restantes n-m atividades estarão excluídas do plano de produção (terão valor nulo).

4.4. Redução à Forma Preparada (inicialização do Algoritmo Simplex para problemas na forma padrão)

Como em geral é mais conveniente trabalhar com igualdades do que com desigualdades, o primeiro passo a cumprir com o objetivo de resolver um problema de PL consiste em converter as restrições funcionais de desigualdade em restrições equivalentes sob a forma de igualdade, obtendo-se assim um sistema de equações lineares. Isto consegue-se pela introdução no problema original de novas variáveis, igualmente não negativas, designadas por variáveis auxiliares ou variáveis desvio. No caso de restrições $\leq$, estas variáveis recebem o nome de variáveis de folga.

Para exemplificar, considere-se a primeira restrição funcional do problema da fábrica de móveis de escritório:

$$2\ x_1 + 4\ x_2 \leq 720.$$

Esta restrição é equivalente às restrições:

$$2\,x_1 + 4\,x_2 + x_3 = 720 \quad e \quad x_3 \geq 0,$$

dado que a verificação da restrição de igualdade garante a verificação da restrição original, desde que $x_3 \geq 0$.

Resulta então que:

$$x_3 = 720 - 2\,x_1 - 4\,x_2$$

isto é, a variável de folga introduzida é exatamente a diferença entre o 2º e o 1º membros da desigualdade em causa e representa a capacidade mensal não utilizada, em horas-máquina, do Departamento de Estampagem.

Procedendo de forma análoga para as restantes restrições funcionais, o problema original é substituído pelo seguinte problema equivalente, em que as variáveis desvio têm coeficientes nulos na função objetivo.

$$\begin{array}{lrl}
\text{Maximizar } z = & 6\,x_1 + 3\,x_2 + 0\,x_3 + 0\,x_4 + 0\,x_5 & \\
\text{sujeito a} & 2\,x_1 + 4\,x_2 + x_3 \qquad\qquad = 720 & \text{(Depto. Estamp)} \\
 & 4\,x_1 + 4\,x_2 + \qquad + x_4 \qquad = 880 & \text{(Depto. Montag)} \\
 & x_1 \qquad\qquad\qquad + x_5 = 160 & \text{(Mercado Mesas)} \\
 & x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4,\, x_5 \geq 0 &
\end{array} \qquad (4.4)$$

Diz-se então que se reduziu o problema original à forma canônica.

Mas geralmente, diz-se que um programa linear se encontra na forma canônica quando as restrições funcionais se apresentam sob a forma de igualdade e as variáveis são todas não negativas e existe uma base inicial óbvia. Assim, um problema na forma

$$\begin{array}{ll}
\min z & \\
\text{s.a} & Ax \leq b \\
 & x \geq 0
\end{array}$$

também está na forma padrão e é reduzido à forma canônica com a introdução de variáveis de folga.

4.5. Conceitos Fundamentais

Passaremos à introdução de conceitos fundamentais necessários à compreensão do método simplex.

Em programação linear o conceito de solução do problema assume significado diferenciado, conforme o caso, existindo diferentes tipos de soluções que se identificam por adjetivação apropriada.

Seja então um problema de PL na forma canônica:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar } z = & c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \\ \text{sujeito a} & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ & a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ & \dots \\ & a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \\ & x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \dots, n + m \end{array} \tag{4.5}$$

Designa-se por *solução* qualquer conjunto de valores assumidos pelas variáveis satisfazendo as restrições funcionais.

Se, além disso, a solução verificar as restrições de não negatividade, designa-se por *solução admissível* ou *programa* (solução viável).

Um conjunto de m variáveis, tais que, a matriz composta pelos coeficientes respectivos do sistema de equações lineares, A_{mxn}, seja não singular (isto é, cujo determinante seja não nulo) designa-se por *base* do sistema e as m variáveis são denominadas variáveis básicas; atribuindo às variáveis não básicas o valor zero, as variáveis básicas serão univocamente determinadas. Designa-se à solução assim obtida por *solução básica*.

Se, além disso, a solução básica verificar as restrições de não negatividade, isto é, se as variáveis básicas forem não negativas designa-se por *solução básica viável* (SBV) e, no caso, das variáveis básicas serem estritamente positivas, designa-se por SBV *não degenerada.*

Considerando o exemplo, os vetores

(60, -40, 760, 800, 100)' e (80, 60, 320, 320, 80)'

a que corresponde no gráfico da figura 4.3 os pontos J e L, respectivamente. Estes vetores constituem soluções do problema de PL dada, sendo que o primeiro é não viável, e o segundo é viável, mas não básico.

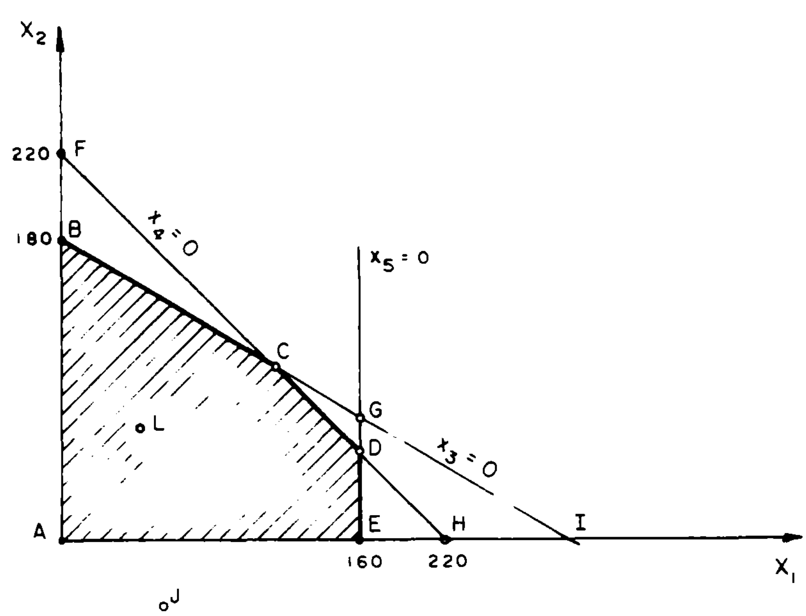

Figura 4.3 - Região Viável

Na resolução do problema de PL o interesse recai, evidentemente, no conjunto das soluções viáveis, não sendo difícil concluir que, graficamente, no caso do exemplo, esse conjunto é dado pelo interior e pela fronteira da região hachuriada na figura 4.3 e representa o conjunto dos possíveis programas de produção.

No mesmo exemplo, em que o número de variáveis não básicas é $n - m = 5 - 3 = 2$, fixamos $x_3 = 0$ e $x_5 = 0$, variáveis não básicas, tendo para as variáveis básicas, $x_1 = 160$, $x_2 = 100$ e $x_4 = -160$. Obtemos desta forma a seguinte solução básica não viável (SBNV)

$$(160,\ 100,\ 0,\ -160,\ 0)'$$

correspondendo na figura ao ponto G. Por outro lado, fixando-se $x_2 = 0$ e $x_5 = 0$, variáveis não básicas, vem para as variáveis básicas $x_1 = 160$, $x_3 = 100$ e $x_4 = 240$, resultando, portanto, a solução básica viável:

$$(160,\ 0,\ 100,\ 240,\ 0)'$$

a que corresponde na figura o ponto E.

Reportando à mesma figura (4.3), verifica-se então que os pontos A, B, C, D e E correspondem às soluções básicas viáveis do exemplo em análise, enquanto que os pontos F, G, H e I se encontram associados à soluções básicas não viáveis.

Finalmente, entende-se por solução ótima uma solução admissível que maximiza a função objetivo. No exemplo $z^* = 1140$, valor ótimo, corresponde ao ponto D = (160, 60, 160, 0, 0)'.

4.6. Propriedades Fundamentais

TEOREMA A

O conjunto das soluções admissíveis K, de um problema de PL é um conjunto convexo fechado. (vide figura 4.1).

TEOREMA B

Uma função linear sobre um poliedro convexo, K, atinge o ótimo em um ponto extremo de K (figura 4.4). No caso de atingir o ótimo em mais de um ponto extremo, toda combinação linear convexa destes pontos, corresponde, ainda, a uma solução ótima (múltiplas soluções). Na figura 4.5 esta situação é mostrada, considerando o exemplo dado, com modificação de sua função objetivo para $z = 5\ x_1 + 5\ x_2$. Esta ocorrência se dá quando o custo relativo à base na iteração do problema, referente a uma variável não básica é nulo. (Reporte-se ao item 3.3.1).

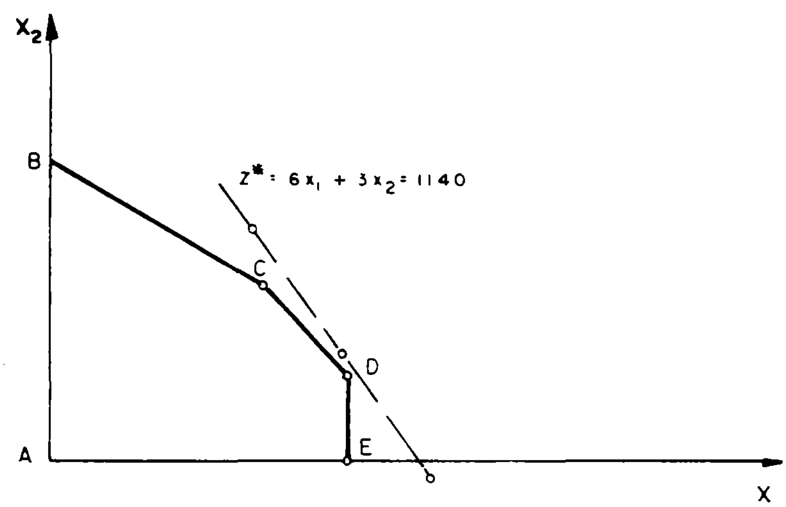

Figura 4.4 - Ilustração da Parte 1 do teorema B.

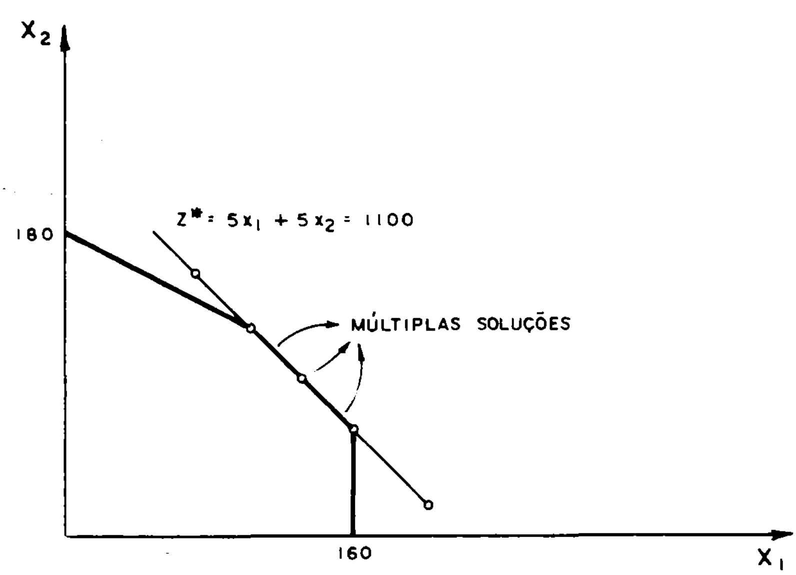

Figura 4.5 - Ilustração da segunda parte do teorema B.

É fácil de ver graficamente que a FO atinge o seu máximo em qualquer ponto do segmento CD, que constitui o conjunto de todas as combinações lineares convexas dos pontos C e D.

TEOREMA C

Um ponto $X \in K$ é ponto extremo se e só se constituir uma solução básica viável do problema de PL.

COROLÁRIO

Associados a cada ponto extremo de K existem m vetores lineares independentes entre os n vetores A^1, A^2, ... A^n.

No exemplo, n = 5 e m = 3, pelo que existem no máximo $\binom{5}{3} = 10$ sistemas de três vetores linearmente independentes; neste caso, facilmente verifica-se que os sistemas nestas condições são nove - o problema tem nove soluções básicas, correspondendo aos pontos A, B, C, D, E, F, G, H, I - das quais apenas cinco correspondem a pontos extremos pertencentes a K (os pontos A, B, C, D, E) - o problema tem cinco soluções básicas viáveis. Os pontos F, G, H e I correspondem a solução básicas, porém não viáveis.

Todos estes resultados podem ser verificados mais detalhadamente no quadro abaixo, que deve ser lido observando a figura 4.3.

TABELA 4.1 - Soluções básicas do exemplo.

VARIÁVEIS NÃO BÁSICAS	BASE	SOLUÇÃO BÁSICA	NATUREZA DA SOLUÇÃO	PONTO EM $\mathbb{R}^2$
$x_1=0$, $x_2=0$	A_3,A_4,A_5	(0,0,720,880,160)	Admissível	A(0,0)
$x_1=0$, $x_3=0$	A_2,A_4,A_5	(0,180,0,160,160)	Admissível	B(0,180)
$x_1=0$, $x_4=0$	A_2,A_3,A_5	(0,220,-160,0,160)	Não Admissível	F(0,220)
$x_1=0$, $x_5=0$	A_2,A_3,A_4	Não constituem base pois são l.d.		
$x_2=0$, $x_3=0$	A_1,A_4,A_5	(360,0,-0,-560, -200)	Não Admissível	I(360,0)
$x_2=0$, $x_4=0$	A_1,A_3,A_5	(220,0,280,0,-60)	Não Admissível	H(220,0)
$x_2=0$, $x_5=0$	A_1,A_3,A_4	(160,0,400,240,0)	Admissível	E(160,0)
$x_3=0$, $x_4=0$	A_1,A_2,A_5	(80,140,0,0,80)	Admissível	C(80,140)
$x_3=0$, $x_5=0$	A_1,A_2,A_4	(160,100,0,-160,0)	Não Admissível	G(160,100)
$x_4=0$, $x_5=0$	A_1,A_2,A_4	(160,60,160,0,0)	Admissível	D(160,60)

Do exposto nesta seção, pode-se então concluir:

1. K é convexo fechado;
2. A cada ponto extremo de K está associada uma SBV e, consequentemente, corresponde-lhe um sistema de m vetores linearmente independentes entre os n dados; correspondendo à matriz da Base na iteração do Simplex (ou dicionário);
3. O número de pontos extremos de K é finito;
4. No caso de K ser um poliedro convexo, existe pelo menos um ponto extremo de K que otimiza a FO.

4.7. Interpretação Econômica de Mudança de Base

Seja de novo o sistema de restrições funcionais sob forma de igualdades:

$$\begin{aligned} 2\,x_1 + 4\,x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 720 \\ 4\,x_1 + 4\,x_2 + \qquad + x_4 \qquad &= 880 \\ x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad + x_5 &= 160 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Trata-se de um sistema de três equações a cinco variáveis, logo, indeterminado de grau dois. Uma solução básica deste sistema é obtida atribuindo-se valor nulo a duas de suas variáveis (veja figura 4.1).

Uma solução básica admissível evidente é a que resulta de se atribuir a x_1 e x_2 o valor nulo; tem-se, neste caso, $x_3 = 720$, $x_4 = 880$ e $x_5 = 160$.

Esta solução consiste em nada produzir de ambos os bens, $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$, resultando daí que as capacidades não utilizadas dos dois departamentos são iguais às disponibilidades, $x_3 = 720$ e $x_4 = 880$, e o potencial de mercado totalmente por aproveitar, $x_5 = 160$.

Explicitem-se as variáveis básicas x_3, x_4 e x_5 em termos das não básicas, x_1 e x_2:

$$x_3 = 720 - 2\,x_1 - 4\,x_2 \tag{4.7}$$

$$x_4 = 880 - 4\,x_1 - 4\,x_2 \tag{4.8}$$

$$x_5 = 160 - x_1 \tag{4.9}$$

em que a solução anterior pode ser obtida fazendo $x_1 = x_2 = 0$.

Analisemos a produção de mesas, x_1. Por cada mesa produzida:

- são utilizadas 2 H-M do Departamento de Estampagem;
- são utilizadas 4 H-M do Departamento de Montagem e Acabamento;
- é satisfeita 1 unidade do potencial de mercado em mesas.

Continuando nula a produção de estantes, a capacidade não utilizada no Departamento de Estampagem permite uma produção máxima de 720/2 = 360 mesas; a capacidade não utilizada do Departamento de Montagem e Acabamento permite uma produção máxima de 860/4 = 220 mesas; e o potencial de mercado permite uma produção máxima de 160/1 = 160 mesas. O potencial de mercado é a mais restritiva das limitações impostas ao problema.

Conclui-se então que a produção máxima de mesas é de 160, isto é, o valor correspondente ao menor dos quocientes referidos acima, tendo-se esgotado deste modo o potencial de mercado de mesas, ou seja, $x_5 = 0$.

Substituindo na matriz anterior x_1 por 160 e x_5 por 0, obtém-se o novo plano de produção mensal:

$$x_1 = 160,\ x_2 = 0,\ x_3 = 400,\ x_4 = 240,\ x_5 = 0.$$

Este plano fixa o nível de produção de mesas para 160 ($x_1 = 160$), continuando a não haver produção de estantes ($x_2 = 0$), ficando por utilizar 400 H-M do Departamento de Estampagem ($x_3 = 400$), 240 H-H do Departamento de Montagem e Acabamento ($x_4 = 240$) e saturando-se o mercado de mesas ($x_5 = 0$).

Explicitem-se as novas variáveis básicas em termos das não básicas. Dado que a variável x_1 substitui a variável x_5 na base, de (4.9) tem-se $x_1 = 160 - x_5$ e por substituição de (4.7) e (4.8), resulta:

$$\begin{aligned} x_3 &= 400 - 4\,x_2 + 2\,x_5 \\ x_4 &= 240 - 4\,x_2 + 4\,x_5 \\ x_1 &= 160 \qquad\quad - x_5 \end{aligned} \tag{4.10}$$

em que a solução anterior pode ser obtida fazendo-se $x_2 = x_5 = 0$.

Como facilmente se verifica, estes resultados são equivalentes aos obtidos pela abordagem vetorial.

Este tipo de procedimento consistiu afinal na passagem do sistema de equações lineares inicial a outro equivalente através de operações elementares. Estas operações traduzem-se na condensação (ou pivoteamento) da coluna correspondente à variável x_1 tomando como elemento pivot, o elemento correspondente à folga associada à restrição de mercado, a utilização do método de Gauss-Jordan, já conhecido da Teoria de Sistemas de Equações Lineares, sistematiza as sucessivas mudanças de SBV, requeridas para a resolução do problema de PL, pelo método simplex.

Para efeito, disponham-se os dados do exemplo em análise, na forma tabular:

	b	A^1	A^2	A^3	A^4	A^5
x_3	720	2	4	1	0	0
x_4	880	4	4	0	1	0
x_5	160	1	0	0	0	1

(4.11)

Dada a existência de uma submatriz identidade constituída pelos vetores de base $B = (A^3, A^4, A^5)$, a solução básica admissível que se obtém fazendo $x_1 = x_2 = 0$ é dada por leitura direta da coluna b.

$$x_0 = (0, 0, 720, 880, 160) \text{ associada ao ponto A } (0, 0).$$

Escolhido o vetor a entrar na base, neste caso, A^1 (produção de mesas), determina-se facilmente o valor para Θ que garante a viabilidade da nova solução. Determina-se, assim, o vetor a sair da base para que a nova solução viável, seja básica. Desta forma, na coluna relativa ao vetor A^1, considerem-se os elementos positivos e na coluna relativa ao vetor b tomam-se os elementos correspondentes; proceda-se às divisões respectivas destes por aqueles e toma-se o menor dos resultados. Este dá-nos o valor de θ a cada linha referente às restrições (cociente entre componentes das colunas b e A^1) o menor cociente θ_0 indica qual o vetor a sair da base - neste caso A^5.

	b	A^1	A^2	A^3	A^4	A^5	
x_3	720	2	4	1	0	0	$\theta_3 = 720/2 = 360$
x_4	880	4	4	0	1	0	$\theta_4 = 880/4 = 220$
x_5	160	1	0	0	0	1	$\theta_5 = 160/1 = 160 \Rightarrow \theta_0$

No cruzamento da coluna do vetor que entra na base com a linha do vetor que sai situa-se o elemento redutor ou "pivot" para o método de eliminação de Gauss-Jordan.

Aplicando este método, por pivoteamento, obtém-se:

	b	A^1	A^2	A^3	A^4	A^5
x_3	400	0	4	1	0	-2
x_4	240	0	4	0	1	-4
x_1	160	1	0	0	0	1

(4.12)

A nova base é formada agora pelos vetores A^3, A^4 e A^1 e a leitura de nova solução básica admissível é feita igualmente na primeira coluna. Este tableau (4.12) corresponde ao dicionário (4.10), onde temos o vetor solução dado por:

$X = (160, 0, 400, 240, 0)$ associada ao ponto extremo $E\ (160,0)$.

Deve-se salientar ainda que este procedimento explicita imediatamente as componentes dos cinco vetores em termos da nova base.

A fim de ilustrar que o único valor de θ que garante a admissibilidade da nova solução básica $\theta = 160$, ensaie-se $\theta = 220$, o que corresponde a tomar para redutor o elemento da coluna A^1 e da 2a. linha no quadro (4.11). Obtemos:

	$\underset{\sim}{b}$	A^1	A^2	A^3	A^4	A^5
A_3	280	0	2	1	-1/2	0
A_1	220	1	1	0	1/4	0
A_5	-60	0	-1	0	-1/4	1

(4.13)

Trata-se de uma solução básica cuja leitura, no que diz respeito às variáveis básicas, é feita igualmente na coluna $\underset{\sim}{b}$, só que por ser $x_5 = -60$ é não admissível (SBNV).

Em termos econômicos, a escolha de $\theta = 220$ significa que se pretendeu produzir mensalmente 220 mesas, esgotando-se a capacidade do Departamento de Montagem e Acabamento ($x_4 = 0$), reduzindo-se a capacidade não utilizada do Departamento de Estampagem ($x_3 = 280$) e ultrapassando-se desta forma o potencial de mercado em 60 mesas ($x_5 = -60$). Como a Direção de Marketing aconselha que a produção mensal de mesas não ultrapasse as 160 unidades, o plano de produção ensaiado não é aceitável (não viável).

De igual forma, tomando-se para redutor o elemento da coluna A^1 e 1a. linha, obter-se-ia:

	b	A^1	A^2	A^3	A^4	A^5
A_1	360	1	2	1/2	0	0
A_4	-560	0	-4	-2	1	0
A_5	-200	0	-2	-1/2	0	1

(4.14)

Trata-se, como é evidente, de uma solução básica igualmente não admissível. Do ponto de vista econômico a possibilidade de uma produção mensal de 360 mesas, que esgota a capacidade do Departamento de Estampagem ($x_3 = 0$), é rejeitada por se ter ultrapassado em 560 H-H a disponibilidade do Departamento de Montagem e Acabamento ($x_4 = -560$) e o potencial de mercado em 200 mesas ($x_3 = -200$).

Por outro lado, a escolha de θ inferior a θ_0 não viola a admissibilidade da nova solução, mas conduz a uma solução não básica (SNBV). Isto significa que a produção mensal é inferior a 160 mesas.

$$(0 \leq x_1 \leq 160)$$

e a não produção de estantes ($x_2 = 0$) não esgota a capacidade de nenhum dos Departamentos ($x_3 > 0$ e $x_4 > 0$) nem o potencial de mercado ($x_5 > 0$).

Estes resultados confirmam que, com base no tableau 4.11, o único valor de θ que garante que a nova solução é simultaneamente básica e admissível é $\theta_0 = 160$.

$$\theta_0 = \min\ (160,\ 220,\ 360) = 160.$$

Para finalizar, ilustram-se na figura 4.6 as situações descritas anteriormente.

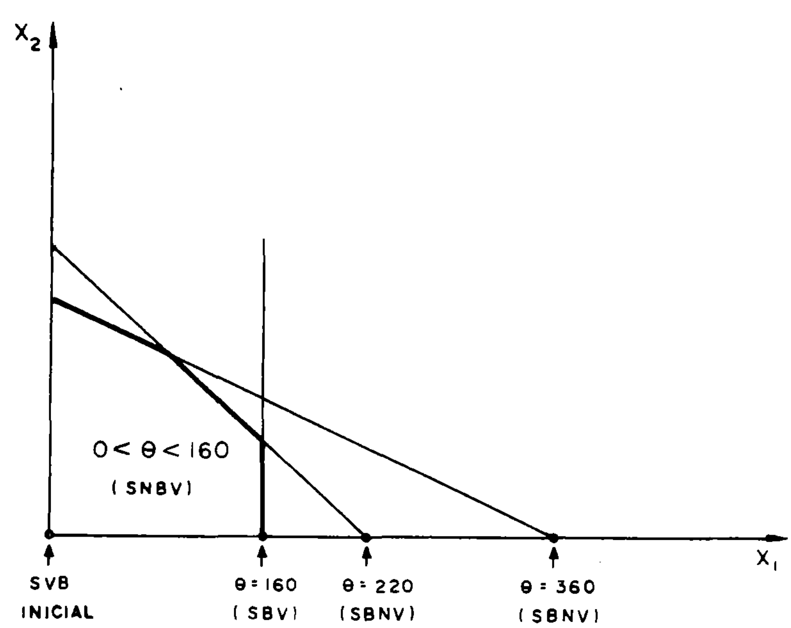

Figura 4.6 - Mudança de ponto extremo.

4.8. Representação Tabular, Operacionalização (Teste de Viabilidade e Teste de Otimilidade) e Solução Ótima

Seja o problema do exemplo, já numa forma padrão.

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{Maximizar} & z = 6\,x_1 + 3\,x_2 & & \\
\text{sujeito a} & 2\,x_1 + 4\,x_2 + x_3 & = & 720 \\
 & 4\,x_1 + 4\,x_2 \qquad + x_4 & = & 880 \\
 & x_1 \qquad\qquad\qquad + x_5 & = & 160 \\
 & x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, 5 & &
\end{array}
$$

Tem-se, assim:

$$
b = \begin{bmatrix} 720 \\ 880 \\ 160 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A^1\ A^2\ A^3\ A^4\ A^5
$$

sendo a solução inicial $\tilde{x} = (0,\ 0,\ 720,\ 880,\ 160)$, correspondendo à base $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A^3\ A^4\ A^5$, constituída pelos vetores coluna relativos às variáveis de folga x_3, x_4, x_5, introduzidas para colocar o problema na forma canônica.

Lembrando que os coeficientes das variáveis na função objetivo são dados $\hat{c}_j = c_N - c_B\, B^{-1}\, N$, onde

C_N = coeficientes na f objetivo das variáveis não básicas;

B^{-1} = inversa de B;

N = matriz relativa às variáveis não básicas.

Temos no nosso exemplo:

$C_N = (6,3)$ $\qquad\qquad\qquad$ $C_B = (0,\ 0,\ 0)$

$B^{-1} = I^{-1} = I$

$$N = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow \\ N^1 \end{matrix} \begin{matrix} \uparrow \\ N^2 \end{matrix} \end{array} = \begin{bmatrix} A^1 & A^2 \end{bmatrix}$$

Podemos calcular cada $z_j = C_B\ B^{-1}\ N^j$, que *neste caso* será nulo para todo j, ou seja,

$$z_j = (0\ 0\ 0)\ I\ A^j = 0 \qquad \forall_j = \overline{1,5}$$

e o valor da F.O. será $z = c_B\ B^{-1}b + (c_N - z_N)\ x_N$ como nesta iteração $c_B = 0$ e $x_N = 0$ temos $z = 0$.

Usaremos a seguinte representação de uma iteração do Simplex:

			VARIÁVEIS NÃO BÁSICAS				VARIÁVEIS BÁSICAS		
A^j			A^1	A^2	...	A^n	A^{n+1}	...	A^{n+m}
c_j			c_1	c_2	...	c_n	c_{n+1}	...	c_{n+m}
c_B	SBV	A^0	x_1	x_2	...	x_n	x_{n+1}	...	x_{n+m}
$\underset{\sim}{c}_B$	$\underset{\sim}{x}_B$	$B^{-1}.b$		y				I	
	z_j	$\underset{\sim}{c}_B B^{-1} \underset{\sim}{b}$	z_1	z_2	...	z_n	z_{n+1}	...	z_{n+m}
$c_j - z_j$			$c_1 - z_1$	$c_2 - z_2$	...	$c_n - z_n$	$c_{n+1} - z_{n+1}$	...	$c_{n+m} - z_{n+m}$

(4.15)

que contém todas as informações lidas num dicionário. Os elementos da matriz y, são dados por $\underset{\sim}{y}^j = B^{-1} A^j$; e $z_j = c_B B^{-1} A^j = c_B \underset{\sim}{y}^j$ para todo j = 1 ... n. Um vetor coluna relativo à base, será o vetor unitário

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{ia. linha}$$

e o custo relativo $z_i - c_i$ será nulo, quando i pertencer a Base. No nosso exemplo, o tableau nesta forma será:

A^j			A^1	A^2	A^3	A^4	A^5	
c_j			6	3	0	0	0	
c_B	SBV	A^0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	720	2	4	1	0	0	
0	x_4	880	4	4	0	1	0	
0	x_5	160	1	0	0	0	1	⟶
	z_j	0	0	0	0	0	0	custo de oportunidade
	$c_j - z_j$		6	3	0	0	0	custo relativo
			↑					

(4.16)

As informações lida no tableau são as seguintes:

(i) na 1a. linha, os coeficientes das variáveis na função objetivo (originais);

(ii) nas colunas A^j, a representação das variáveis $x_1, \ldots, x_{n+m}$, em relação à base B, ou seja, os coeficientes das variáveis $x_1, \ldots, x_{n+m}$, no sistema de equações do problema nesta iteração;

(iii) na coluna A^0, os valores assumidos pelas variáveis básicas B;

(iv) na coluna indicada por SBV, os vetores que constituem a base B;

(v) na linha z_j, o valor da função objetivo, e os valores de z_j (custo de oportunidade) para as variáveis do problema relativos à base B;

(vi) na última linha, o custo relativo $\hat{c}_j$, para todas as variáveis do problema, relativos à base B.

É evidente que não se está em presença da solução ótima, uma vez que existem $c_j - z_j$ positivos. O maior é $c_1 - z_1 = 6$, pelo que A^1 é o vetor selecionado para entrar na base. Assinala-se com o símbolo $\uparrow$ a coluna respectiva. A escolha do vetor a sair da base é feita de acordo com o critério que garante a passagem desta SBV a outra SBV (teste de viabilidade): todas as componentes do vetor A^1 são positivas, $a_{11} = 2$, $a_{12} = 4$ e $a_{13} = 1$, tendo-se:

$$\theta_0 = \min\left(\frac{720}{2}, \frac{880}{4}, \frac{160}{1}\right) = 160,$$

isto é, o vetor a ser substituído na base é A^5. Assinala-se, com o símbolo $\longrightarrow$, a linha respectiva.

Assim, teremos uma nova base onde A^5 substitui A^1. O elemento pivô para mudança da base encontra-se no cruzamento da linha e da coluna assinalados, relativos à variáveis x_5 que sai e x_1 que entra na base nova.

Procede-se agora a iteração respectiva, aplicando o método de eliminação de Gauss-Jordan. Como A^1 substitui A^5 na base, obtendo-se nova forma preparada viável e, consequentemente, nova SBV que será igualmente sujeita ao teste de otimilidade ($\hat{c}_j \leq 0$, para qualquer j não básico).

A linha do elemento redutor (linha 3 da matriz do sistema 4.16) não sofre alteração, uma vez que este é o próprio elemento identidade,

$$\text{nova linha 3} = \text{anterior linha 3} = (160 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1).$$

A condensação da coluna do elemento redutor, (transformação no vetor unitário) implica as seguintes alterações nas restantes linha na matriz do sistema (4.16):

nova linha 1 = anterior linha 1 - 2 x nova linha 3 =
= (720 2 4 1 0 0) - (320 2 0 0 0 2) =
= (400 0 4 1 0 -2)
↑
zerou

e

nova linha 2 = anterior linha 2 - 4 x nova linha 3 =
= (880 4 4 0 1 0) - (640 4 0 0 0 4) =
= (240 0 4 0 1 -4).
↑
zerou

O quadro seguinte será, então:

	A^j	A^0	A^1	A^2	A^3	A^4	A^5	
	c_j		6	3	0	0	0	
c_B	SBV		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	A_3	400	0	4	1	0	−2	
0	A_4	240	0	$\boxed{4}$	0	1	−4	⟶
6	A_1	160	1	0	0	0	1	
	z_j	960	6	0	0	0	0	
	$c_j - z_j$		0	3	0	0	0	
				↑				

(4.17)

em que A_1 substituiu A_5 na base e os z_j e $c_j - z_j$ foram calculados de mesma forma que o primeiro quadro.

Verifica-se que a SBV obtida ainda não é ótima pois $c_2 - z_2 = 3 \geq 0$. Trata-se do único $c_j - z_j$ positivo, pelo que A^2 é o escolhido para entrar na base. Como apenas as duas primeiras componentes de A^2 são positivas, o vetor a sair da base é selecionado de acordo com

$$\theta_0 = \min\left(\frac{400}{4}, \frac{240}{4}\right) = 60,$$

a escolha recaindo sobre A^4. Assim, temos uma nova base onde x_2 substitui x_4, sendo o elemento redutor $a_{42} = 4$, que é assinalado.

Procedendo à iteração respectiva obtém-se o novo quadro (4.18) do simplex associado à nova SBV. A nova linha 2 é obtida a partir da anterior dividindo cada elemento pelo elemento redutor, de modo a obter o elemento identidade na coluna do vetor A^2.

nova linha 2 = 1/4 x anterior linha 2 =
= 1/4 x (240 0 4 0 1 -4) =
= (60 0 1 0 1/4 -1).

As restantes linhas são alteradas em resultado da condensação da coluna A^2, assim:

nova linha 1 = anterior linha 1 - 4 x nova linha 2 =
= (400 0 4 1 0 -2) - (240 0 4 0 1 -4) =
= (160 0 0 1 -1 2).

Como o elemento da linha 3 e coluna A^2 no quadro (4.17) do simplex já é nulo, a operação de condensação não altera a linha 3 do quadro (4.18).

O terceiro quadro vem então:

	A^j	A^0	A^1	A^2	A^3	A^4	A^5
	c_j		6	3	0	0	0
c_B	SBV		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	A_3	160	0	0	1	-1	2
3	A_2	60	0	1	0	1/4	-1
6	A_1	160	1	0	0	0	1
	z_j	1140	6	3	0	3/4	3
	$c_j - z_j$		0	0	0	-3/4	-3

(4.18)

Verifica-se que todos os $c_j - z_j$ são não positivos; atingiu-se pois a solução ótima com a base $B = (A^3, A^2, A^1)$, tendo-se

$$X_B^* = (160, 60, 160, 0, 0) \text{ e } z^* = 1140 \text{ , ou seja, } \begin{cases} z^* = 1140 \\ x_1^* = 160 \\ x_2^* = 60 \\ x_3^* = 160 \\ x_4^* = 0 \\ x_5^* = 0 \\ x_6^* = 0 \end{cases}$$

4.9. Interpretação no Espaço das Soluções

As sucessivas iterações do simplex podem ser interpretadas como passagens de ponto extremo em ponto extremo adjacentes do conjunto k das soluções viáveis. Este procedimento tem início com a curva da nível da FO passando por um ponto extremo de K e em cada iteração desloca-se paralelamente a si própria (no sentido da sua melhoria) até atingir um ponto extremo adjacente.

Ilustra-se, seguidamente, esta interpretação como feito na secção 4.2, em que as sucessivas iterações do simplex podem ser visualizadas através da representação gráfica no plano x_1 versus x_2, do conjunto das soluções viáveis e da função objetivo:

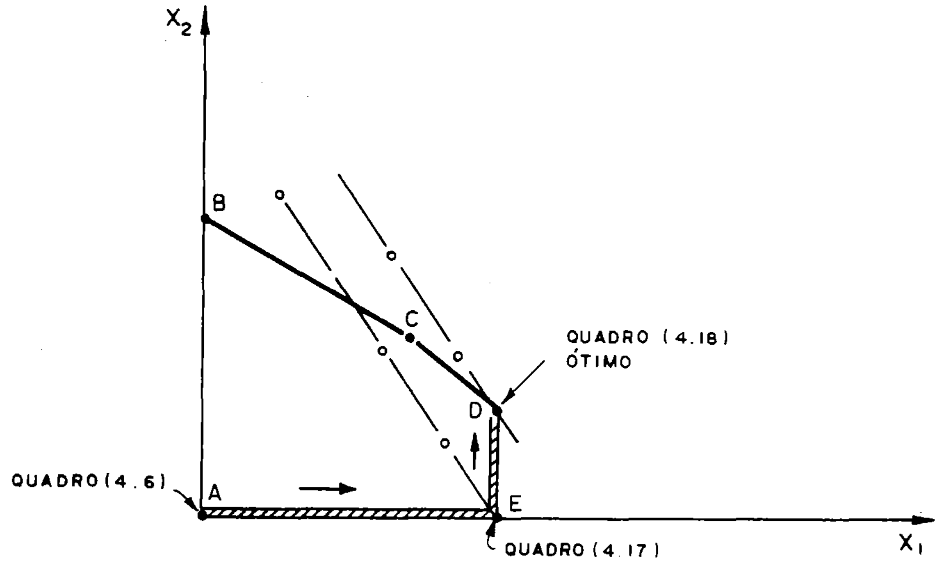

Figura 4.7 - Representação gráfica do percurso do algoritmo simplex, através dos pontos extremos de K.

Os vários pontos extremos de K (soluções básicas viáveis) porque passou a curva de nível da FO, e que identificam o percurso orientado convergente para a solução ótima foram:

1º (inicial) - A (0, 0), , associado a $X_B = (0, 0, 720, 880, 160)$, com $z = 0$

2º (interm.) - E (160, 0), associado a $X_B = (160, 0, 400, 240, 0)$, com $z = 960$

3º (ótimo) - D (160, 60), associado a $X_B^* = (160, 60, 0, 0)$, com $z^* = 1140$

verificando-se que o percurso do simplex foi feito através de pontos adjacentes e dispensou a análise exaustiva sobre os pontos extremos de K.

4.10. Interpretação Econômica na Busca do Ótimo

A interpretação que se segue reporta-se ao problema da utilização ótima de recursos escassos - problema central da Teoria da Produção de curto prazo. Isto é devido ao fato de tratar-se de uma das aplicações mais fecundas da programação linear e, por outro lado, porque se aplica a inúmeras situações concretas. Além disso, este tipo de problema apresenta a vantagem de permitir a utilização de uma terminologia de uso praticamente universal nos campos da Economia e Gestão das Empresas. A adaptação a outro tipo de problema não se reveste de grande dificuldade, desde que se domine a lógica do simplex e haja uma perfeita compreensão da natureza específica do problema.

Suponha-se então uma empresa podendo desenvolver um conjunto finito de atividades e dispondo para esse efeito de um número também finito de recursos. Matematicamente, os níveis daquelas atividades constituem valores para as variáveis de decisão do problema e as restrições iniciais descrevem as possibilidades tecnológicas da empresas e as limitações dos recursos. O objetivo é a maximização do resultado global num certo período de tempo, supondo que a empresa opera num *mercado de concorrência* e que, portanto, *não pode influenciar os preços dos fatores de produção e dos produtos a fabricar* (quais sejam, os parâmetros do problema).

O problema de PL, formulado em termos de atividades, consiste em:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar } z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n & \\ \text{sujeito a} \quad x_1 A^1 + x_2 A^2 + \dots + x_n A^n = \underset{\sim}{b} & \\ \qquad\qquad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n & \end{array}$$

em que $A^j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ representa a atividade j e x_j o respectivo nível de produção da variável x_j.

Como já se sabe, no caso de existir solução ótima, existe pelo menos um SBV ótima. Atendendo ao conceito de solução básica admissível, tal fato significa que o *programa ótimo nunca envolve a ativação de mais de m atividades de entre as n dadas* (em que m indica o número de restrições do problema). Trata-se de um resultado muito importante que, por exemplo, num programa de planejamento da produção, se traduz na possibilidade do programa ótimo não incluir a produção de todos os produtos.

Suponha-se, o que não implica perda de generalidade, a existência de um programa admissível envolvendo as m primeiras atividades, A^1, A^2, ..., A^m. Estas atividades são designadas por atividades *incluídas* (ativas) e as restantes, A^{m+1}, A^{m+2},..., A^n por atividades *excluídas do programa*.

Seja

$$x_B = (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots 0)$$

o referido programa; tem-se

$$x_1 A^1 + x_2 A^2 + \ldots + x_m A^m \leq \underset{\sim}{b}$$

e

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_m x_m .$$

Considerem-se as atividades excluídas, A^{m+1}, A^{m+2}, ..., A^n e avalie-se, em termos econômicos, as consequências da sua ativação ao nível unitário. Uma destas atividades não incluídas, digamos A^j pode ser expressa em termos das atividades incluídas, através de:

$$\hat{A}^j = a_{1j} A^1 + a_{2j} A^2 + \ldots + a_{mj} A^m$$

o que mostra que a ativação unitária da atividade excluída A^j obriga a variações dadas por a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj} nos níveis das atividades incluídas A^1, A^2, ..., A^m, respectivamente (os recursos deverão ser realocados). Estas componentes podem ser positivas, negativas ou nulas conforme a ativação de A^j signifique decréscimo, acréscimo ou nenhuma alteração no nível da atividade respectiva, incluída no programa, consequência da realocação dos recursos.

Assim a iteração (0) para (1) do nosso exemplo, incluímos a produção de mesa, cuja Base é representada por $B = \{x_3, x_4, x_1\}$. Assim $A^B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

cuja inversa é

$$(A^B)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A atividade excluída é relativa à restrição de potencial do mercado de mesas, definida pela variável x_5.

$$\text{A coluna } \hat{A}^5 = (A^B)^{-1} A^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\hat{a}_{35}$ = implica na realocação do recurso do Departamento de Estampagem, dada a inclusão da atividade de produção de mesa.

Assim também $\hat{a}_{45}$ em relação ao Departamento de Montagem e Acabamento.

Por terem valores negativos vejo que estes recursos foram necessários (consumidor), enquanto que $\hat{a}_{15} = 1$ representa que a inclusão da atividade produção de mesa, implica na atividade representando a folga do potencial de mercado de mesas. O nível desta atividade chega a zero $x_5 = 0$, plenamente satisfeito.

Reportando-se aos quadro (4.16) e (4.17) vemos que para a produção de uma unidade de mesa, foi usado 2 horas-máquina do Departamento de Estampagem e 4 horas-homem do Departamento de Montagem e Acabamento, sendo acrescido em um o potencial de mercado de mesas.

Podemos então, saber que para a produção de 160 mesas estarei consumindo, parte da capacidade produtiva dos Departamentos de Estampagem e Montagem e Acabamento, respectivamente nos valores de 2 x 160 = 320 e 4 x 160 = 640, enquanto que satisfaço ao mercado de mesas em 1 x 160 mesas. Assim, vejo que minha decisão de tornar ativa a produção de mesa ao nível de 160 unidades, faz com que os recursos produtivos sejam realocados, sendo agora usados 320 H-M e 640 H-H de cada departamento, respectivamente. Esta leitura é feita também pela solução básica $x_3 = 400$ e $x_4 = 240$, que mostra quanto resta destes recursos ociosos nos respectivos departamentos.

A componente $\hat{a}_{ij}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ pode, pois, ser interpretada como uma *taxa marginal de substituição* da atividade A^i (incluída) pela atividade A^j (excluída), e o vetor constituído por estas taxas $\hat{A}^j$, $(\hat{a}_{1j}, \hat{a}_{2j}, \ldots, \hat{a}_{mj})^t$, designa-se por *combinação equivalente à atividade excluída* A^j *em termos das atividades incluídas* (trata-se da representação do vetor A^j, em termos da nova Base (Base corrente), relativa às atividades incluídas no programa, ou seja, $\hat{A}^j = B^{-1} A^j$).

O rendimento conseguido através da combinação equivalente a $\hat{A}^j$, relativa às atividades incluídas, é obtido pela soma algébrica dos produtos das taxas marginais de substituição da atividade excluída, pelos respectivos resultados unitários das atividades incluídas, chamado *custo de oportunidade* z^j que é dado por $c_B B^{-1}A^j = c_B \hat{A}^j$

$$c_1 \hat{a}_{1j} + c_2 \hat{a}_{2j} + \ldots + c_m \hat{a}_{mj} = c_B \hat{A}^j = c_B B^{-1}A^j,$$

onde $\hat{A}^j$, significa a alocação dos recursos, considerando a exclusão da atividade j. Lembre-se que $c_B B^{-1}A^j = z_j$, calculado pelo simplex é componente de custo relativo $\hat{c}_j = c_j - z_j$.

Sendo então $z_j = c_B\hat{A}^j$, interpretamos seu significado econômico. Matematicamente ele é expresso como o produto entre o rendimento que se obtem pelas atividades ativas, pelo vetor que expressa a realocação dos recursos dada a exclusão da atividade j, em função das atividades incluídas. Exprime, desta forma, um valor associado à opção realizada pela inclusão de certas atividades que não a atividade j. Assim sendo, o valor de z_j, para cada uma das atividades excluídas, reflete o rendimento que se deixa de ter por não ativar j em lugar da ativação unitária daquelas incluídas. Em termos econômicos isto representa um *custo de oportunidade* associado a atividade j, relativo às atividades A^1, A^2, ..., A^n incluídas no programa de produção. Este custo de oportunidade associado à atividade j, será usado na análise de sua inclusão ou não, no programa de produção buscado, para solução do problema.

Está-se agora em condições de proceder à avaliação pretendida. Assim, pela ativação unitária de A^j (j = m + 1,..., n), x_j não básico, tem-se, por um lado, um rendimento direto igual a c_j e por outro, um custo de oportunidade z_j. Então, desde que $c_j - z_j > 0$, temos que o rendimento direto obtido com a ativação unitária da atividade excluída A^j é superior ao rendimento que se tem pela sua exclusão, relativo às atividades ativas. *Esta é a lógica embasadora subjacente à generalidade dos problemas de decisão econômica: comparação do que se ganha por tormar uma decisão, e o que se deixa de ganhar.* Desta forma, num problema de maximização, se $c_j - z_j > 0$ devemos buscar um novo programa, incluindo a atividade A^j que será melhor que o programa atual onde ela não está incluída.

De todas as atividades excluídas e que se encontrem nestas condições, faz-se opção, pelas razões já apontadas, por aquela a que corresponde ao valor máximo de $\hat{c}_j$. Assim:

$$\text{máx}\left\{(c_j - z_j) \mid c_j - z_j > 0\right\} = c_s - z_s$$ (critério de entrada no novo programa).

Sendo assim, revela-se mais lucrativo a ativação de x_s ao nível máximo, compatível com as restrições do problema. Busquemos este valor para x_s, através das condições de viabilidade (item 4.7).

$$\Theta_0 = \min \left\{ \frac{b_i}{a_{is}} \mid a_{is} > 0 \right\} = \frac{b_r}{a_{rs}}$$ (critério de saída do programa atual).

Assim, obtem-se o nível de ativação da atividade s no novo programa, ao mesmo tempo que se exclui uma das m atividades anteriormente ativas, qual seja a atividade r.

O processo prossegue através de sucessivas substituições de atividades por outras que se revelem mais lucrativas, atingindo-se o programa ótimo quando, para todas as atividades excluídas, se tenha $c_j - z_j \le 0$ (teste de otimalidade - problema de maximização).

Neste caso, as atividades incluídas no programa são tais que nenhuma atividade excluída é mais lucrativa do que a respectiva combinação equivalente, pelo que a introdução não faria aumentar o resultado global, podendo mesmo diminuí-lo, caso $c_j - z_j < 0$.

Em síntese:

1. Se a situação de uma empresa puder ser modelada de forma adequada através da programação linear, então a maximização do seu resultado envolve a ativação de um número de atividades que não ultrapasse o número de restrições com que se defronta;
2. Nenhuma atividade excluída do programa ótimo seria mais lucrativa do que a sua combinação equivalente, em termos das atividades incluídas naquele programa.

Voltando ao exemplo da fábrica de mobiliário de escritórios e complementando as considerações feitas nas secções (4.7) e (4.9).

No quadro (4.10) temos que x_1, x_3 e x_4 são variáveis que determinam um plano de produção. Assim temos 160 mesas sendo fabricadas, revertendo um rendimento total de \$960, segundo (4.17). Por este plano temos:

$$\hat{A}^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$ implicando que, pela ativação da

fabricação de estante tenderíamos a ter nova alocação dos recursos dos Departamentos de Fabricação (Esmaltagem e Montagem & Acabamento), não implicando em qualquer alteração no mercado de mesas.

Além disso por $c_2 - z_2 = 3 > 0$, temos a indicação que seria lucrativo a ativação da fabricação de estantes no plano de produção, enquanto que $c_5 - z_5 < 0$, indica a não conveniência de fazer positiva o valor relativo à variável $x_5 = 0$ (representando a satisfação plena no mercado de mesa). Este resultado é consistente com o fato representado por

$$\hat{A}^5 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$ que indica que caso ativássemos x_5,

teríamos recursos dos Departamentos de Fabricação que não estariam sendo utilizados, com respectivo decréscimo proporcional no nível de produção de mesas.

Assim sendo, propõe-se a inclusão no plano de produção da fabricação de estantes, passando-se do quadro (4.17) para o quadro (4.18).

A leitura do quadro (4.18) nos fornece as informações seguintes:

Variáveis Básicas $x_B > 0$

(i) nível de fabricação de mesas $x_1 = 160$

(ii) nível de fabricação de estantes $x_2 = 60$

(iii) capacidade disponível e não utilizada do departamento de estampagem $x_3 = 160$.

Variáveis não Básicas $x_N = 0$

(iv) capacidade disponível do departamento de montagem e acabamento completamente esgotada $x_4 = 0$.

(v) mercado de mesas plenamente satisfeito, $x_5 = 0$.

O valor negativo associado ao custo relativo $\hat{c}_j$ das variáveis não básicas, indica que a solução do problema é ótima, já que o problema é de maximização.

Porém, este quadro nos fornece, ainda, mais informações para análise do problema, de forma a que possamos responder questões como: Caso houvesse uma ampliação no mercado de mesas e tivessemos disponibilidade de mais H-H no Departamento de Montagem e Acabamento, como definir uma solução melhor, a partir deste problema já resolvido? Veremos o embasamento para este tipo de Análise com a Teoria de Dualidade e Análise de Sensibilidade.

4.11. Problemas

4.1) Seja uma empresa (FAVIDRO) que produz vidros de alta qualidade, incluindo janelas e portas de vidro. Ela tem três fábricas. Na fábrica 1 são feitas esquadrias e ferragens de alumínio; as esquadrias de madeira são feitas na fábrica 2 e a fábrica 3 é usada para produzir os vidros e montar os produtos.

Devido a queda da receita, a alta gerência decidiu reformular a linha de produtos, tirando alguns não lucrativos da linha de produção e liberando a capacidade de produção para um ou mais novos produtos potenciais, que apresentam uma demanda assegurada. Um dos produtos propostos (P1) é uma porta de vidro de 2,40 m de altura, com esquadria de alumínio. O outro produto (P2) é uma janela (1,20 m x 1,80 m) com duas folhas e esquadrias de madeira. O departamento de Marketing concluiu que a companhia poderá vender tantos destes dois produtos, quantos pudessem ser produzidos dentro da capacidade disponível. Entre tanto, como os produtos concorrem pelo uso

dos recursos disponíveis nas fábricas, deve-se definir qual combinação entre os dois produtos é mais lucrativa. Por isso a gerência encaminhou o problema ao Departamento de Pesquisa Operacional (De P.O.) para que analisassem a situação.
Após análise do problema, o De P.O. obteve os seguintes dados:

1) Percentagem da capacidade de produção em cada fábrica, disponível para produção de novos produtos;
2) Coeficientes tecnológicos intervenientes na produção de cada produto (taxa de necessidade de recursos por minuto, para produção de cada unidade dos produtos);
3) Lucro unitário de cada produto.

Estas informações são resumidas na tabela abaixo:

PRODUTO / FÁBRICA	TAXA DA CAPACIDADE NECESSÁRIA P/ A PRODUÇÃO UNITÁRIA		CAPACIDADE DISPONÍVEL
	P1	P2	
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
LUCRO UNITÁRIO($)	3	5	

Formule e resolva o problema. Faça interpretação econômica.

4.2) Resolva pelo algoritmo Simplex e faça análise do resultado obtido através do quadro final e interpretação geométrica.

a) minimizar $-x_1 - x_2$

s.a
$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad &\leq 2 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

b) minimizar $-x_1 - x_2$

s.a
$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad &\leq 2 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

c) minimizar $-x_1 - x_2$

s.a

$$\begin{aligned} x_1 \quad & \leq 2 \\ x_2 & \leq 2 \\ x_1 + 2x_2 & \leq 4 \\ x_1,\ x_2 & \geq 0 \end{aligned}$$

4.3) O quadro seguinte refere-se a um problema de maximização:

	c^j		c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
c_B	A^j SB V	$\underset{\sim}{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
c_4	x_4	1	-4	$\underline{c}$	0	1	0
c_3	x_3	4	$\underline{b}$	-1	1	0	0
c_5	x_5	$\underline{a}$	3	$\underline{d}$	0	0	1
z^j		10					
$c^j - z^j$			-2	$\underline{e}$			

Diga a que condições devem obedecer $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ e $\underline{e}$ para que sejam verdadeiras as seguintes afirmações:

a) A solução é ótima.

b) Existem soluções ótimas alternativas.

c) A solução é não limitada (solução tipo β).

d) A solução é degenerada.

e) A solução é não viável.

f) Admitindo que $\underline{a} \geq 0$ e que a solução não é ótima, indique qual variável que entra na base. Considerando $\underline{c}$ e $\underline{d}$ maiores que zero, para as várias hipóteses de mudança de base indique a variação que a F.O. poderá sofrer.

CAPÍTULO 5

OBTENÇÃO DE UMA SOLUÇÃO BÁSICA INICIAL FACTÍVEL

Muitos problemas de programação linear não apresentam uma base inicial para início da sua resolução. Apresentamos neste capítulo um método para abordar esta situação.

5.1. Método das Duas Fases - Definição de Variáveis Artificiais

O método de Duas Fases é um procedimento para resolução de problemas em PL, que não tem uma solução básica viável inicial óbvia.

Seja o PPL, por exemplo:

$$\begin{array}{ll} \max & z = -x_1 + 2\,x_2 \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & -x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1,\, x_2 \geq 0 \end{array} \tag{5.1}$$

Acrescentando variáveis de folga e excesso, obtemos o sistema equivalente

$$\begin{array}{ll} \max & z = -x_1 + 2\,x_2 \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ & -x_1 + x_2 - \quad - x_4 = 1 \\ & x_2 + x_5 = 3 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 5 \end{array} \tag{5.2}$$

que não apresenta uma solução básica viável inicial (SBVI) óbvia.

Assim sendo, introduzimos as variáveis artificiais x_6 e x_7 na primeira e segunda restrições, obtendo o seguinte sistema

$$\begin{array}{rrrrrrrl} x_1 & + x_2 & - x_3 & & & + x_6 & & = 2 \\ -x_1 & + x_2 & & - x_4 & & & + x_7 & = 1 \\ & x_2 & & & + x_5 & & & = 3 \end{array} \tag{5.3}$$

que será equivalente ao original, se e somente se, as variáveis artificiais forem nulas. A coluna da variável de folga x_5 representa o terceiro vetor para constituição da base inicial do problema artificial, que nos auxilia a determinar uma base inicial para resolução do problema original (5.1).

Construimos então o seguinte problema:

$$\begin{array}{lrrrrrrrl} \text{minimizar } \emptyset = & & & & & & x_6 & + x_7 & \\ \text{sujeito a} & x_1 & + x_2 & - x_3 & & & + x_6 & & = 2 \\ & -x_1 & + x_2 & & - x_4 & & & + x_7 & = 1 \\ & & x_2 & & & + x_5 & & & = 3 \\ & & & & & \multicolumn{4}{l}{x_i \geq 0 \;,\; i = 1, \ldots, 8} \end{array} \tag{5.4}$$

Este problema (5.4) chamado de artificial, só será equivalente ao problema original (5.1) quando o valor da função $\emptyset = x_6 + x_7$ se anular, o que implica necessariamente em $x_6 = x_7 = 0$.

Genericamente, o problema artificial só é equivalente ao original se as variáveis artificiais forem nulas.

$$\begin{array}{c} A_x = b \\ x \geq 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c} A_x + I_{xa} = b \\ x, x_a \geq 0 \end{array} \Longleftrightarrow x_a = 0$$

Este artifício consiste no MÉTODO DAS DUAS FASES para obtenção de uma solução básica viável de partida para o algoritmo do simplex resolver o problema original.

5.2. FASE I

É um procedimento para zerar as variáveis artificiais e obter uma SBVI para o problema original.

Na fase I o simplex resolve o problema artificial (5.4). Se o valor ótimo deste problema for $\emptyset = 0$ (isto é, $x_a = 0$), então a solução ótima correspondente é uma solução básica factível inicial do problema original (5.1).

Se isso ocorrer, tem início a FASE II com o uso da SBV gerada artificialmente para inicializar a resolução do problema orginal (5.1). Basta para isso mudar a função a otimizar para a original, e atualizar as linhas de z_j e do custo relativo $(c_j - z_j)$ sobre o quadro final obtido na FASE I, relativo a base proposta.

Ilustraremos este procedimento, através da resolução do problema

FASE I

$$
\begin{array}{llcl}
\text{minimizar } \emptyset = & & x_6 + x_7 & \\
\text{sujeito a} & x_1 + x_2 - x_3 & + x_6 & = 2 \\
& -x_1 + x_2 \quad - x_4 & + x_7 & = 1 \\
& x_2 \quad + x_5 & & = 3 \\
& & x_i \geq 0 \ , \ i = 1, \ldots, 6 &
\end{array}
$$

A base é óbvia é B = (6, 7, 5).

Em forma de quadro e aplicando o simplex, temos:

Quadro 5.5 - FASE I - Inicialização										
	c_j		0	0	0	0	0	1	1	
c_B	SBV	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	x_6	2	1	1	-1	0	0	1	0	$\theta = 2$
1	x_7	1	-1	1	0	-1	0	0	1	$\theta = 1 \longrightarrow$
0	x_5	3	0	1	0	0	1	0	0	$\theta = 3$
	z_j	3	0	2	-1	-1	0	1	1	
	$z_j - c_j$		0	2	-1	-1	0	0	0	
				↑						

Nova base $B = (x_6, x_2, x_5)$. Pivoteando sobre o elemento a_{72}, temos o novo quadro

Quadro 5.6 - FASE I										
	c_j		0	0	0	0	0	1	1	
c_B	SBV	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	x_6	1	2	0	-1	1	0	1	-1	$\theta = 1/2 \rightarrow$
0	x_2	1	-1	1	0	-1	0	0	1	
0	x_5	2	1	0	0	1	1	0	-1	$\theta = 2$
	z_j	1	2	0	-1	1	0	1	-1	
	$z_j - c_j$		2	0	-1	1	0	0	-2	
			↑							

Nova base $B = (1, 2, 5)$. Pivoteamento sobre o elemento a_{61}, temos o novo quadro:

Quadro 5.7 - FASE I									
	c_j		0	0	0	0	0	1	1
c_B	SBV	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_1	1/2	1	0	-1/2	1/2	0	1/2	-1/2
0	x_2	3/2	0	1	-1/2	-1/2	0	1/2	1/2
0	x_5	3/2	0	0	1/2	1/2	1	-1/2	-1/2
	z_j	0	0	0	0	0	0	0	0
	$z_j - c_j$		0	0	0	0	0	-1	-1

Chegamos assim, ao fim da FASE I com $\varnothing = 0$ e $x_6 = x_7 = 0$.

5.3. FASE II

Partimos, então, para a FASE II, usando o quadro (5.7) final da FASE I, que nos dá uma solução básica viável para o problema original. As colunas A_6 e A_7 não nos servirão mais, pelo que a excluímos do quadro para resolução na FASE II. Atualizamos a função objetivo. A base é composta pelos vetores A_1, A_2 e A_5. As variáveis x_3 e x_4 são não básicas.

Quadro 5.8 - Adequação do Quadro (5.7) para resolução do problema (5.1)								
	c_j		-1	2	0	0	0	
c_B	SBV	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-1	x_1	1/2	1	0	-1/2	1/2	0	$\theta = 1 \longrightarrow$
2	x_2	3/2	0	1	-1/2	-1/2	0	
0	x_5	3/2	0	0	1/2	1/2	1	$\theta = 3$
	z_j	5/2	-1	2	-1/2	-3/2	0	
	$c_j - z_j$		0	0	1/2	3/2	0	
						$\uparrow$		

O quadro acima é a forma preparada para resolução do problema original em relação a base B = (1, 2, 5), gerada na FASE I. Escolhendo a variável x_4 para entrar na nova base, definimos a variável x_1 para deixar a base. A nova base será B = (4, 2, 5). Pivoteamento sobre o elemento a_{14}, obtemos o quadro (5.9):

Quadro 5.9 - FASE II							
	c_j		-1	2	0	0	0
c_B	SBV	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	1	2	0	-1	1	0
2	x_2	2	1	1	-1	0	0
0	x_5	1	-1	0	1	0	1
	z_j	4	2	2	-2	0	0
	$c_j - z_j$		-3	0	2	0	0

$\longrightarrow \Theta = 1$

$\uparrow$

Aplicando o teste de otimilidade, verificamos que ainda não atingimos a solução ótima. Substituindo a variável x_5 pela variável x_3, e pivoteamento sobre o elemento redutor, obtemos o quadro (5.10):

Quadro 5.10 - FASE II							
	c_j		-1	2	0	0	0
c_B	SBV	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	2	1	0	0	1	1
2	x_2	3	0	1	0	0	1
0	x_3	1	-1	0	1	0	1
	z_j	4	0	2	0	0	2
	$c_j - z_j$		-1	0	0	0	-2

Obtemos assim, o ótimo para o problema original

$z^* = 6$ solução básica $x_2^* = 3$ $x_1^* = 0$
$x_4^* = 2$ $x_5^* = 0$
$x_3^* = 1$

5.4. Interpretação Geométrica

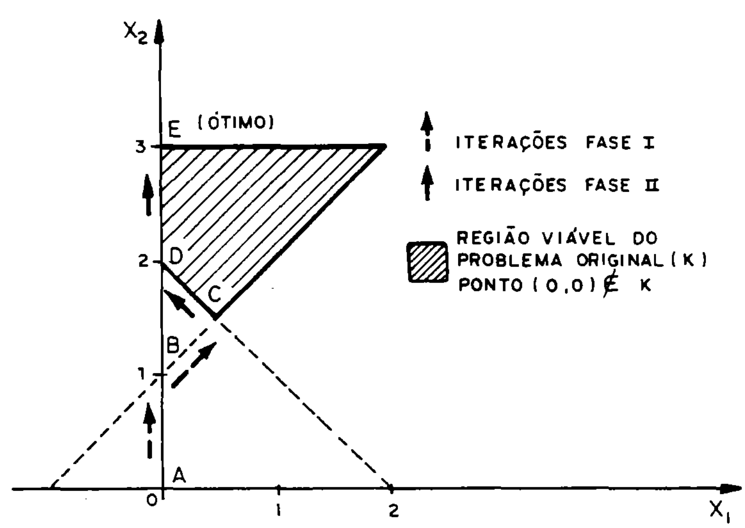

Figura 5.1 - Percurso para resolução do problema (5.1) pelo método das Duas Fases.

A FASE I percorre os pontos A, (Quadro 5.5), B (Quadro 5.6), C (Quadro 5.7), gerando a solução básica viável inicial definida pelo ponto C e representada pelo Quadro (5.8).

A partir deste ponto a FASE II, percorre os pontos extremos do conjunto viável do problema original, obtendo o ponto ótimo E (Quadro 5.10). passando pelo ponto D (Quadro 5.9).

5.5. Observações

1a) Se ao fim da FASE I há variáveis artificiais na BASE a nível 0, ($x_a = 0$, mas x_a pertence à Base) e $\varnothing = 0$, temos:

i) Podemos substituí-la por variável legítima do problema se, na linha referente a esta variável artificial existir elemento diferente de zero, correspondendo a uma variável legítima. Faz-se pivoteamento em torno deste elemento. Estamos diante de uma solução degenerada.

ii) Podemos eliminar toda a linha do quadro se todos os seus elementos correspondentes às variáveis legítimas forem nulos. Tínhamos, neste caso, uma restrição supérflua, agora detectada e abandonada. Estávamos trabalhando com um sistema de equações redundantes. Tirando a linha, relativa a esta restrição, partimos para solução do problema original, como já visto.

2a) Se chegamos ao final da FASE I, com valor ótimo de $\varnothing > 0$, e consequentemente sem zerar as variáveis artificiais, o problema original não tem solução factível. Estávamos trabalhando com um sistema de equações inconsistentes.

3a) A função objetivo original pode ser acrescentada ao quadro da FASE I, sofrendo todos os pivoteamentos. Automatiza o início da FASE II, posto que o quadro estará preparado para o seu início, no final da FASE I. Para início da fase II, basta desprezar as cólunas das variáveis artificiais e a linha da F.O. artificial.

4a) Existem outros métodos para encontrar uma base inicial factível:

Método do M-Grande

Método da variável artificial única.

5.6. Problemas

5.1) Resolver e interpretar geometricamente

$$\begin{aligned} \max z = \ & x_1 + x_2 \\ \text{s.a.} \quad & 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ & -6x_1 - 9x_2 = -15 \\ & x_1 - x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

5.2) Resolver

$$\begin{aligned} \max z = \ & 6x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a.} \quad & 4x_1 + x_2 \leq 21 \\ & 2x_1 + 3x_2 \geq 13 \\ & x_1 - x_2 = -1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

5.3) Resolver e interpretar a solução pela leitura do quadro simplex de solução

a)
$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.a.} \quad & 2x_1 - 2x_2 \geq 2 \\ & -x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \min z = \ & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ & 4x_1 + x_2 - x_4 = 6 \\ & 5x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 7 \\ & \underset{\sim}{x} \geq 0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 + = 4 \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ & 8x_1 + 4x_2 + + x_4 = 30 \\ & \underset{\sim}{x} \geq 0 \end{aligned}$$

5.4) Resolva e mostre graficamente a busca do valor ótimo:

a) max $6\,x_1 + 3\,x_2$

s.a.
$$\begin{aligned} 4\,x_1 + x_2 &\leq 21 \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 &\geq 13 \\ x_1 - x_2 &= -1 \\ x_1,\, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

b) max $x_1 + x_2$

s.a.
$$\begin{aligned} 2\,x_1 + 3\,x_2 &= 5 \\ -\,6\,x_1 - 9\,x_2 &= -15 \\ x_1 - x_2 &\geq 0 \\ x_1,\, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

5.5) Resolver pelo Método Simplex (Duas Fases)

a) min $z = 9\,x_1 + 6\,x_2 + 12\,x_3$

s.a.
$$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 + x_3 &\geq 4 \\ 2\,x_1 + x_2 + x_3 &\geq 5 \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 + 2\,x_3 &\geq 6 \\ x_i \geq 0 \qquad \forall_i &= \overline{1,3} \end{aligned}$$

5.6) Procurar uma solução viável para:

max $f = [\,2 \quad 3 \quad 5\,]\,\underset{\sim}{x}$

s.a. $\begin{bmatrix} 3 & 10 & 5 \\ 33 & -10 & 9 \end{bmatrix} \underset{\sim}{x} \leq \begin{bmatrix} 15 \\ 33 \end{bmatrix}$

$$\underset{\sim}{x} \geq 0$$

CAPÍTULO 6

MÉTODO SIMPLEX REVISADO

Apresentaremos neste capítulo, um método computacionalmente mais econômico para resolução de problema de programação linear.

6.1. Desenvolvimento

A cada iteração do Método Simplex, primeiro escolhemos uma variável a entrar na base, se ela existir, de forma a melhorar o valor de Z. E depois escolhemos a variável a deixar a base, em substituição àquela que vai entrar, de forma a que continuemos trabalhando sobre soluções básicas viáveis. Então calculamos esta nova solução básica viável.

Um pouco de reflexão sobre estas tarefas repetidas a cada ideração do algoritmo Simplex, mostra-nos que nem todos os elementos do quadro são necessários para obtermos a nova solução.

Para ilustrar, consideremos o exemplo da produção de mobiliário de escritórios, objeto do capítulo 4.

$$\begin{array}{llllllll}
\max Z = & 6\,x_1 & + 3\,x_2 & & & & & \\
\text{s.a.} & 2\,x_1 & + 4\,x_2 & + x_3 & & & = & 720 \\
 & 4\,x_1 & + 4\,x_2 & & + x_4 & & = & 880 \\
 & x_1 & + & & & + x_5 & = & 160 \\
 & x_j \geq 0 & ; & j = 1, \ldots, 5 & & & &
\end{array}$$

A iteração correspondente à mudança de base representando o ponto E, para a base representando o ponto D começa com:

$$x_3^* = \begin{bmatrix} x_3^* \\ x_4^* \\ x_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 240 \\ 160 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A variável entrando pode ser qualquer variável não básica x_2 ou x_5 que tenha coeficiente positivo na última linha do quadro (4.17). Como anteriormente observado, os coeficientes nesta linha formam o vetor

$$\hat{c} = c_N - c_B B^{-1} A^N$$

(Estaremos, a partir de agora, para simplificação de notação, nos referindo à Matriz Base A^B por B).

Se o simplex padrão é usado, então este vetor estará prontamente disponível como parte do quadro (ou do dicionário). Em nosso exemplo, temos:

$$Z = 960 + 0\, x_1 + 3\, x_2 + 0\, x_3 + 0\, x_4 - 6\, x_5 \qquad (6.1)$$

Se o Simplex revisado é usado, então o vetor

$$c_N - c_B B^{-1} A^N$$

é calculado em duas etapas:

i) Primeiro calculamos $y = c_B B^{-1}$, solucionando o sistema $yB = c_B$ (6.2)

ii) E então calculamos $c_N - y A^N$ (6.3)

Resolvendo (6.2) para o nosso exemplo, temos:

$$(y_1, y_2, y_3) \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} A^3 & A^4 & A^1 \end{matrix} \end{array} = (0 \quad 0 \quad 6)$$

e obtemos

$$y = (y_1, y_2, y_3) = (0, \quad 0, \quad 6)$$

e então calculamos, (6.3)

$$(3, \quad 0) - (0, \quad 0, \quad 6) \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A^2 & A^5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = (3, \quad 0) - (0, \quad 6) = (3, -6)$$

e achamos o vetor caracterizado em (6.1) para as variáveis básicas x_2 e x_5 (custo relativo em função da base B = $\{A^3\ A^4\ A^1\}$.

Como o único componente positivo deste vetor é o primeiro elemento do vetor $x_N = (x_2, x_5)^t$, x_2 entra na nova Base. Note que os componentes de $c_N - y\ A^N$ podem ser calculados individualmente:

$$c_2 - y\ A^2 = 3 - (0 \quad 0 \quad 6) \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 - 0 = 3$$

$$c_5 - y\ A^5 = 0 - (0 \quad 0 \quad 6) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 - 6 = -6$$

Sejam as variáveis não básicas x_j correspondendo aos componentes c_j do vetor e sejam as colunas A^j de A^N. Então os componentes correspondentes $c_N - y\ A^N$ são iguais a $c_j - y\ A^j$. Assim a variável entrando pode ser qualquer variável não básica x_j para a qual $y\ A^j < c_j$. A correspondente coluna A^j é chamada de *coluna entrando* na nova Base B, chamada a partir de agora como $\underline{a}$.

Recapitulando alguns conceitos:

i) $y = c_B - B^{-1}$ é o vetor multiplicador relativo à base B;

ii) $y\ A^j$ é o custo de oportunidade z_j ($y\ A^j = c_B\ B^{-1}\ A^j$);

iii) $c_j - y\ A^j = \hat{c}_j$ é o custo relativo à base B, e se $c_j - y\ A^j > 0$, mostra que haverá solução melhor que a indicada pela base B (problema de maximização).

Para determinar a variável a deixar a base, de forma que a solução básica determinada pela nova base seja viável, aumentamos de zero para θ, o valor da variável entrando. (Para simplificação da notação, chamaremos a partir deste momento θ como t), mantendo os valores das restantes variáveis não básicas em zero e ajustando os valores das variáveis que permanecem básicas, de forma a preservar as restrições Ax = b. Enquanto t aumenta, os valores das variáveis básicas mudam até que uma delas atinja o nível zero, determinando-se assim que ela deverá deixar a base. Para achar a variável a deixar a base e o maior valor possível para t, precisamos conhecer precisamente a mudança nos valores das variáveis básicas como função do crescimento de t.

Se o simplex padrão é usado, então esta informação é prontamente disponível como parte do quadro. Em nosso exemplo:

$$
\begin{array}{lcl}
x_3 = 400 \ldots - 4\ x_2 \ldots & & x_3 = 400 - 4\ x_2 \\
x_4 = 240 \ldots - 4\ x_2 \ldots & \text{ou seja} & x_3 = 240 - 4\ x_2 \\
x_3 = 160 \ldots + 0\ x_2 \ldots & & x_3 = 160.
\end{array}
\qquad (6.4)
$$

Mais genericamente, as m equações representadas pelo dicionário (ou quadro) nos informam que

$$x_B = x_B^* - B^{-1}\ A^N\ x_N \qquad (6.5)$$

de forma que x_B muda de x_B^* para $x_B^* - t\ \underline{d}$. Como $\underline{d}$ sendo a coluna de

$$\hat{A}^N = B^{-1}\ A^N$$

que limita o crescimento da variável a entrar na base, ou seja, a coluna $\hat{A}^j$ que corresponde à variável entrando, ou seja $d = B^{-1}\ a$, com $\underline{a}$ denotando a coluna entrando na nova base. Se o Simplex revisado é usado, então apenas x_B^* estará prontamente disponível, enquanto $\underline{d}$ é obtido solucionando o sistema Bd = a (6.6). Em nosso exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . d = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e achamos

$$d = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

caracterizado em (6.4).

Desta forma, definimos que t pode ser aumentado até 60, solucionando

$$x_B^* - t\,\underline{d} \geq 0 \qquad \begin{array}{l} x_3 = 400 - 4t \geq 0 \longrightarrow t \leq \dfrac{400}{4} = 100 \\ x_4 = 240 - 4t \geq 0 \longrightarrow t \leq \dfrac{240}{4} = 60 \longrightarrow t_\Theta = 60 \\ x_{13} = 160 \text{ não restringe o crescimento } x_2. \end{array} \tag{6.7}$$

Assim determinamos que x_4 deixará a base e o valor da nova solução básica viável é dada por (6.7)

$$x_B^* = \begin{bmatrix} x_3^* \\ x_2^* \\ x_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 160 \\ 60 \\ 160 \end{bmatrix}$$

Desta forma, vemos que o Simplex revisado requer cálculos não realizados no Simplex padrão, muito embora quando chegamos ao final da iteração não tivemos necessidade de calcular todo o quadro e para continuação da resolução do problema vamos necessitar de atualizar a base B, dado que x_2 substitui x_4 na nova Base B. Assim:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [A^3 \; A^2 \; A^1]$$

e já temos o valor de x_B^*, na nova Base

$$x_B^* = \begin{bmatrix} x_3^* \\ x_2^* \\ x_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 160 \\ 60 \\ 160 \end{bmatrix}$$

Assim sendo, faz-se o cálculo do vetor y, usando (6.2) $c_N - y\,B^{-1}$ como feito anteriormente: $yB = c_B$, ou seja,

$$(y_1,\ y_2,\ y_3) \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (0,\ 3,\ 6)$$

temos

$$\begin{aligned} y_1 &= 0 \\ 4\,y_1 + 4\,y_2 + 0\,y_3 &= 3 \longrightarrow y_2 = 3/4 \\ 2\,y_1 + 4\,y_2 + \,y_3 &= 6 \longrightarrow y_3 = 3 \end{aligned}$$

obtendo:

$$y = (0,\ 3/4,\ 3)$$

Calculando individualmente o custo relativo à nova base B, das variáveis não básicas obtemos:

$$\hat{c}_4 = c_4 - (0,\ 3/4,\ 3) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 - 3/4 = -3/4$$

$$\hat{c}_5 = c_5 - (0,\ 3/4,\ 3)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 - 3 = -3$$

como lemos no quadro (4.18) do capítulo 4.

Verificamos assim que a solução básica viável é ótima, pois

$$c_4 - Z_4 < 0 \longrightarrow Z_4 > c_4$$

$$c_5 - Z_5 < 0 \longrightarrow Z_5 > c_5$$

Note que a ordem das colunas da matriz B, referente à base não é importante desde que acompanhe a ordem dos componentes de x_B^*.

6.2. Algoritmo do Simplex Revisado

Uma iteração do Método Simplex revisado:

PASSO 1: solucione o sistema $yB = c_B$; B sendo a matriz composta pelos vetores coluna da matriz original A, referentes às variáveis básicas. Determine y.

PASSO 2: escolha coluna a entrar na Base, determinando o vetor $\underline{a}$. Deve ser uma coluna $\underline{a}$ de A^N, matriz composta pelos vetores colunas da matriz original A, referente às variáveis não básicas, tal que y $\underline{a}$ seja menor que o componente correspondente em c_N. Se não existir tal coluna, então a solução corrente é ótima.

PASSO 3: solucione o sistema B $\underline{d}$ = $\underline{a}$, para determinar $\underline{d}$

PASSO 4: determine o maior valor t, tal que $x_B^* - t\,\underline{d} \geq 0$. Se não existir tal t, então o problema é ILIMITADO; caso contrário, no mínimo um componente de $x_B^* - t\,\underline{d}$ se iguala a zero e a correspondente variável deixa a base. Se mais de um elemento do vetor x_B^* toma o valor zero a solução é DEGENERADA.

PASSO 5: o valor da variável a entrar na base é t; substitua os valores de x_B^* das variáveis básicas $x_B^* - t\,\underline{d}$. Substitua a coluna a deixar a base (referente à variável saindo da base) pela coluna da variável entrando para atualização da matriz B, referentes à matriz A original do problema. Volte ao passo 1.

6.3. Observações

Normalmente o número de variáveis é muito maior que o número de restrições (n >> m).

A prática revela que o Simplex padrão nos faz manusear muitas colunas que nunca são usadas, ocorrendo assim uma sobrecarga de cálculo desnecessário, além da possibilidade de ocorrência de acúmulo de erros, por arredondamento, se automático, ou por distração, se manual.

Dispondo-se de uma base inicial e usando sempre os parâmetros originais do problema, quais sejam a, b e c, trabalhamos com a utilização de B, posterior ao cálculo de x_B^*, para continuar na resolução do problema.

Ainda, existe forma de atualização da matriz B^{-1} nova, usando a matriz B^{-1} anterior. É o método de representação da Matriz Inversa da Base na Forma Produto (Ramalhete e outros, páginas 277 e 288).

6.4. Exercícios

6.1) Resolver o exemplo 1 do capítulo 2, usando o método simplex revisado.

6.2) Seja o PL

$$\begin{cases} \max & z = 3x_1 + x_2 \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 \le 8 \\ & x_1 + 3x_2 \le 18 \\ & x_1 - x_2 \le 2 \\ & x \ge 0 \end{cases}$$

Realize iterações do Simplex Revisado. Verifique a otimalidade e calcule o valor de yb a cada iteração, y sendo o vetor multiplicador $y = c_B B^{-1}$.

BIBLIOGRAFIA

1974 - ACKOFF, R.L. & SASIENI, M.W. *Pesquisa Operacional* - tradução - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro.

1988 - BREGALDA, F.; OLIVEIRA, A.A.F. e BORNSTEIN, C.T. *Introdução a Programação Linear.* 3 ed., Rio de Janeiro, Editora Campus.

1983 - CHVÁTAL, Vašek. *Linear Programming.* W.H. Freeman and Co.

1988 - HILLIER & LIEBERMAN. *Introdução a Pesquisa Operacional.* 3 ed., Tradução Helena C. Lemos. São Paulo, Editora Campus/EDUSP.

1980 - MACULAN Fo., Nelson & PEREIRA, Mario V.F. *Programação Linear.* Editora Atlas.

1984 - RAMALHETE, M.; GUERREIRO, J. e MAGALHÃES, A. *Programação Linear.* McGraw-Hill de Portugal Ltda.

1986 - WAGNER, H.M. *Pesquisa Operacional.* Tradução - Prentice - Hall do Brasil, Rio de Janeiro.