

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

DEDALUS - Acervo - EESSC



31100108399

PROCESSO DE PROPAGAÇÃO

JOÃO CARLOS ANTUNES DE O. E SOUZA
HELENA M. C. CARMO ANTUNES
MAIO DE 2001

Reimpressão
Código 01117

DSTILA
5p

SERVA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

PROCESSO
DE
PROPAGAÇÃO

JOÃO CARLOS ANTUNES DE O. E SOUZA
HELENA M.C. CARMO ANTUNES

Maio/2001

Reimpressão

PREFÁCIO

Esta publicação está sendo apresentada numa versão inicial, provisória, para atender atividades didáticas imediatas dos alunos de Estática das Estruturas, da Escola de Engenharia de São Carlos. O texto e os fluxogramas ainda não passaram por uma verificação acurada, nem foram anexados os correspondentes programas para computador.

Os autores

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO	1
1.1. Considerações Gerais	1
1.2. Coeficientes fundamentais relativos à barra	1
2. VIGA COM ENGASTAMENTOS ELÁSTICOS À ROTAÇÃO	3
2.1. Rigidez à rotação dos engastamentos elásticos	3
2.2. Coeficientes de propagação	3
2.3. Coeficientes de rigidez à rotação das extremi- dades	5
2.4. Momentos de engastamento elástico	6
3. O PROCESSO DE PROPAGAÇÃO APLICADO A VIGAS CONTÍ- NUAS COM MOMENTOS DE INÉRCIA VARIÁVEIS	9
3.1. Introdução	9
3.2. Coeficientes de propagação associados ao tramo i	9
3.2.1. Notação	9
3.2.2. Cálculo das α_{ei} por recorrência	10
3.2.3. Cálculo das α_{di} por recorrência	10
3.2.4. Momentos de engastamento elástico	11
4. O PROCESSO DE PROPAGAÇÃO PARTICULARIZADO PARA VI- GAS CONTÍNUAS COM TRAMOS PRISMÁTICOS	12
4.1. Cálculo dos α_{di} por recorrência	12
4.2. Diversas possibilidades para α_{d1}	12
4.3. Cálculo das α_{ei} por recorrência	14
4.4. Diversas possibilidades para α_{en}	14
4.5. Tabela para o cálculo dos coeficientes de propa- gação	15
4.6. Tabela para termos de carga	15
5. Exemplos	18
5.1. Exemplo 1	18
5.2. Exemplo 2	22

6. PROGRAMAÇÃO DO CÁLCULO DE ESFORÇOS INTERNOS E REAÇÕES	24
6.1. Considerações Gerais	24
6.2. Fluxograma	25
7. PROGRAMAÇÃO DO CÁLCULO DE LINHAS DE INFLUÊN- CIA DE ESFORÇOS INTERNOS E REAÇÕES	33
7.1. Técnica aplicada	33
7.2. Termos de carga equivalentes	34
7.3. Elástica devida aos momentos de extremida- de do tramo	36
7.4. Características essenciais do programa	37
7.5. Fluxograma	40
TABELA 1 - COEFICIENTES DE PROPAGAÇÃO	48
TABELA 2 - TERMOS DE CARGA	49

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 - Considerações Gerais

O processo de propagação, aplicável a um tipo muito restrito de estruturas contínuas abertas, é particularmente interessante para a análise de vigas contínuas, sendo uma opção para o cálculo manual desse tipo de estrutura, dada a sua peculiaridade essencial de permitir o tratamento em separado dos efeitos das cargas em cada tramo; além disso, por não envolver solução de sistemas de equações e nem estar condicionado a métodos de solução iterativa, é um processo facilmente automatizável e ótimo para programação em microcomputadores de pequeníssimo porte.

O processo em si, conforme será visto, permite analisar cada tramo em separado, como elasticamente engastado em suas extremidades, possibilitando a determinação dos momentos fletores finais de engastamento elástico do tramo e propagando esses momentos fletores para todos os outros nós de extremidade de barra.

1.2 - Coeficientes Fundamentais Relativos à Barra

Para uma barra AB , de comprimento l e com EI , em princípio, variável de ponto para ponto, conforme Fig.1.1, é interessante, para obter qualquer parâmetro ou coeficiente relativo a esforços ou deslocamentos das extremidades, partir, por exemplo, de um número mínimo de coeficientes fundamentais.

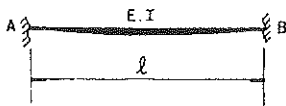


FIG. 1.1 - BARRA A-B

Esses coeficientes fundamentais seriam todos rotações ampliadas em um fator único arbitrário, $E_c I_c$, das extremidades da barra AB suposta biarticulada, mostradas na Fig.1.2. Serão chamados "fatores de forma", as rotações ampliadas \mathcal{G}' , \mathcal{G} e \mathcal{F} definidas na Fig.1.2.a e b, devidas a momentos unitários aplicados às extremidades A e B; serão chamados "fatores de carga", as rotações ampliadas \mathcal{A} e \mathcal{B} , definidas na Fig.1.2.c.

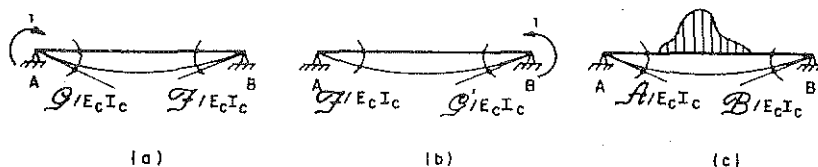


FIG.1.2 — COEFICIENTES FUNDAMENTAIS

Com esses coeficientes, obtidos por integração ou com o uso de tabelas convenientes, determina-se uma série de outros relacionados à barra.

CAPÍTULO 2

VIGA COM ENGASTAMENTOS ELÁSTICOS À ROTAÇÃO

2.1 - Rigidez à rotação dos engastamentos elásticos

Seja a viga AB da Fig.2.1, engastada elasticamente à rotação em A e B.

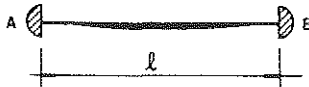


FIG. 2.1 - VIGA ENGASTADA ELASTICAMENTE

Sejam ϕ_A e ϕ_B , rotações ampliadas em $E_C I_C$ das extremidades A e B, as sollicitações nas "molas" A e B seriam M_A e M_B dados por:

$$M_A = r_A \phi_A \quad \dots \quad (1)$$

$$M_B = r_B \phi_B$$

onde r_A e r_B seriam as rigidezes à rotação ampliada, ou "coeficientes de mola" dos dois engastes.

2.2 - Coeficientes de propagação

Os coeficientes de propagação são em geral definidos a partir de relações entre momentos de extremidade de barra, internas à barra, expressas na "convenção de Grinter", isto é, sendo considerados positivos se atuando no sentido horário sobre os nós. Sejam os momentos externos, ativos ou reativos, M_A e M_B , positivos se provocarem tração embaixo,

aplicados a uma das extremidades suposta articulada, conforme Fig.2.2.a e b.

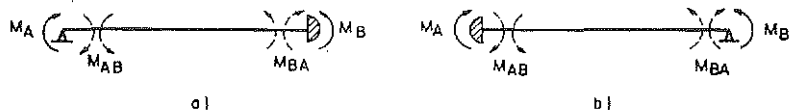


FIG. 2.2 -- COEFICIENTES DE PROPAGAÇÃO

Os coeficientes de propagação α_{AB} , de A para B e α_{BA} , de B para A, são definidos, com referência às Fig.2.2. a e 2.2.b, respectivamente, por:

$$\alpha_{AB} = \frac{M_{BA}}{M_{AB}} = \frac{M_B}{-M_A} \quad \dots \quad (2)$$

$$\alpha_{BA} = \frac{M_{AB}}{M_{BA}} = \frac{-M_A}{M_B} \quad \dots \quad (3)$$

Os coeficientes α_{AB} e α_{BA} podem ser colocados em função dos fatores de forma; assim, com o auxílio da superposição de efeitos esquematizada na Fig.2.3, pode-se determinar, por exemplo, α_{AB} .

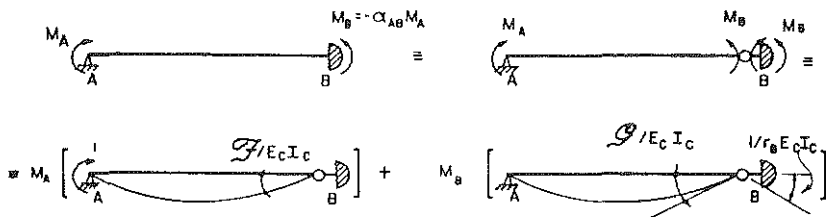


FIG. 2.3 -- COEFICIENTES DE PROPAGAÇÃO

Para ser nula a rotação relativa na articulação criada:

$$M_A \cdot \frac{\mathcal{F}}{E_C I_C} + M_B \left(\frac{\mathcal{G}}{E_C I_C} + \frac{1}{r_B E_C I_C} \right) = 0 \quad \dots \quad (4)$$

Da (2) em (4) e cancelando $E_C I_C$:

$$M_A \cdot \mathcal{F} - \alpha_{AB} M_A \left(\mathcal{G} + \frac{1}{r_B} \right) = 0 \quad \dots \quad (5)$$

donde

$$\alpha_{AB} = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G} + \frac{1}{r_B}} \quad \dots \quad (6)$$

Com desenvolvimento análogo obter-se-ia:

$$\alpha_{BA} = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}' + \frac{1}{r_A}} \quad \dots \quad (7)$$

2.3 - Coeficientes de rigidez à rotação das extremidades

Os coeficientes β_{AB} e β_{BA} de rigidez à rotação das extremidades A e B da viga AB da Fig.2.1, correspondem aos momentos necessários de se aplicar às extremidades A e B, respectivamente, para provocar uma rotação que, ampliada, seja unitária, conforme fig.2.4.a e b.



FIG.2.4 - COEFICIENTES DE RIGIDEZ À ROTAÇÃO

Esses coeficientes também podem ser colocados em função dos fatores de forma. Assim β_{AB} , por exemplo, pode ser determinado com a superposição de efeitos esquematizada na Fig.2.5.

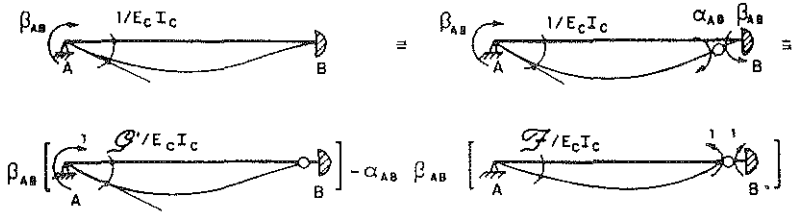


FIG. 2.5 - COEFICIENTES DE RIGIDEZ

Para que a rotação ampliada em A seja unitária:

$$\frac{1}{E_C I_C} = \beta_{AB} \cdot \frac{G'}{E_C I_C} - \alpha_{AB} \beta_{AB} \cdot \frac{F}{E_C I_C} \quad \dots \quad (8)$$

Da (8), cancelando $E_C I_C$, sai

$$\beta_{AB} = \frac{1}{G' - \alpha_{AB} F} \quad \dots \quad (9)$$

Com desenvolvimento análogo obter-se-ia

$$\beta_{BA} = \frac{1}{G' - \alpha_{BA} F} \quad \dots \quad (10)$$

2.4 - Momentos de engastamento elástico

Os momentos de engastamento elástico M_A e M_B das extremidades A e B, na convenção usual, isto é, positivos se provocarem tração embaixo, e externos ou internos à bar

ra, conforme se os queira encarar, podem ser relacionados aos coeficientes fundamentais com a superposição de efeitos esquematizada na Fig.2.6.

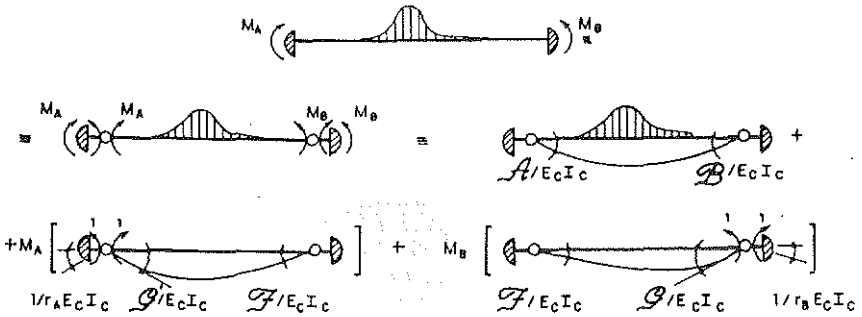


FIG.2.6 - MOMENTO DE ENGASTAMENTO ELÁSTICO

Para serem nulas as rotações relativas nas articulações criadas, já multiplicando essas rotações por $E_C I_C$, tem-se:

$$A + M_A \left(\mathcal{Q} + \frac{1}{r_A} \right) + M_B \cdot \mathcal{F} = 0 \quad \dots \quad (11)$$

$$B + M_A \cdot \mathcal{F} + M_B \left(\mathcal{Q} + \frac{1}{r_B} \right) = 0$$

Substituindo os termos entre parênteses, por valores tirados da (6) e da (7) tem-se:

$$A + M_A \cdot \frac{\mathcal{F}}{\alpha_{BA}} + M_B \cdot \mathcal{F} = 0 \quad \dots \quad (12)$$

$$B + M_A \cdot \mathcal{F} + M_B \frac{\mathcal{F}}{\alpha_{AB}} = 0$$

Introduzindo em substituição a A e B os termos de carga à esquerda e à direita dados por:

$$E = A / \mathcal{F} \quad \dots \quad (13)$$

$$D = B / \mathcal{F}$$

é possível cancelar \mathcal{F} das (12); resolvendo então o sistema ter-se-á:

$$M_A = - \frac{\alpha_{BA}}{1 - \alpha_{AB} \alpha_{BA}} (E - \alpha_{AB} D) \quad \dots \quad (14)$$

$$M_B = - \frac{\alpha_{AB}}{1 - \alpha_{AB} \alpha_{BA}} (D - \alpha_{BA} E)$$

Os termos de carga E e D têm dimensão de momento e cumprem o mesmo papel dos fatores de carga A e B .

CAPÍTULO 3

O PROCESSO DE PROPAGAÇÃO APLICADO A VIGAS CONTÍNUAS COM MOMENTOS DE INÉRCIA VARIÁVEIS

3.1 - Introdução

O processo de propagação permite calcular os momentos na viga, sobre todos os apoios, devidos ao carregamento aplicado a cada tramo em separado; seja esse tramo o tramo i da Fig.3.1, encarado como elasticamente engastado nas extremidades.



FIG. 3.1 - VIGA CONTÍNUA

3.2 - Coeficientes de propagação associados ao tramo i

3.2.1 - Notação

Para simplificar a notação, já que se trabalhará com n tramos, se associará à esquerda e à direita do tramo i um coeficiente de propagação tal que:

$$\begin{aligned} \alpha_{ei} &= (\alpha_{AB})_i \\ &\dots \quad (15) \\ \alpha_{di} &= (\alpha_{BA})_i \end{aligned}$$

3.2.2 - Cálculo dos α_{ei} por recorrência

O coeficiente α_{ei} poderá ser calculado sempre em função de α_{ei+1} ; assim, da expressão (6) em (15):

$$\alpha_{ei} = \frac{F_i}{G_i + \frac{1}{r_{B_i}}} \quad \dots \quad (16)$$

Observe-se entretanto, que

$$r_{B_i} = \beta_{AB_{i+1}} \quad \dots \quad (17)$$

e portanto, pela expressão (9)

$$r_{B_i} = \frac{1}{G'_{i+1} - \alpha_{ei+1} F_{i+1}} \quad \dots \quad (18)$$

Substituindo a (18) na (16):

$$\alpha_{ei} = \frac{F_i}{G_i + G'_{i+1} - \alpha_{ei+1} F_{i+1}} \quad \dots \quad (19)$$

A expressão (19) permite determinar α_{ei} , desde que se conheça α_{ei+1} . Como, entretanto, sempre se conhece α_{en} , que depende das condições do último apoio da direita, é possível calcular α_{ei} para todos os tramos.

3.2.3 - Cálculo dos α_{di} por recorrência

O coeficiente α_{di} poderá ser, analogamente, calculado em função de α_{di-1} ; da expressão (7), com (15)

$$\alpha_{di} = \frac{F_i}{G'_i + \frac{1}{r_{A_i}}} \quad \dots \quad (20)$$

Também, das respectivas definições:

$$r_{Ai} = \beta_{BAi-1} \quad \dots \quad (21)$$

e portanto, da (10), com (15)

$$r_{Ai} = \frac{1}{\mathcal{P}_{i-1} - \alpha_{di-1} \mathcal{F}_{i-1}} \quad \dots \quad (22)$$

Com a (22) em (20):

$$\alpha_{di} = \frac{\mathcal{F}_i}{\mathcal{P}'_i + \mathcal{P}_{i-1} - \alpha_{di-1} \mathcal{F}_{i-1}} \quad \dots \quad (23)$$

A expressão (23) permite determinar α_{di} , desde que se conheça α_{di-1} . Como, entretanto, sempre se conhece α_{d1} , que depende das condições do primeiro apoio, à esquerda, é possível calcular α_{di} para todos os tramos.

3.2.4 - Momentos de engastamento elástico

Conhecidos α_{ei} e α_{di} , simplesmente adaptando a notação das (14), tem-se:

$$M_{ei} = - \frac{\alpha_{di}}{1 - \alpha_{ei} \alpha_{di}} (\mathcal{E}_i - \alpha_{ei} \mathcal{D}_i) \quad \dots \quad (24)$$

$$M_{di} = - \frac{\alpha_{ei}}{1 - \alpha_{ei} \alpha_{di}} (\mathcal{D}_i - \alpha_{di} \mathcal{E}_i)$$

Tendo M_{ei} , utilizando os coeficientes α_{dj} , para $j < i$, propaga-se-o para os nós à esquerda; analogamente, com os α_{ej} , $j > i$, propaga-se M_{di} para os nós à direita.

CAPÍTULO 4

O PROCESSO DE PROPAGAÇÃO PARTICULARIZADO PARA VIGAS
CONTÍNUAS COM TRAMOS PRISMÁTICOS

4.1 - Cálculo dos α_{di} por recorrência

Para barras prismáticas:

$$\varphi' = \varphi = 2\varphi = \frac{\varphi'}{3} = \frac{1}{3} \frac{\varphi E_c I_c}{EI} \quad \dots \quad (25)$$

e portanto, substituindo-se na (23), chega-se a:

$$\alpha_{di} = \frac{1}{2 + \frac{\varphi_{i-1}}{\varphi_i} (2 - \alpha_{di-1})} \quad \dots \quad (26)$$

Conhece-se em princípio α_{d1} , o que permite, com a (26), calcular todos os α_{di}

4.2 - Diversas possibilidades para α_{d1}

Em função do primeiro apoio da esquerda pode-se ter:

a) Primeiro apoio articulado

$$\alpha_{d1} = 0$$

b) Primeiro apoio engastado

$$\alpha_{d1} = 0,5$$

c) Primeiro apoio engastado elasticamente nos pilares

É prática corrente no cálculo de estruturas de edifícios de múltiplos andares, dada a preponderância das cargas gravitacionais sobre as acidentais e a repetitividade dos andares, além de outras considerações que não vale a pena citar aqui, recair no cálculo de vigas contínuas engastadas elasticamente nos pilares de extremidade, com pontos de inflexão previstos a meia altura desses pilares, conforme Fig.4.1.

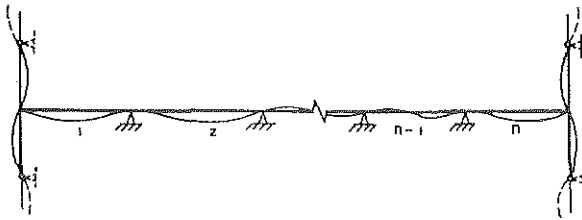


FIG. 4.1 — VIGA ENGASTADA NOS PILARES DE EXTREMIDADE

O coeficiente α_{d1} pode ser determinado como o momento à esquerda do tramo 1, conforme Fig.4.2.a, utilizando o esquema de solução da Fig.4.2.

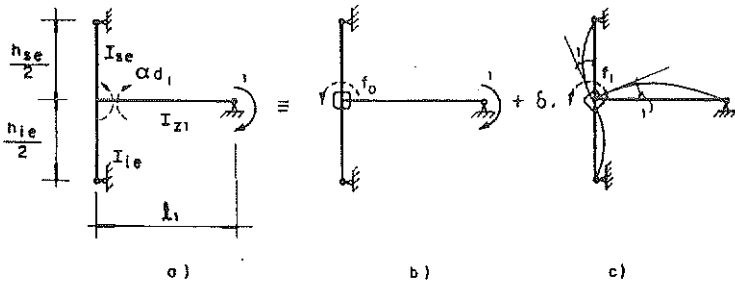


FIG. 4.2 — ENGASTE ELÁSTICO NO PILAR DA ESQUERDA

Como condição de coerência de esforços:

$$0 = f_0 + \delta f_1$$

ou então

$$0 = -\frac{1}{2} + \delta \left[\frac{3EI_{z1}}{l_1} + \frac{6EI_{se}}{h_{se}} + \frac{6EI_{ie}}{h_{ie}} \right]$$

donde se calcula δ , e com ele α_{d1}

$$\alpha_{d1} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{1 + 2 \frac{l_1}{I_{z1}} \left(\frac{I_{se}}{h_{se}} + \frac{I_{ie}}{h_{ie}} \right)} \right] \quad \dots \quad (27)$$

4.3 - Cálculo dos α_{ei} por recorrência

Para barras prismáticas, com (25), tem-se também, da (19):

$$\alpha_{ei} = \frac{1}{2 + \frac{l_{i+1}}{l_i} (2 - \alpha_{ei+1})} \quad \dots \quad (28)$$

Conhece-se, também α_{en} , o que permite, com a (28), calcular todos os α_{ei} .

4.4 - Diversas possibilidades para α_{en}

Em função do último apoio da direita pode-se ter:

a) Último apoio articulado

$$\alpha_{en} = 0$$

b) Último apoio engastado

$$\alpha_{en} = 0,5$$

c) Último apoio engastado nos pilares

Adaptando a (27) à nova situação tem-se, analogamente

$$\alpha_{en} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{1 + 2 \frac{\ell_n}{I_{zn}} \left(\frac{I_{sd}}{h_{sd}} + \frac{I_{id}}{h_{id}} \right)} \right] \dots \quad (29)$$

4.5 - Tabela para o cálculo dos coeficientes de propagação

Ao cálculo dos α_{ei} e dos α_{di} , através das expressões (26) e (28), pode ser associado um "sentido de percurso", começando da esquerda, no caso dos α_{di} , e da direita, no caso dos α_{ei} ; dessa forma as expressões (26) e (28) poderiam ser unificadas, numa forma mais simples

$$\alpha = \frac{1}{2 + n (2 - \alpha_{anterior})} \dots \quad (30)$$

com

$$n = \frac{\ell'_{anterior}}{\ell'} \dots \quad (31)$$

É fácil montar então uma tabela única, em função de um " $\alpha_{anterior}$ ", variando de 0 a 0,5 e de n prevendo uma relação de até 1:4 entre os ℓ' consecutivos, isto é, para $0,25 \leq n \leq 4$.

Essa tabela corresponde à TABELA 1.

4.6 - Tabela para termos de carga

Os termos de cargas $\mathcal{E}_e \mathcal{D}$, para barras prismáticas, são funções só dos carregamentos.

Assim, só como exemplo, seja o caso de carga p

uniformemente distribuída em toda a extensão da viga, conforme Fig.4.3.

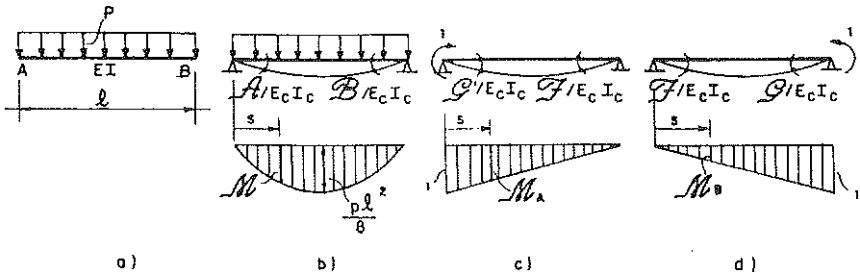


FIG. 4.3 - COEFICIENTES FUNDAMENTAIS

Utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais e tabelas de integrais de produtos de funções:

$$\frac{A}{E_c I_c} = \frac{B}{E_c I_c} = \int_0^l M_A M \frac{ds}{EI} = \frac{1}{EI} \int M_A M ds = \frac{1}{EI} \cdot l \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{3} \cdot l \cdot \frac{p l^2}{8} = \frac{p l^3}{24 EI}$$

$$A = B = \frac{p l^2 l'}{24}$$

$$\frac{F}{E_c I_c} = \int_0^l M_A M_B \frac{ds}{EI} = \int_0^l M_A M_B ds = \frac{1}{EI} \cdot l \cdot \frac{1}{EI} \cdot l \cdot l =$$

$$= \frac{l}{6 EI}$$

$$F = \frac{l l'}{6}$$

donde, com as (13)

$$\mathcal{E} = \mathcal{D} = \frac{A}{\mathcal{F}} = \frac{B}{\mathcal{F}'} = \frac{p \ell^2 \ell'}{24} \cdot \frac{6}{\ell'}$$

ou

$$\mathcal{E} = \mathcal{D} = \frac{p \ell^2}{4}$$

A TABELA 2, fornece diretamente, para diversas cargas e solicitações usuais, esses valores de \mathcal{E} e \mathcal{D} .

Para os casos de variação qualquer de momentos de inércia, ou casos de cargas não usuais, poder-se-ia partir dos coeficientes fundamentais obtidos por integração numérica ou através de tabelas convenientes, como a do prof. Telémaco H.V. Langendonck, publicada na revista Engenharia, nº 85, páginas 7 e seguintes.

CAPÍTULO 5

EXEMPLOS

5.1 - Exemplo 1

Determinar o diagrama de momentos fletores para a viga da Fig. 5.1, desenvolvendo o cálculo na própria Fig.5.1:

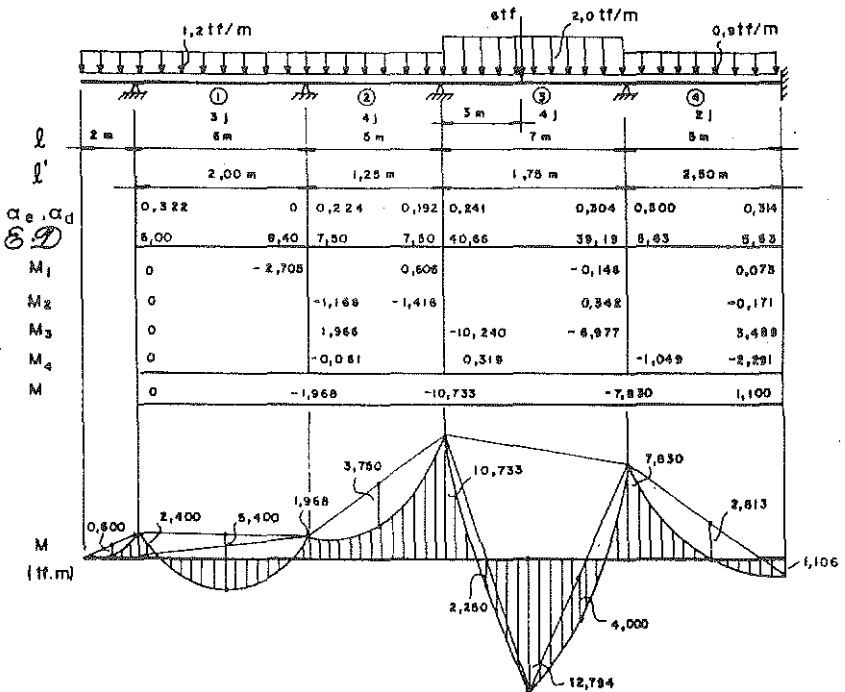


FIG. 5.1 - EXEMPLO NUMÉRICO

O cálculo realizado na própria Fig.5.1, envolve as seguintes etapas:

a) Cálculo dos l'_i

$$l'_i = l_i \frac{E_c I_c}{E_i I_i}$$

Arbitrando $E_c = E_i$, comum a toda a viga, e $I_c = j$ e podendo I_i ser colocado como $I_i = \eta_i j$.

$$l'_i = \frac{l_i}{\eta_i}$$

b) Cálculo dos α_{di}

Pode ser feito com a expressão (26), (30) ou com a TAB.1, partindo de:

$$\alpha_{d1} = 0$$

$$\alpha_{d2} = 0,192 \quad \text{com} \quad \alpha_{ant} = 0 \quad \text{e} \quad n = \frac{2,00}{1,25} = 1,600$$

$$\alpha_{d3} = 0,304 \quad \text{com} \quad \alpha_{ant} = 0,192 \quad \text{e} \quad n = \frac{1,25}{1,75} = 0,714$$

$$\alpha_{d4} = 0,314 \quad \text{com} \quad \alpha_{ant} = 0,304 \quad \text{e} \quad n = \frac{1,75}{2,50} = 0,700$$

c) Cálculo dos α_{ei}

Pode ser feito com a expressão (28) e (30) ou com a TAB.2, partindo de:

$$\alpha_{e4} = 0,500$$

$$\alpha_{e3} = 0,241 \quad \text{com} \quad \alpha_{ant} = 0,500 \quad \text{e} \quad n = \frac{2,50}{1,75} = 1,429$$

$$\alpha_{e2} = 0,224 \quad \text{com} \quad \alpha_{\text{ant}} = 0,241 \quad \text{e} \quad n = \frac{1,75}{1,25} = 1,400$$

$$\alpha_{e1} = 0,322 \quad \text{com} \quad \alpha_{\text{ant}} = 0,224 \quad \text{e} \quad n = \frac{1,25}{2,00} = 0,625$$

c) Cálculo dos \mathcal{E}_i e \mathcal{D}_i

O balanço à esquerda foi considerado como aplicação de um momento ao ponto inicial do tramo 1. Seria viável, e até mais simples, propagar diretamente o momento na viga sobre o primeiro apoio, para todos os outros pontos e incluir em \mathcal{E}_1 e \mathcal{D}_1 só a carga uniformemente distribuída sobre o tramo 1. Com a opção feita:

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1,2 \cdot 6^2}{4} - \frac{1,2 \cdot 2^2}{2} \cdot \left(3 \cdot \frac{6^2}{6^2} - 1\right) = 6,00 \text{ tfm}$$

$$\mathcal{D}_1 = \frac{1,2 \cdot 6^2}{4} - \frac{1,2 \cdot 2^2}{2} \cdot \left(1 - 3 \cdot \frac{0^2}{6^2}\right) = 8,40 \text{ tfm}$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{1,2 \cdot 5^2}{4} = 7,50 \text{ tfm}$$

$$\mathcal{D}_2 = \frac{1,2 \cdot 5^2}{4} = 7,50 \text{ tfm}$$

$$\mathcal{E}_3 = \frac{2,0 \cdot 7^2}{4} + \frac{6 \cdot 3 \cdot 4}{7} \left(1 + \frac{4}{7}\right) = 40,66 \text{ tfm}$$

$$\mathcal{D}_3 = \frac{2,0 \cdot 7^2}{4} + \frac{6 \cdot 3 \cdot 4}{7} \left(1 + \frac{3}{7}\right) = 39,19 \text{ tfm}$$

$$\mathcal{E}_4 = \frac{0,9 \cdot 5^2}{4} = 5,63 \text{ tfm}$$

$$\mathcal{D}_4 = \frac{0,9 \cdot 5^2}{4} = 5,63 \text{ tfm}$$

d) Cálculo dos momentos de engastamento elástico

Com as (24):

$$M_{e1} = -\frac{0}{1 - 0,322 \cdot 0} (6,00 - 0,322 \cdot 8,40) = 0 \text{ tfm}$$

$$M_{d1} = -\frac{0,322}{1 - 0,322 \cdot 0} (8,40 - 0 \cdot 6,00) = -2,705 \text{ tfm}$$

$$M_{e2} = -\frac{0,192}{1 - 0,224 \cdot 0,192} (7,50 - 0,224 \cdot 7,50) = -1,168 \text{ tfm}$$

$$M_{d2} = -\frac{0,224}{1 - 0,224 \cdot 0,192} (7,50 - 0,192 \cdot 7,50) = -1,418 \text{ tfm}$$

$$M_{e3} = -\frac{0,304}{1 - 0,241 \cdot 0,304} (40,66 - 0,241 \cdot 39,19) = -10,240 \text{ tfm}$$

$$M_{d3} = -\frac{0,241}{1 - 0,241 \cdot 0,304} (39,19 - 0,304 \cdot 40,66) = -6,977 \text{ tfm}$$

$$M_{e4} = -\frac{0,314}{1 - 0,500 \cdot 0,314} (5,63 - 0,500 \cdot 5,63) = -1,049 \text{ tfm}$$

$$M_{d4} = -\frac{0,500}{1 - 0,500 \cdot 0,314} (5,63 - 0,314 \cdot 5,63) = -2,291 \text{ tfm}$$

5.2 - Exemplo 2

Para a viga de concreto esquematizada na Fig. 5.2, com seção retangular de largura constante igual a 0,20m, determinar o diagrama de momentos fletores devidos a recalques, para baixo, de 5cm para o apoio 1 e 2cm para o apoio 2. Desenvolver o cálculo na própria Fig. 5.2.

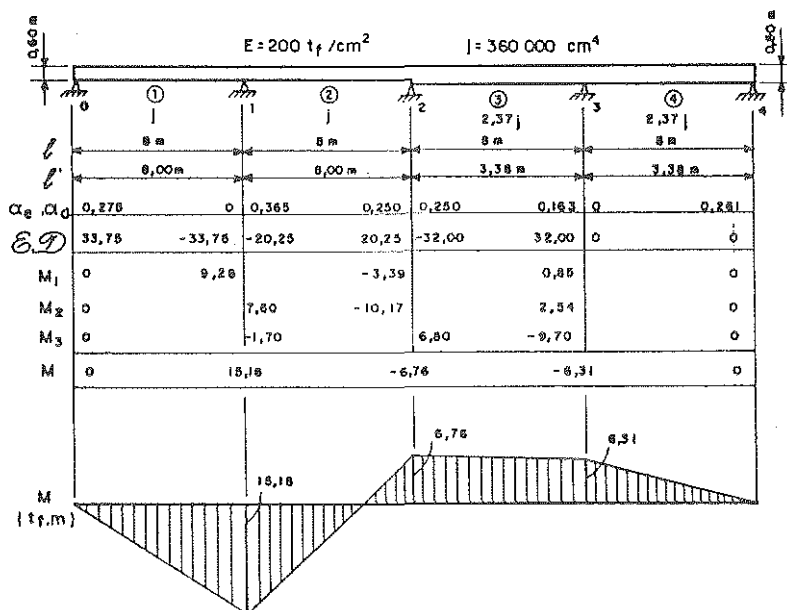


FIG. 5.2 - EXEMPLO 2

Do cálculo realizado na Fig. 5.2 vale a pena explicar só o cálculo dos \mathcal{E}_i e \mathcal{D}_i , obtidos a partir dos termos de carga equivalentes A_i e B_i .

Para um tramo genérico, onde a extremidade B desça de Δ em relação à A, portanto com um "giro de corda" ho

rário , tem-se:

$$A = E_c I_c \frac{\bar{\Delta}}{l}$$

$$B = -E_c I_c \frac{\bar{\Delta}}{l}$$

Para uma barra prismática:

$$F = \frac{l^3}{6} = \frac{l E_c I_c}{6 E I}$$

donde

$$E = \frac{A}{F} = \frac{6EI}{l^2} \cdot \bar{\Delta}$$

$$D = \frac{B}{F} = -\frac{6EI}{l^2} \cdot \bar{\Delta}$$

Com isso:

$$E_1 = -D_1 = \frac{6 \cdot 200 \cdot 360.000}{800^2} \cdot (5 - 0) = 3375 \text{ t fcm}$$

$$E_2 = -D_2 = \frac{6 \cdot 200 \cdot 360.000}{800^2} \cdot (2 - 5) = -2025 \text{ t fcm}$$

$$E_3 = -D_3 = \frac{6 \cdot 200 \cdot 853.333}{800^2} \cdot (0 - 2) = -3200 \text{ t fcm}$$

CAPÍTULO 6

PROGRAMAÇÃO DO CÁLCULO DE ESFORÇOS INTERNOS E REAÇÕES

6.1 - Considerações Gerais

Esse processo é facilmente programável em computador, mesmo de porte extremamente pequeno; não envolve solução dos sistemas de equações decorrentes da análise de estruturas com técnicas matriciais nem envolve qualquer cálculo iterativo. Dependendo da organização da programação, o armazenamento na memória do computador pode ficar restrito só aos α_{ei} , aos α_{di} e aos momentos M_i nos nós da viga. O único inconveniente do processo é o fato dele ser particular, essencialmente aplicável a vigas contínuas.

Nesse item pretende-se organizar um fluxograma que resolva a viga da Fig.5.1, com N tramos e $N+1$ apoios, com os seguintes objetivos:

- a) determinar $N+1$ momentos nos nós
- b) determinar $N+1$ reações verticais
- c) determinar $2N$ esforços cortantes de extremidade de barra

Os apoios extremos, 0 e N poderão ter três condições:

- a) ser articulado
- b) ser rigidamente engastado
- c) ser engastado elasticamente nos pilares, para articulação fictícia a meia altura dos mesmos.

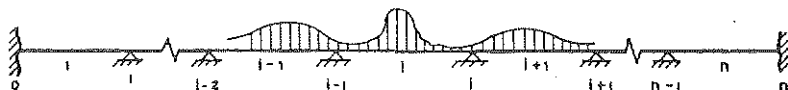


FIG. 6.1- VIGA CONTÍNUA

Serão previstas apenas as cargas de barra, constantes da Fig.6.2, em número e combinação quaisquer, armazenando-se os termos de carga \mathcal{E}_i e \mathcal{D}_i . Momentos aplicados a nós, como no caso de balanços de extremidade, deverão ser considerados como carga num tramo adjacente.

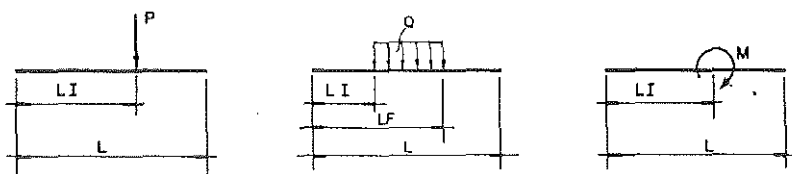
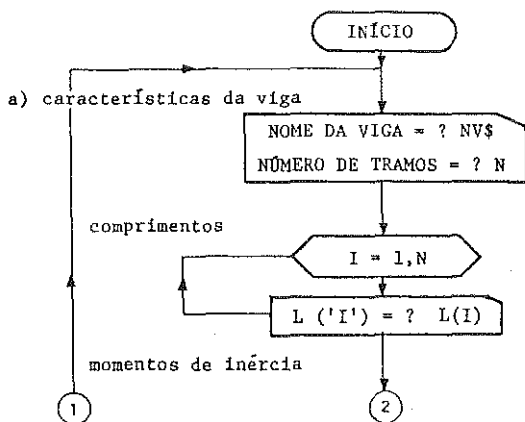
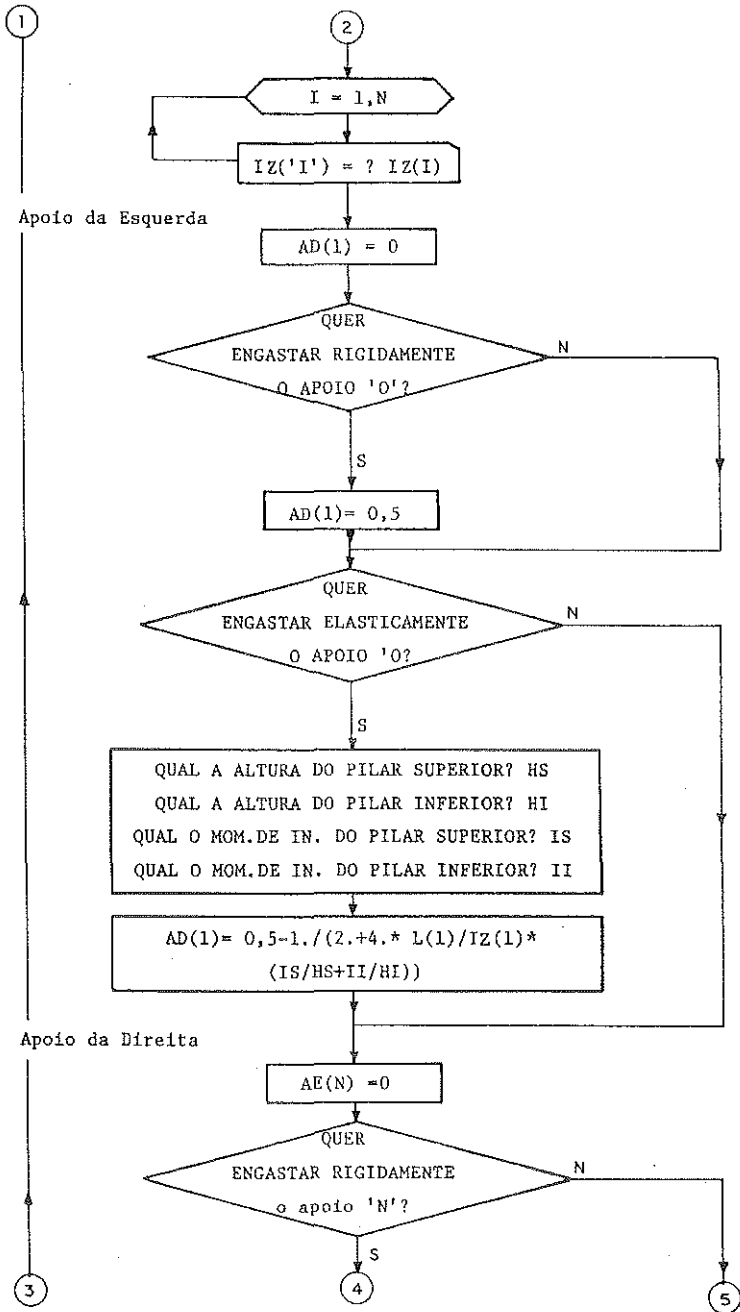


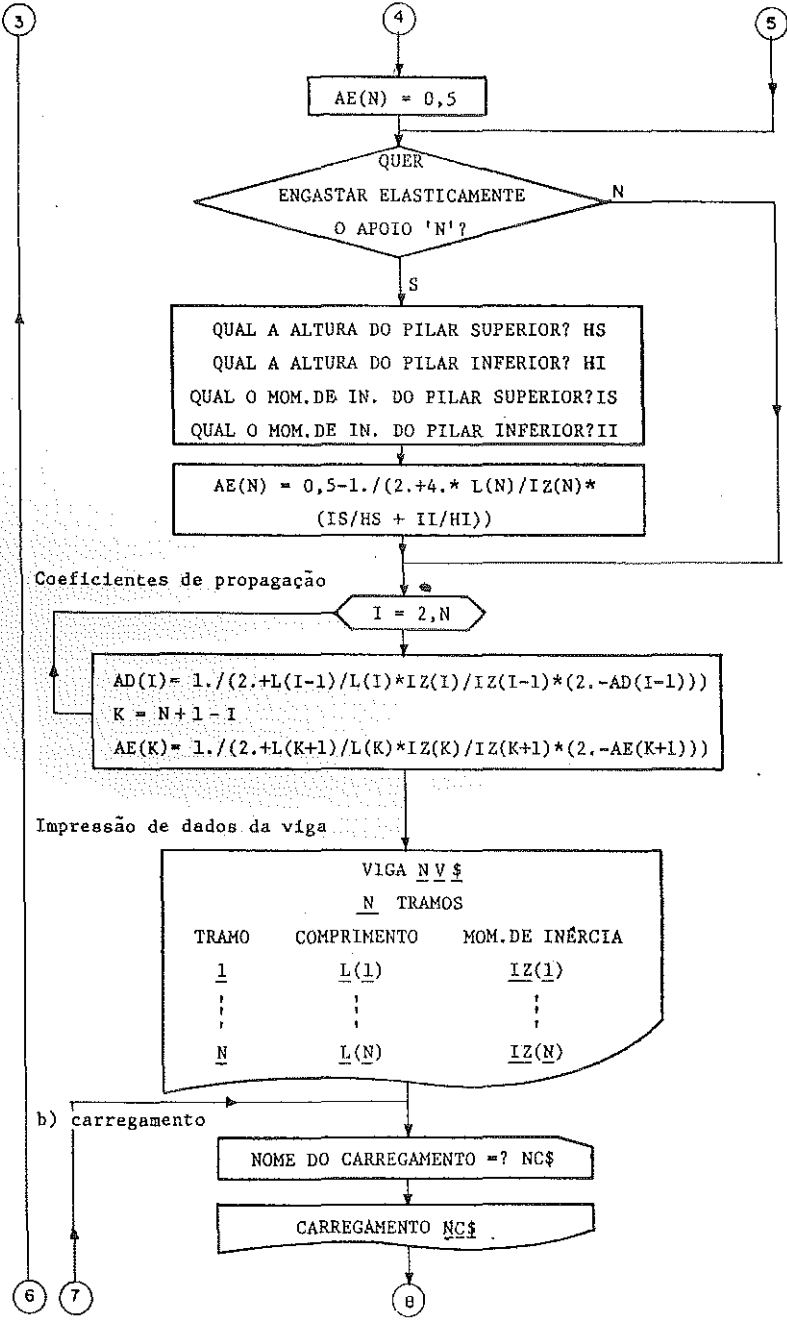
FIG.6.2 - CARGAS PREVISTAS NOS TRAMOS

6.2 - Fluxograma

O fluxograma a seguir foi preparado para a utilização da linguagem BASIC, mais difundida em computadores de pequeno porte, mas pode ser adaptado facilmente a qualquer outra linguagem.







Coefficientes de propagação

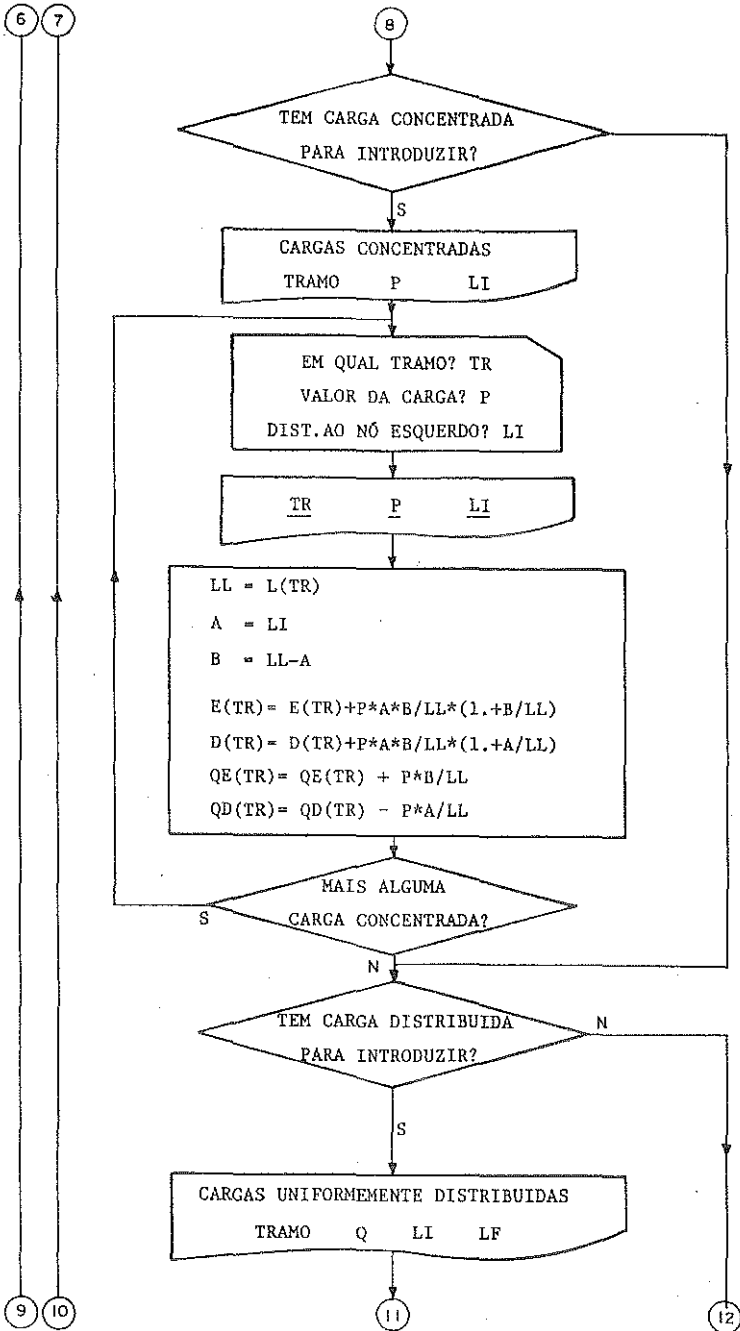
Impressão de dados da viga

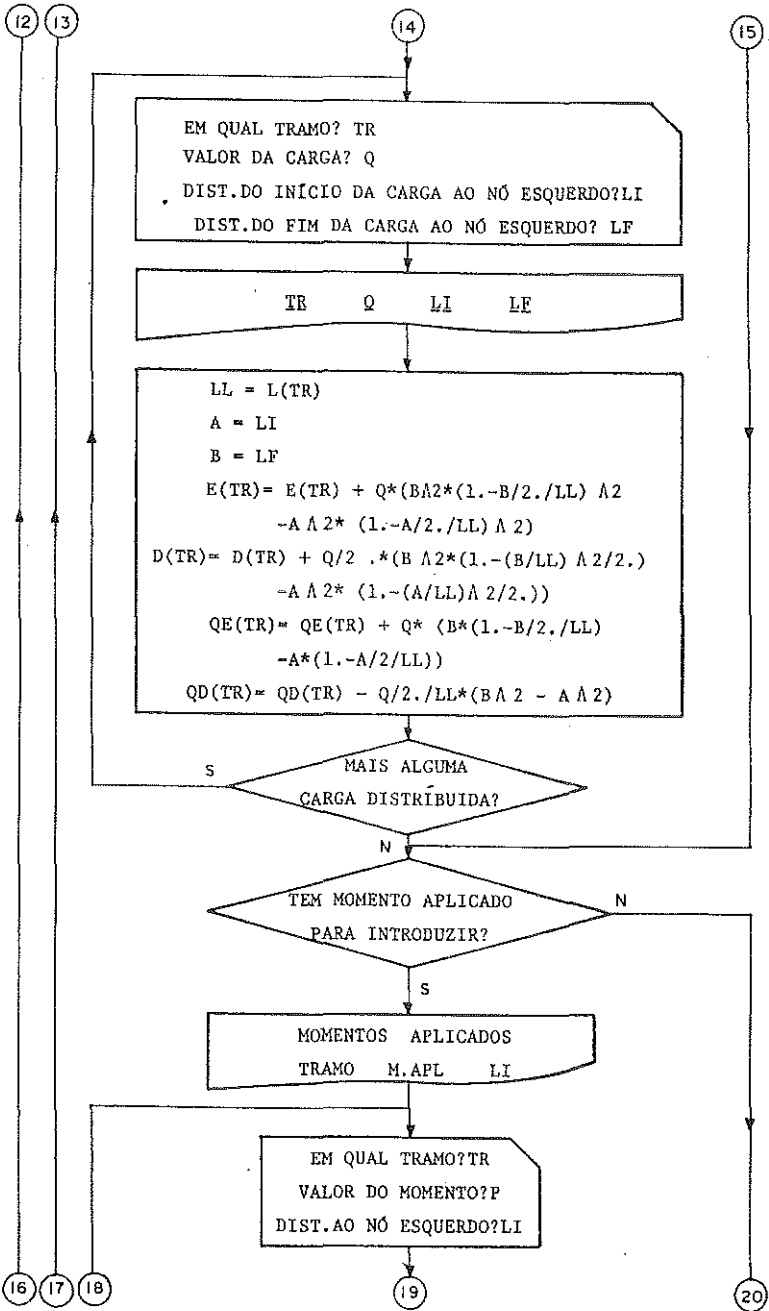
VIGA NV\$		
N TRAMOS		
TRAMO	COMPRIMENTO	MOM.DE INÉRCIA
1	L(1)	IZ(1)
⋮	⋮	⋮
N	L(N)	IZ(N)

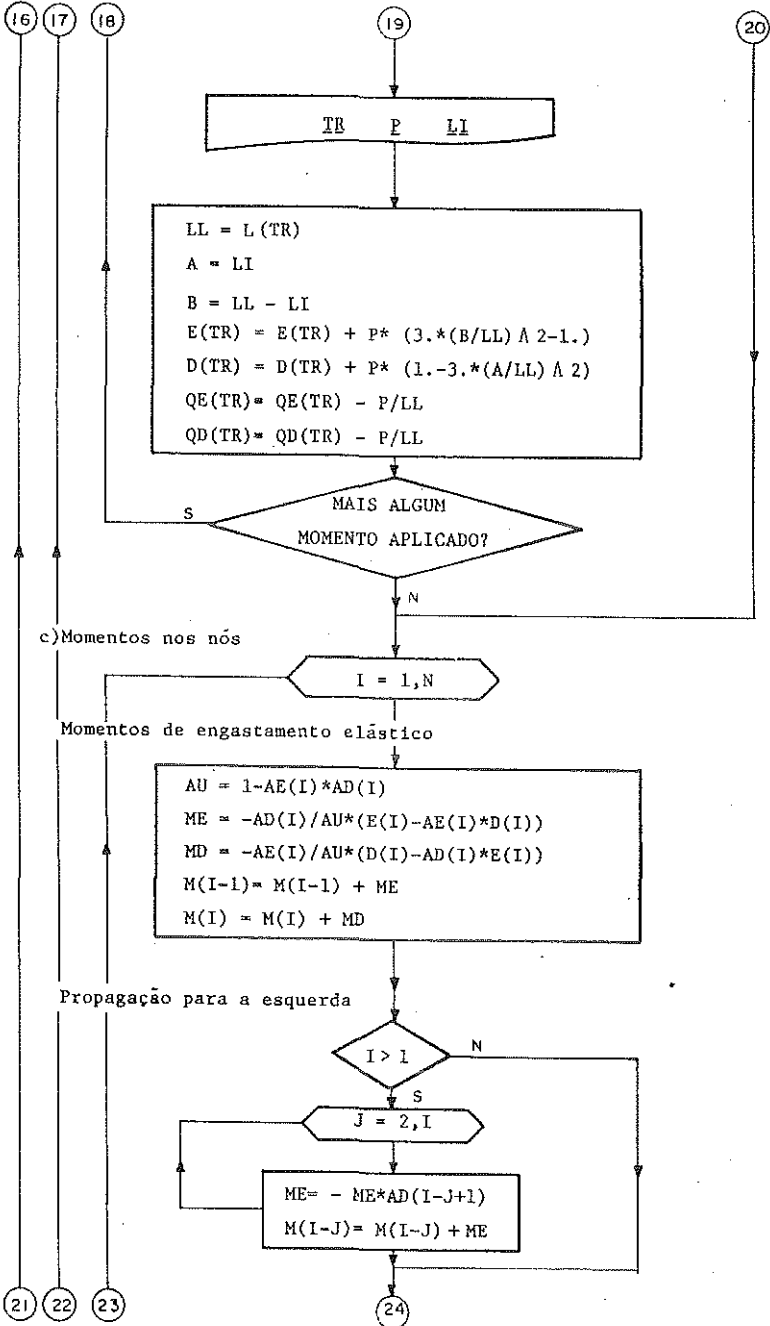
b) carregamento

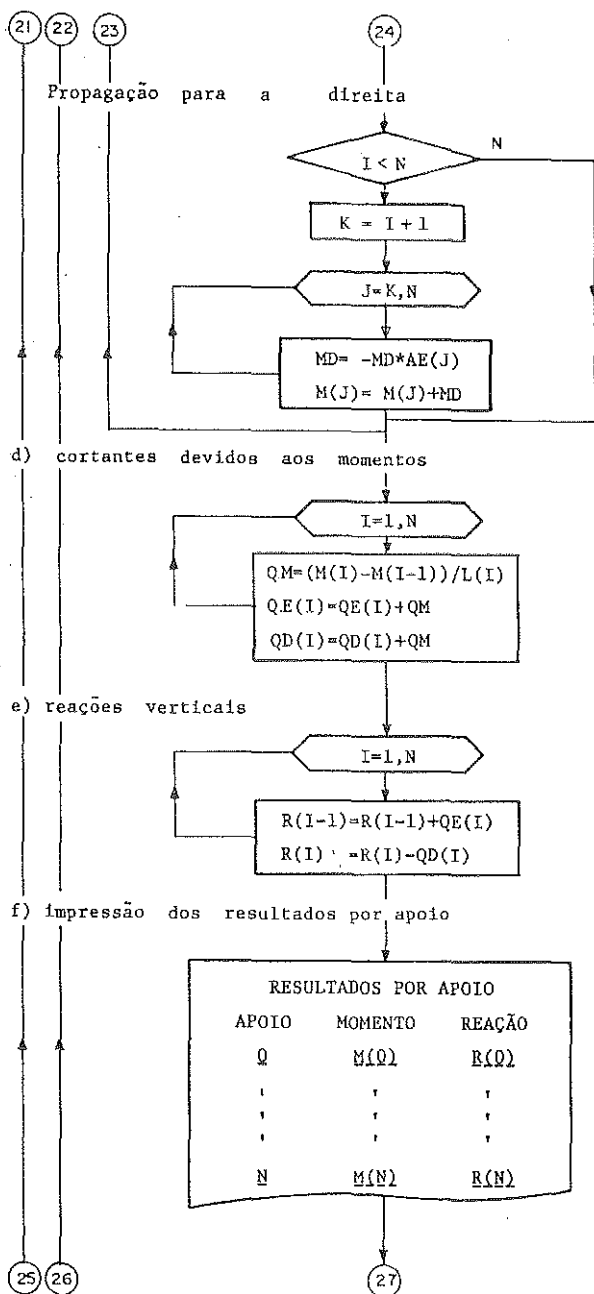
NOME DO CARREGAMENTO =? NC\$

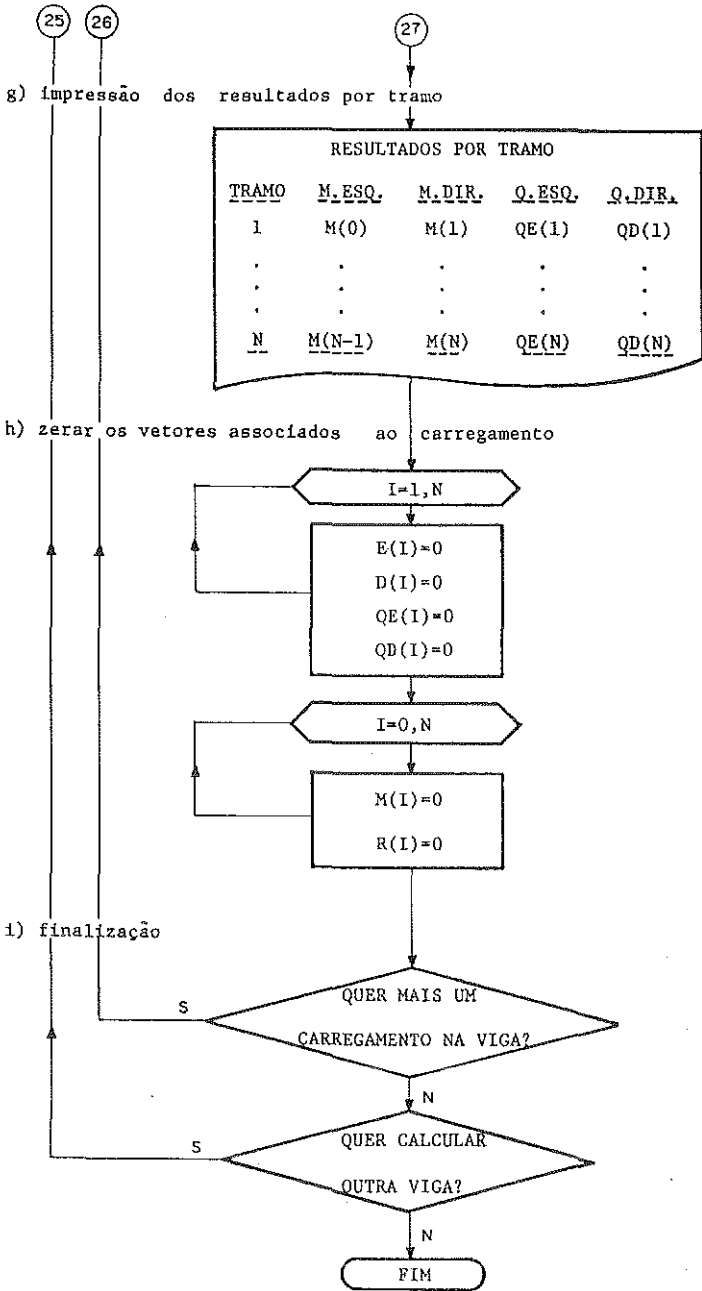
CARREGAMENTO NC\$











CAPÍTULO 7

PROGRAMAÇÃO DO CÁLCULO DE LINHAS DE INFLUÊNCIA DE ESFORÇOS INTERNOS E REAÇÕES

7.1 - Técnica aplicada

Uma maneira bastante interessante para calcular linhas de influência de esforços internos e reações em vigas contínuas, seria obtida com a conveniente utilização do teorema de Müller-Breslau, implicando no cálculo de uma linha elástica; essa linha elástica corresponde à imposição de um "deslocamento" unitário, em sentido contrário ao do esforço cuja linha de influência se deseja, à estrutura obtida pela retirada do vínculo correspondente; subentende-se estar sempre tratando com geometria de deslocamentos infinitesimais. Imposto o deslocamento, nada impediria que se repusesse o vínculo retirado. Assim, seja a viga da Fig. 7.1.a; a linha de influência do momento fletor em β seria assimilável à elástica da Fig. 7.1.b; a do esforço cortante em β à da Fig. 7.1.b e a da reação vertical em l à elástica esquematizada na Fig. 7.1.c; ao deslocamento para baixo seria atribuído o sinal positivo.

O problema se torna, então, o de impor uma variação finita na elástica dentro de um tramo ou um recalque de apoio, o que seria de solução muito simples pelo processo de propagação, bastando detalhar o cálculo de convenientes termos de carga equivalentes; depois disso determinam-se os momentos nos nós e com eles a linha elástica.

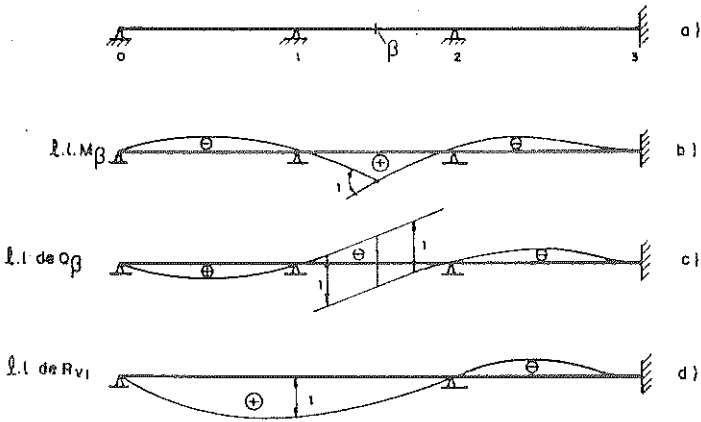


FIG. 7.1 - LINHAS DE INFLUÊNCIA

7.2 - Termos de carga equivalentes

a) Seja o caso de linha de influência do momento fletor num ponto β .

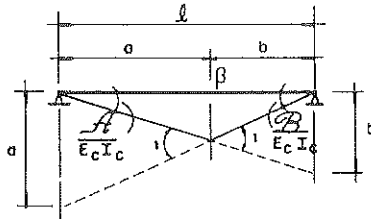


FIG. 7.2 - TERMOS DE CARGA NO 1º CASO

Da Fig. 7.2:

$$\frac{A}{E_c I_c} = \frac{b}{l} \quad \dots \quad A = E_c I_c \frac{b}{l} \quad \dots \quad \mathcal{E} = \frac{6 E I b}{l^2} \quad \dots \quad (32)$$

$$\frac{B}{E_c I_c} = \frac{a}{l} \quad \dots \quad B = E_c I_c \frac{a}{l} \quad \dots \quad \mathcal{D} = \frac{6 E I a}{l^2}$$

b) Seja o caso de linha de influência do esforço cortante num ponto β

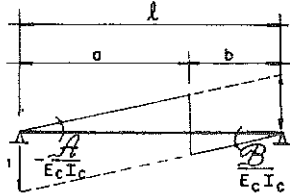


FIG. 7.3 - TERMOS DE CARGA NO 2º CASO

Da Fig.7.3

$$\frac{A}{E_c I_c} = - \frac{1}{l} \quad \therefore A = - E_c I_c \cdot \frac{1}{l} \quad \therefore \mathcal{E} = - \frac{6EI}{l^2} \quad \dots (33)$$

$$\frac{B}{E_c I_c} = \frac{1}{l} \quad \therefore B = E_c I_c \cdot \frac{1}{l} \quad \therefore \mathcal{D} = \frac{6EI}{l^2}$$

c) Seja, finalmente, o caso de linha de influência de uma reação vertical num apoio com, em princípio, um tramo à esquerda e um à direita

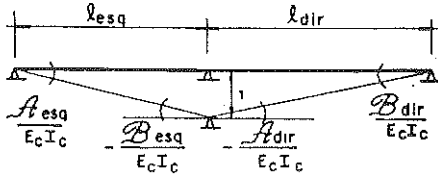


FIG. 7.4 - TERMOS DE CARGA NO 3º CASO

Da Fig.7.4:

$$\frac{A_{\text{esq}}}{E_c I_c} = \frac{1}{l_{\text{esq}}} \quad \therefore A_{\text{esq}} = E_c I_c \cdot \frac{1}{l_{\text{esq}}} \quad \therefore \mathcal{E}_{\text{esq}} = \left(\frac{6EI}{l^3}\right)_{\text{esq}}$$

$$\frac{B_{\text{esq}}}{E_c I_c} = -\frac{1}{l_{\text{esq}}} \quad \therefore B_{\text{esq}} = -E_c I_c \cdot \frac{1}{l_{\text{esq}}} \quad \therefore \mathcal{D}_{\text{esq}} = -\left(\frac{6EI}{l^3}\right)_{\text{esq}}$$

$$\frac{A_{\text{dir}}}{E_c I_c} = -\frac{1}{l_{\text{dir}}} \quad \therefore A_{\text{dir}} = -E_c I_c \cdot \frac{1}{l_{\text{dir}}} \quad \therefore \mathcal{E}_{\text{dir}} = -\left(\frac{6EI}{l^3}\right)_{\text{dir}}$$

$$\frac{B_{\text{dir}}}{E_c I_c} = \frac{1}{l_{\text{dir}}} \quad \therefore B_{\text{dir}} = E_c I_c \cdot \frac{1}{l_{\text{dir}}} \quad \therefore \mathcal{D}_{\text{dir}} = \left(\frac{6EI}{l^3}\right)_{\text{dir}}$$

... (34)

7.3 - Elástica devida aos momentos de extremidade do tramo

Seja o estado de deslocamento da Fig.7.5.a e o conveniente estado de forças da Fig.7.5.b

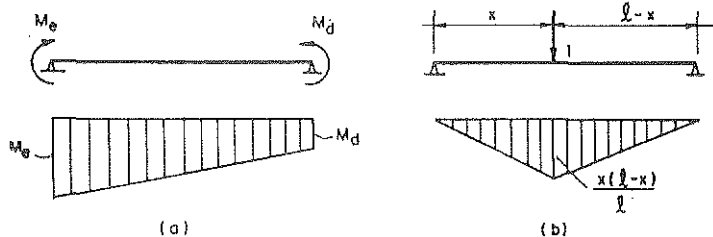


FIG. 7. 5 - CÁLCULO DA ELÁSTICA

Do P.T.V., para EI constante e utilizando tabela de integrais de produtos:

$$\delta(x) = \frac{1}{EI} \cdot \frac{\ell}{6} \cdot \frac{x(\ell-x)}{\ell} \left[\left(2 - \frac{x}{\ell}\right) M_e + \left(1 + \frac{x}{\ell}\right) M_d \right]$$

ou

$$\delta(x) = \frac{x(\ell-x)}{6EI} \left[\left(2 - \frac{x}{\ell}\right) M_e + \left(1 + \frac{x}{\ell}\right) M_d \right] \quad \dots \quad (35)$$

Observe-se que, além dessa elástica devida aos momentos, deverá ser superposta eventualmente uma outra, devida aos deslocamentos impostos internamente ao tramo, conforme Fig.7.2 e 7.3, ou a um apoio, conforme Fig.7.4.

7.4 - Características essenciais do programa

Neste item pretende-se organizar um fluxograma que determine linhas de influência de momento fletor, esforço cortante e reação vertical no apoio, para a viga contínua da Fig.7.6; os apoios extremos, O e N, poderão ser engastados ou articulados.

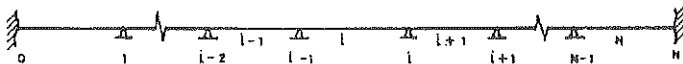


FIG. 7.6 — VIGA CONTÍNUA

Cada tramo será dividido em DV partes iguais, definindo DV+1 pontos numerados de O a DV, a partir da esquerda. Só poderá ser solicitada a linha de influência, de um es esforço interno, num ponto definido por um número inteiro PT qualquer dentre os DV+1 pontos associados ao tramo TR.

O programa poderá ser facilmente modificado para permitir a introdução de tramos em balanço e para fornecer resultados numéricos que facilitem a utilização posterior das linhas de influência.

Em função de PT, DV e TR, e com o módulo de elasticidade assumido como unitário, os termos de carga do item 7.2 ficariam:

a) Para o caso de linha de influência de momento fletor:

Das expressões (32):

$$E(TR) = 6 \cdot \frac{IZ(TR)}{L(TR)} \cdot \frac{DV - PT}{DV} \quad \dots \quad (36)$$
$$D(TR) = 6 \cdot \frac{IZ(TR)}{L(TR)} \cdot \frac{PT}{DV}$$

b) Para o caso de linha de influência de esforços cortante:

Das expressões (33)

$$E(TR) = -6 \cdot \frac{IZ(TR)}{(L(TR))^2} \quad \dots \quad (37)$$
$$D(TR) = 6 \cdot \frac{IZ(TR)}{(L(TR))^2}$$

c) Para o caso de linha de influência de reação no apoio AP:

Das expressões (34):

$$E(AP) = 6 \cdot \frac{IZ(AP)}{(L(AP))^2}$$
$$D(AP) = -6 \cdot \frac{IZ(AP)}{(L(AP))^2}$$

$$E(AP+1) = -6 \cdot \frac{IZ(AP+1)}{(L(AP+1))^2} \quad \dots \quad (38)$$

$$D(AP+1) = 6 \cdot \frac{IZ(AP+1)}{(L(AP+1))^2}$$

Em função de PT, DV, TR e também do ponto definido por J dentre os DV+1 pontos, assimilando $\delta(x)$ à ordenada $\eta(x)$ da linha de influência, a expressão (35) aplicada ao tramo I ficaria como:

$$ET(J) = \frac{(L(I))^2}{6 \cdot IZ(I) \cdot DV^3} \cdot J \cdot (DV-J) \cdot \left[(2DV-J) \cdot MA(I-1) + (DV+J) \cdot MA(I) \right] \quad \dots \quad (39)$$

onde MA(K) corresponde ao momento fletor na viga sobre o apoio K.

A esse ET(J) deveria ser superposta uma outra parcela, ou uma outra elástica, no tramo TR ao qual pertence o esforço interno cuja linha de influência se quer determinar, ou no tramo AP e AP+1 no caso de reação de apoio. Assim, as parcelas a adicionar, nos diversos casos, seria:

a) Para o caso de momento fletor em PT do tramo TR
Para o ponto J, com o auxílio da Fig.7.2:

Se $J \leq PT$:

$$ET(J) = \frac{DV-PT}{DV^2} \cdot L(TR) \cdot J \quad \dots \quad (40)$$

Se $J \geq PT$:

$$ET(J) = \frac{DV-PT}{DV^2} \cdot L(TR) \cdot J - \frac{J-PT}{DV} \cdot L(TR) \quad \dots \quad (41)$$

TR b) Para o caso de esforço cortante em PT do tramo

Para o ponto J, com o auxílio da Fig.7.3:

Se $J < PT$:

$$ET(J) = - \frac{J}{DV} \quad \dots \quad (42)$$

Se $J > PT$

$$ET(J) = 1 - \frac{J}{DV} \quad \dots \quad (43)$$

Observe-se que, no caso, as igualdades das expressões (42) e (43) dão valores diferentes, implicando numa descontinuidade da linha de influência.

c) Para o caso de reação vertical no apoio AP:

Se J pertence ao tramo AP:

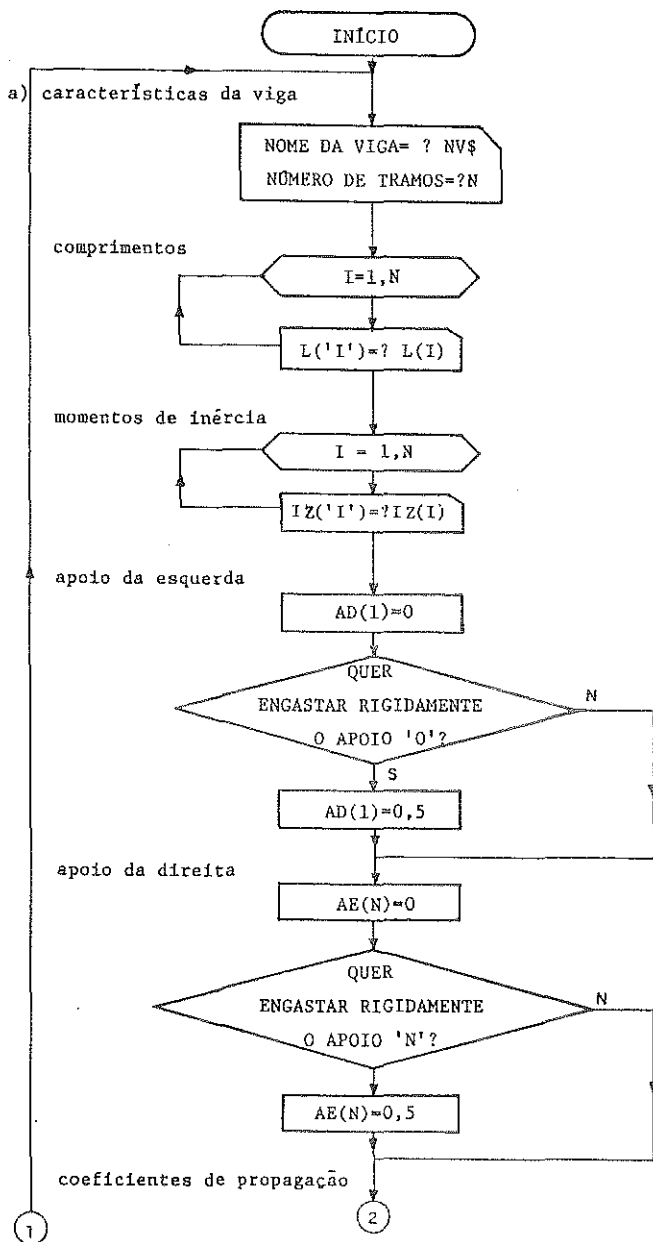
$$ET(J) = \frac{J}{DV} \quad \dots \quad (44)$$

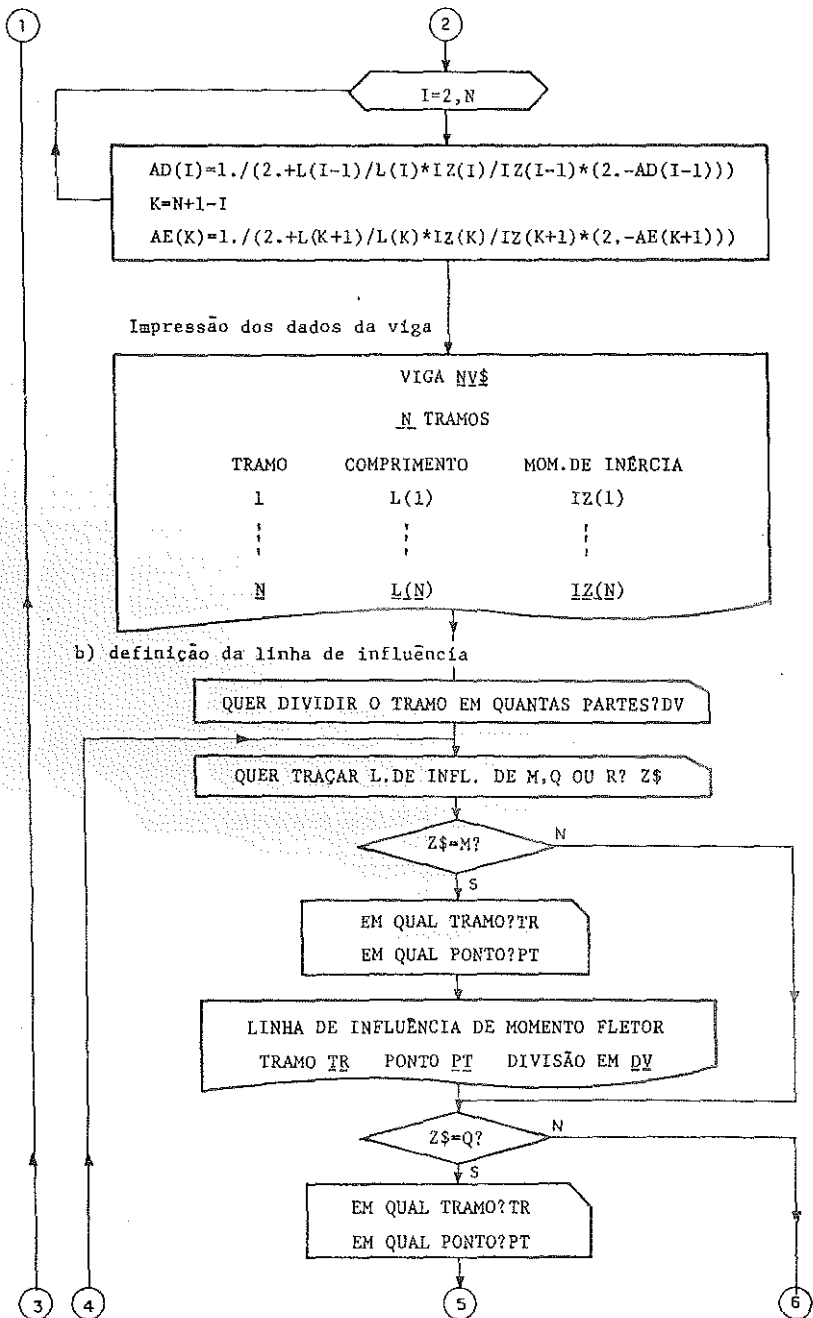
Se J pertence ao tramo AP+1

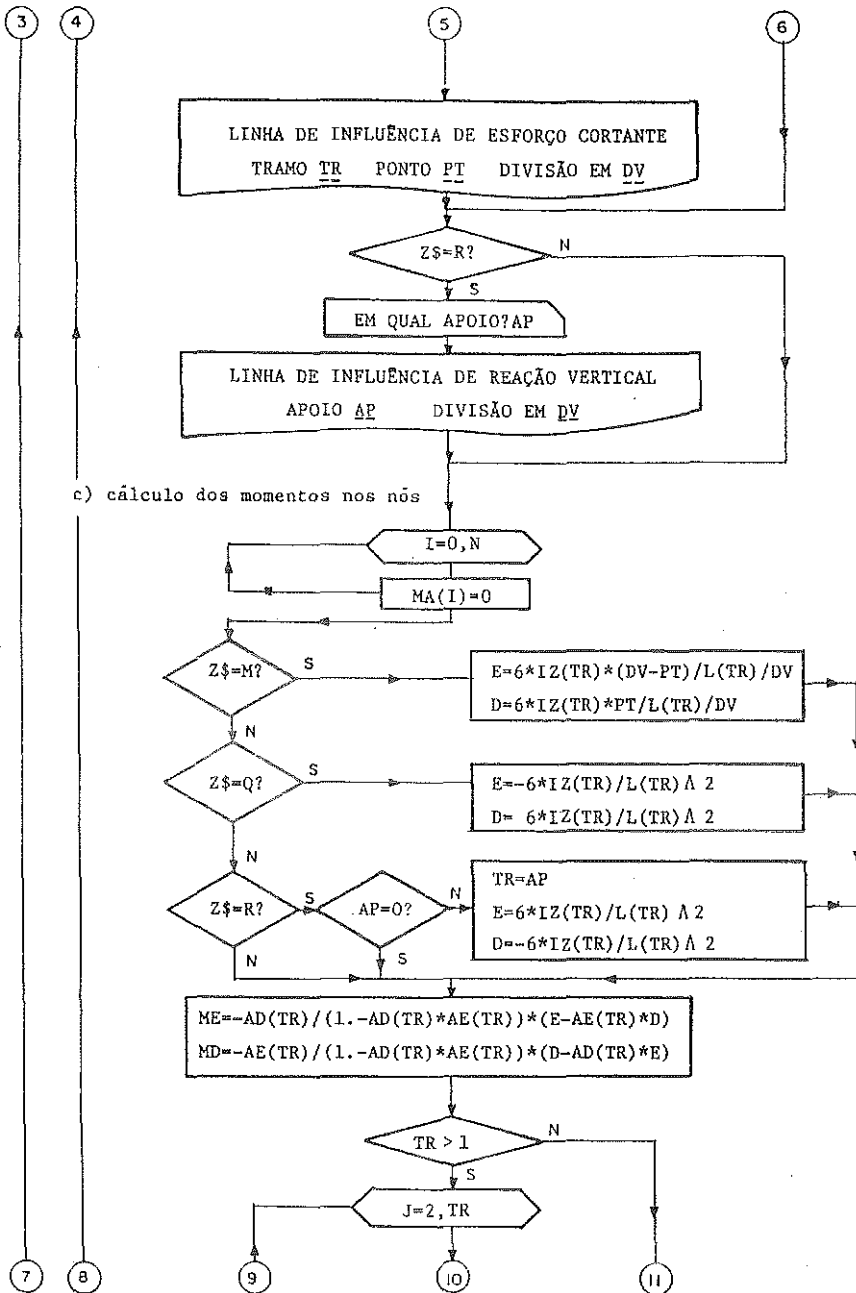
$$ET(J) = 1 - \frac{J}{DV} \quad \dots \quad (45)$$

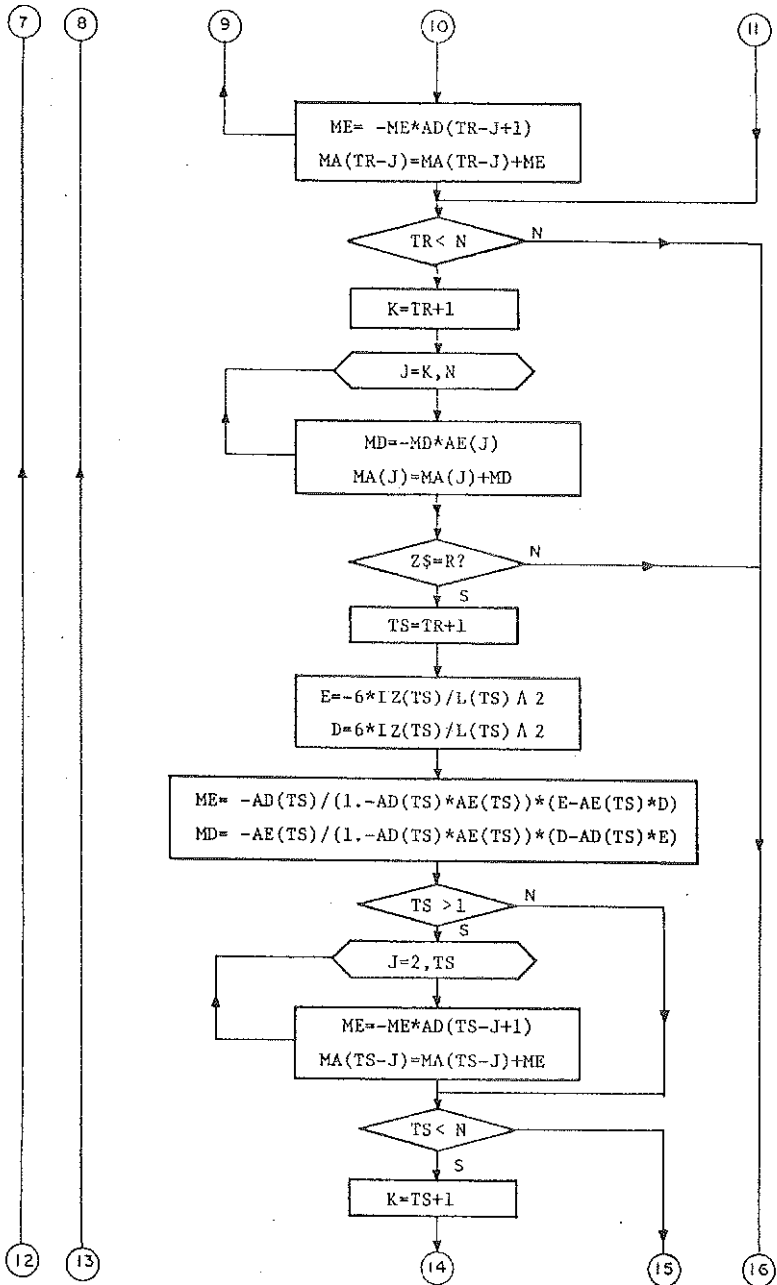
7.5 - Fluxograma

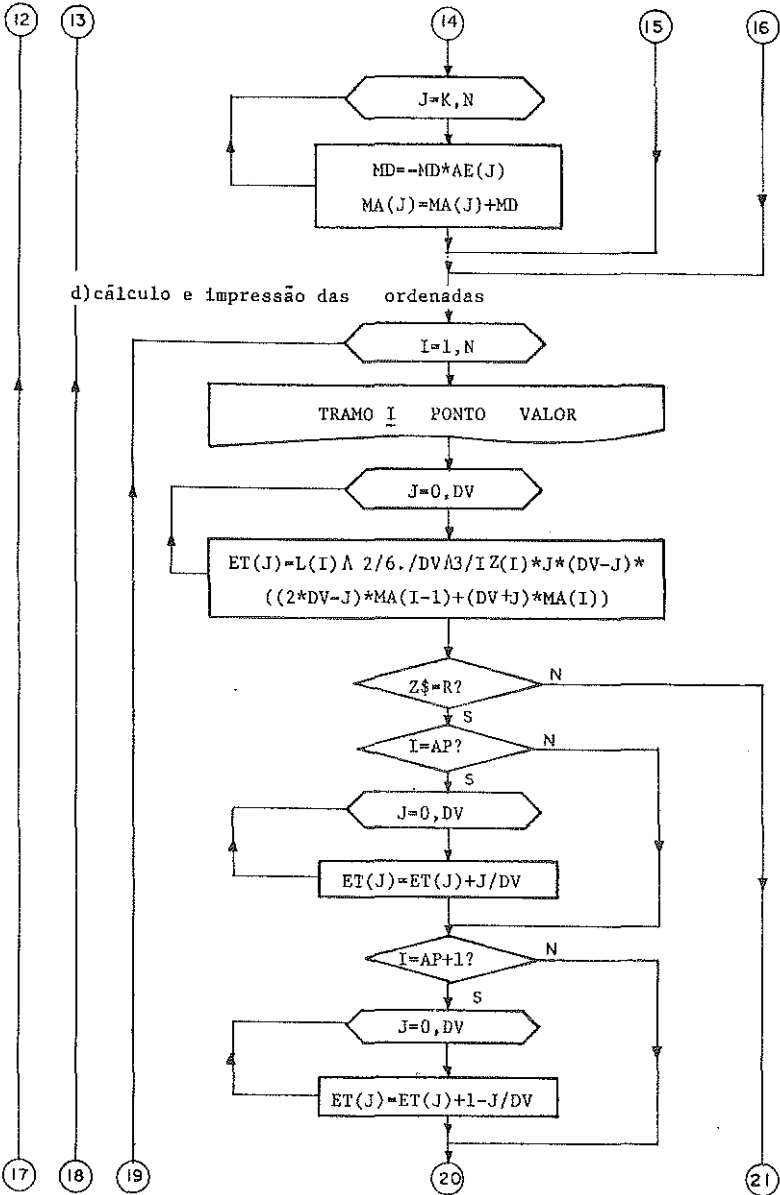
Com o detalhamento dos itens anteriores é fácil montar um fluxograma tanto quanto possível eficiente; esse fluxograma prevê, em princípio, a linguagem BASIC, já que se pretende utilizar computadores de pequeníssimo porte; a adaptação para qualquer outra linguagem é, entretanto, imediata.

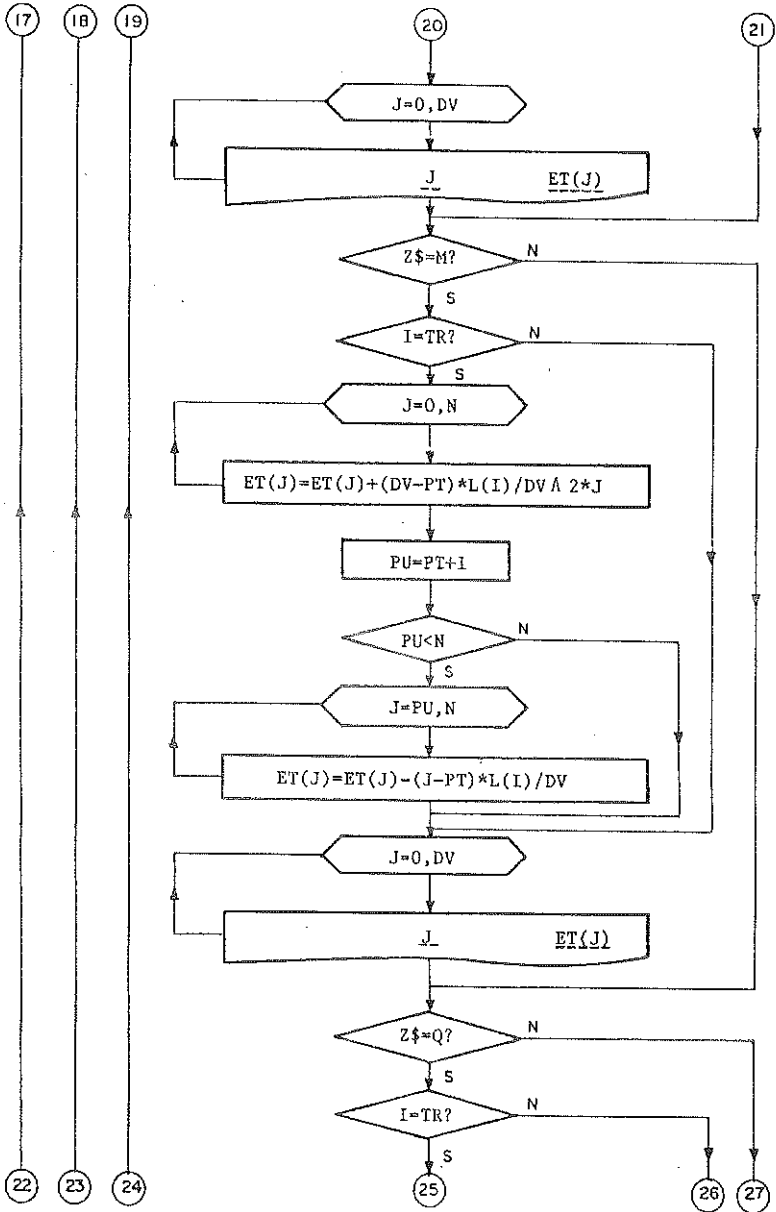












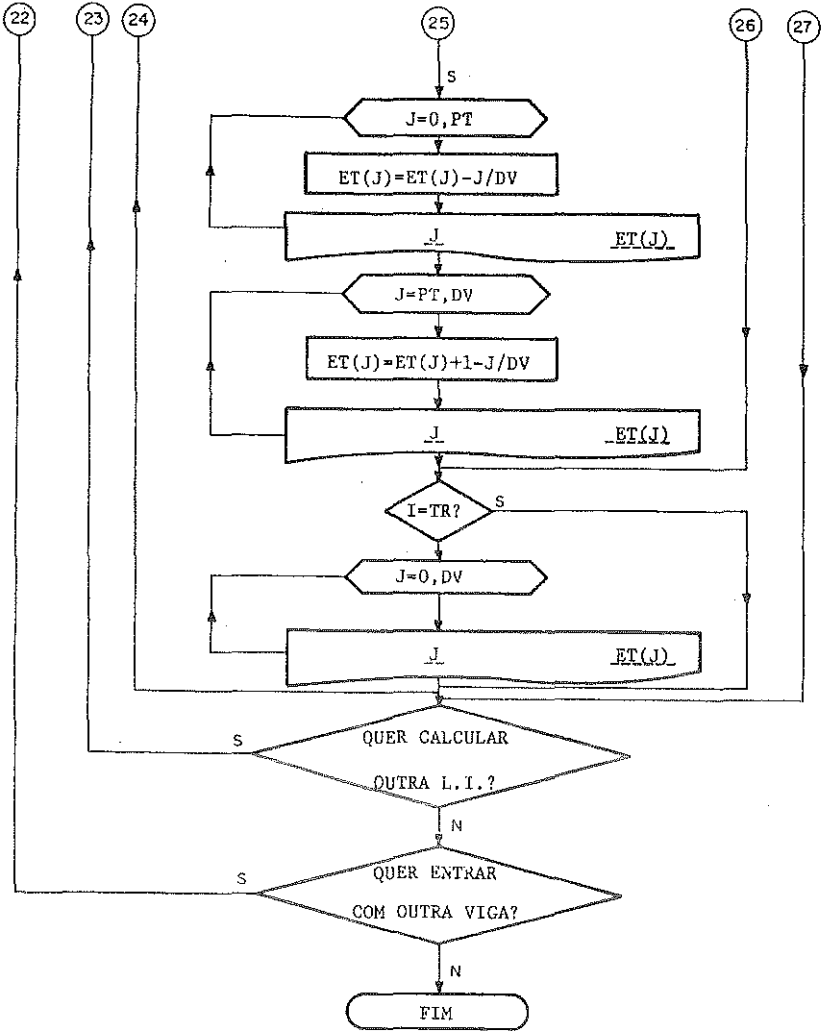


TABELA 1

COEFICIENTES DE PROPAGAÇÃO

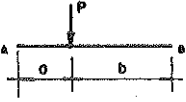
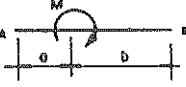
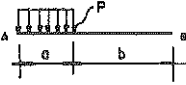
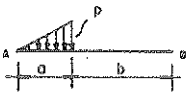

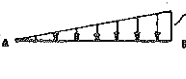

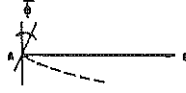
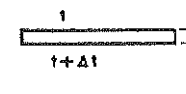
$$n = \frac{\xi^{l_{ant}}}{\xi^l} \quad \alpha = \frac{l}{2 + n(2 - \alpha_{ant})}$$

n	α																α
	0,00	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,22	0,24	0,26	0,28	0,30	0,32	0,34	0,36	0,38	0,40	
0,25	400	405	406	407	407	408	409	410	411	412	412	413	414	415	416	417	421
0,26	397	402	403	403	404	405	406	407	408	409	410	410	411	412	413	414	418
0,28	391	396	397	398	398	399	400	401	402	403	404	405	406	407	408	408	413
0,30	385	390	391	392	393	394	395	396	397	397	398	399	400	401	402	403	408
0,32	379	384	385	386	387	388	389	390	391	392	393	394	395	396	397	398	403
0,34	373	379	380	381	382	383	384	385	386	387	388	389	390	391	392	393	398
0,36	368	374	375	376	377	378	379	380	381	382	383	384	385	386	387	388	394
0,38	362	368	369	370	372	373	374	375	376	377	378	379	380	381	382	383	389
0,40	357	363	364	365	367	368	369	370	371	372	373	374	375	377	378	379	385
0,42	352	358	360	361	362	363	364	365	366	367	368	370	371	372	373	374	380
0,44	347	354	355	356	357	358	359	360	362	363	364	365	366	367	369	370	376
0,46	342	349	350	351	352	354	355	356	357	358	359	361	362	363	364	365	372
0,48	338	345	346	347	348	349	350	352	353	354	355	356	358	359	360	361	368
0,50	333	340	341	342	344	345	346	347	348	350	351	352	353	355	356	357	364
0,52	329	336	337	338	339	341	342	343	344	345	347	348	349	351	352	353	360
0,54	325	332	333	334	335	336	338	339	340	341	343	344	345	347	348	349	356
0,56	321	328	329	330	331	332	334	335	336	337	339	340	341	343	344	345	352
0,58	316	324	325	326	327	329	330	331	332	334	335	336	338	339	340	342	348
0,60	313	320	321	322	323	325	326	327	329	330	331	332	334	335	336	338	345
0,62	309	316	317	318	320	321	322	323	325	326	327	329	330	331	333	334	341
0,64	305	312	313	315	316	317	319	320	321	322	324	325	327	328	329	331	338
0,66	301	309	310	311	312	314	315	316	318	319	320	322	323	324	326	327	334
0,68	298	305	306	308	309	310	311	313	314	315	317	318	320	321	322	324	331
0,70	294	302	303	304	305	307	308	309	311	312	313	315	316	318	319	321	328
0,72	291	298	299	301	302	303	305	306	307	309	310	312	313	314	316	317	325
0,74	287	295	296	297	299	300	301	303	304	306	307	308	310	311	313	314	322
0,76	284	292	293	294	296	297	298	300	301	302	304	305	307	308	309	311	318
0,78	281	288	290	291	292	294	295	296	298	299	301	302	304	305	306	308	315
0,80	278	285	287	288	289	291	292	293	295	296	298	299	300	302	303	305	313
0,82	275	282	284	285	286	288	289	290	292	293	295	296	298	299	300	302	310
0,84	272	279	281	282	283	285	286	287	289	290	292	293	295	296	298	299	307
0,86	269	276	278	279	280	282	283	285	286	287	289	290	292	293	295	296	304
0,88	266	274	275	276	276	279	280	282	283	285	286	287	289	290	292	293	301
0,90	263	271	272	274	275	276	278	279	280	282	283	285	286	288	289	291	299
0,92	260	268	269	271	272	274	275	276	278	279	281	282	284	285	287	288	296
0,94	258	265	267	268	269	271	272	274	275	276	278	279	281	282	284	285	293
0,96	255	263	264	266	267	268	270	271	272	274	275	277	278	280	281	283	291
0,98	253	260	262	263	264	266	267	268	270	271	273	274	276	277	279	280	288
1,00	250	258	259	260	262	263	265	266	267	269	270	272	273	275	276	278	286
1,05	244	252	253	254	256	257	258	260	261	263	264	266	267	269	270	272	280
1,10	238	246	247	249	250	251	253	254	255	257	258	260	261	263	264	266	274
1,15	233	240	242	243	244	246	247	249	250	251	253	254	256	257	259	260	268
1,20	227	235	236	238	239	240	242	243	245	246	248	249	251	252	254	255	263
1,25	222	230	231	233	234	235	237	238	240	241	242	244	245	247	248	250	258
1,30	217	225	226	228	229	230	232	233	235	236	238	239	241	242	244	245	253
1,35	213	220	222	223	224	226	227	229	230	231	233	234	236	237	239	240	248
1,40	208	216	217	219	220	221	223	224	225	227	228	230	231	233	234	236	244
1,45	204	212	213	214	216	217	218	220	221	223	224	225	227	228	230	231	240
1,50	200	207	209	210	211	213	214	216	217	218	220	221	223	224	226	227	235
1,55	196	204	205	206	207	209	210	212	213	214	216	217	219	220	222	223	231
1,60	192	200	201	202	204	205	206	208	209	210	212	213	215	216	218	219	227
1,65	189	196	197	199	200	201	203	204	205	207	208	210	211	212	214	216	223
1,70	185	192	194	195	196	198	199	200	202	203	204	206	207	209	210	212	220
1,75	182	189	190	192	193	194	196	197	198	200	201	202	204	205	207	208	216
1,80	179	186	187	188	190	191	192	193	195	196	198	199	200	202	203	205	213
1,85	175	183	184	185	186	188	189	190	192	193	194	196	197	199	200	202	209
1,90	172	179	181	182	183	185	186	187	188	190	191	193	194	195	197	198	206
1,95	169	176	178	179	180	181	183	184	185	187	188	190	191	192	194	195	203
2,00	167	174	175	176	177	179	180	181	182	184	185	187	188	189	191	192	200
2,10	161	168	169	171	172	173	174	176	177	178	180	181	182	184	185	187	194
2,20	156	163	164	165	167	168	169	170	172	173	174	176	177	178	180	181	189
2,30	152	158	159	160	162	163	164	165	167	168	169	171	172	173	175	176	183
2,40	147	154	155	156	157	158	159	161	162	163	164	166	167	168	170	171	179
2,50	143	149	150	152	153	154	155	156	157	159	160	161	163	164	165	167	174
2,60	139	145	146	147	149	150	151	152	153	155	156	157	158	160	161	162	169
2,70	135	141	142	144	145	146	147	148	149	151	152	153	154	156	157	158	165
2,80	132	136	139	140	141	142	143	144	146	147	148	149	150	152	153	154	161
2,90	128	134	135	136	137	139	140	141	142	143	144	146	147	148	149	151	157
3,00	125	131	132	133	134	135	136	137	139	140	141	142	143	145	146	147	154
3,10	122	128	129	130	131	132	133	134	135	136	138	139	140	141	142	144	150
3,20	119	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	136	137	138	139	140	147
3,30	116	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	133	134	135	136	137	144
3,40	114	119	120	121	122	123	124	125	126	127	129	130	131	132	133	134	141
3,50	111	117	118	118	119	120	122	123	124	125	126	127	128	129	130	132	138
3,60	109	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	127	128	129	135
3,70	106	112	113	114	114	115	116	117	119	120	121	122	123	124	125	126	132
3,80	104	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	123	124	130
3,90	102	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	127
4,00	100	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	125
n	α	0,00	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,22	0,24	0,26							

TABELA 2

TERMOS DE CARGA

(Barra de comprimento l)

CARGA	\mathcal{E}	\mathcal{D}
	$\frac{Pab}{l} \cdot \left(1 + \frac{b}{l}\right)$	$\frac{Pab}{l} \cdot \left(1 + \frac{a}{l}\right)$
	$M \cdot \left(3 \cdot \frac{b^2}{l^2} - 1\right)$	$M \cdot \left(1 - 3 \cdot \frac{a^2}{l^2}\right)$
	$\frac{Pa^2}{4} \left(1 + \frac{b}{l}\right)^2$	$\frac{Pa^2}{4} \left(2 - \frac{a^2}{l^2}\right)$
	$\frac{Pa^2}{60} \left(7 + 2l \frac{b}{l} + 12 \frac{b^2}{l^2}\right)$	$\frac{Pa}{15} \left(5 - 3 \frac{a^2}{l^2}\right)$
	$\frac{Pl^2}{4}$	$\frac{Pl^2}{4}$
	$\frac{7}{60} Pl^2$	$\frac{2}{15} Pl^2$
	$\frac{6 E I \bar{\Delta}}{l^2}$	$-\frac{6 E I \bar{\Delta}}{l^2}$
	$-\frac{6 E I \bar{\phi}}{l}$	0
	$\frac{3 E I}{h} \alpha_t \Delta_t$	$\frac{3 E I}{h} \alpha_t \Delta_t$

SERVIÇO GRÁFICO - EESC/USP
2001