

# **F LAMBAGEM DE BARRAS PRISMÁTICAS**

**BARBATO, Roberto Luiz de Arruda**

# FLAMBAGEM DE BARRAS PRISMÁTICAS

## 1. CONCEITOS BÁSICOS

Em relação a uma dada referência o equilíbrio de um sistema estrutural pode ser, como se sabe, ou estável, ou instável, ou ainda, indiferente.

Para identificar cada uma das três formas de equilíbrio modifica-se a configuração do sistema por meio de uma pequena perturbação e em seguida analisa-se o que ocorre quando a causa perturbadora desaparece.

Se ao desaparecer a causa perturbadora o sistema retornar à sua configuração inicial diz-se que o equilíbrio do sistema é estável. Se, por outro lado, ao desaparecer a causa perturbadora o sistema se afastar cada vez mais de sua configuração inicial diz-se que o equilíbrio do sistema é instável. Por fim, se o sistema permanecer na configuração deslocada ao desaparecer o agente perturbador diz-se que o equilíbrio do sistema é indiferente.

Para melhor fixar o conceito acima exposto considerem-se três barras prismáticas e homogêneas como as que se mostram na figura 1.1.

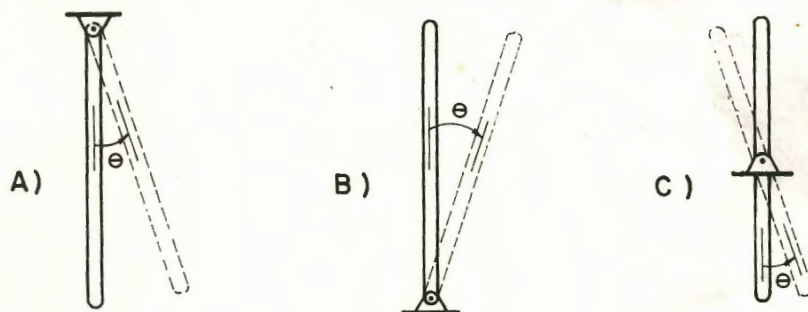


FIGURA 1.1

Percebe-se com clareza que as três barras estão igualmente em equilíbrio na posição vertical. A forma de equilíbrio, todavia, é diferente. De fato, ao desaparecer a causa que provocou o deslocamento angular, a barra A retorna à sua posição inicial, a barra B se afasta de sua posição inicial e a barra C permanece na posição deslocada (inclinada). Conclui-se, portanto, que o equilíbrio da barra A é estável, da barra B é instável e da barra C é indiferente.



Situação análoga ocorre com os cilindros A, B e C que repousam sobre a superfície cilíndrica S, figura 1.2. Percebe-se facilmente que o equilíbrio do cilindro A é estável, do cilindro B é instável e do cilindro C é indiferente.

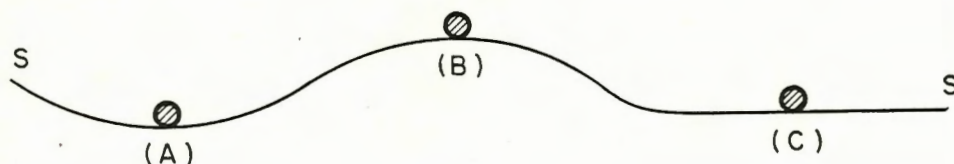


FIGURA 1.2

Definidas as formas de equilíbrio — estável, instável e indiferente — pode-se iniciar o estudo da flambagem de barras prismáticas.

Assim, para conceituar o fenômeno da flambagem considere-se uma barra como a esquematizada na figura 1.3.



FIGURA 1.3

Suponha-se que o eixo da barra seja retilíneo, que a sua seção transversal seja constante, que a carga P seja axial, que as articulações das extremidades sejam ideais (sem atrito) e que o material empregado na construção da barra seja perfeitamente homogêneo.

Sob estas condições pode-se dizer que a forma reta de equilíbrio certamente existe. De fato, as tensões normais se distribuem uniformemente na seção transversal e a sua resultante — a força normal N — passa pelo CG da seção e equilibra a força P (caso de compressão uniforme,  $\sigma A = N = P$ ).

Embora exista, é necessário verificar se a configuração reta de equilíbrio é estável. Para isso, basta modificar levemente esta configuração de equilíbrio com

uma causa perturbadora qualquer e analisar o que ocorre quando a causa perturbadora desaparece.

Imagine-se então que a causa perturbadora provoque, momentaneamente, a flexão da barra, figura 1.4.

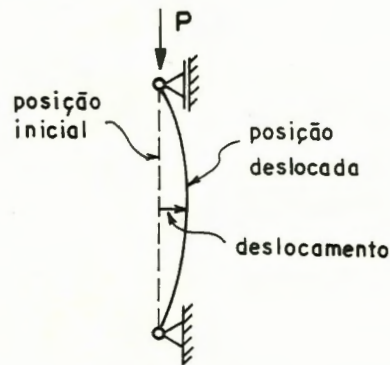


FIGURA 1.4

Nesta situação surgem dois momentos. Um deles é o momento externo  $M_e$  que tende a ampliar a curvatura da barra. O outro é o momento interno  $M_i$  (momento fletor) gerado pelas tensões e que tende a retificar a barra.

Se o momento interno (resistente) for maior que o externo, isto é,  $M_i > M_e$ , retirada a causa perturbadora a barra volta a assumir a configuração reta de equilíbrio. Neste caso o equilíbrio da forma reta é considerado estável.

Se o momento externo for maior que o interno, isto é,  $M_i < M_e$ , retirada a causa perturbadora a barra continua a se encurvar e afasta-se cada vez mais da forma reta de equilíbrio. Neste caso o equilíbrio da forma reta é considerado instável.

Se o momento interno for igual ao momento externo, isto é,  $M_i = M_e$ , retirada a causa perturbadora a barra fica em equilíbrio na forma fletida. Neste caso o equilíbrio é considerado indiferente.

Lembrando que o momento interno  $M_i$  é dado por  $Elv''$  e observando que o momento externo é igual a  $Pv$ , as três formas de equilíbrio são caracterizadas por:

Equilíbrio Instável:  $M_i < M_e \therefore Elv'' < Pv$

Equilíbrio Estável:  $M_i > M_e \therefore Elv'' > Pv$

Equilíbrio Indiferente:  $M_i = M_e \therefore Elv'' = Pv$

A carga determinada com a condição de equilíbrio indiferente, isto é,  $EIv'' = Pv$ , é designada por carga crítica ou carga de flambagem  $P_{fl}$ . Assim, as três formas de equilíbrio podem ser identificadas por:

Equilíbrio Estável:  $P < P_{fl}$

Equilíbrio Instável:  $P > P_{fl}$

Equilíbrio Indiferente:  $P = P_{fl}$

Do que foi exposto pode-se entender flambagem como sendo o fenômeno que ocorre em uma estrutura, ou em um de seus elementos, quando sua forma que era de equilíbrio estável passa ser de equilíbrio instável.

No caso da barra prismática considerada, a flambagem ocorre quando a forma reta de equilíbrio torna-se instável ( $P > P_{fl}$ ).

## 2. FLAMBAGEM DE EULER

Considere-se a barra prismática esquematizada na figura 2.1.

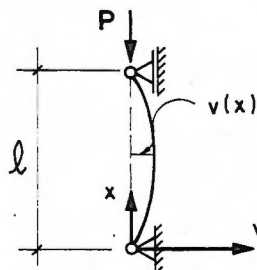


FIGURA 2.1

Sendo  $M_i = EIv''$  e  $M_e = Pv$ , a condição de equilíbrio indiferente se escreve:

$$EIv''(x) = -P_{fl}v(x) \quad (2.1)$$

Admitindo-se módulo de elasticidade constante — o que vale para  $\sigma \leq \sigma_p = \sigma_{el} = \sigma_{es}$ , diagrama  $(\sigma x \varepsilon)$  da figura 2.2-a, e para  $\sigma = \sigma_p = \sigma_{el}$ , diagrama  $(\sigma x \varepsilon)$  da figura 2.2-b — e fazendo

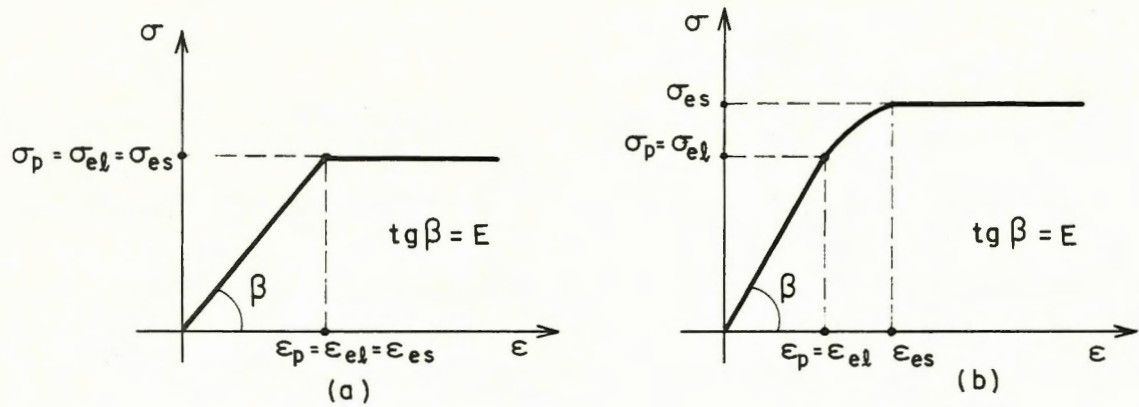


FIGURA 2.2

$$\alpha = (P_{fl} / EI_z)^{1/2} \quad (2.2)$$

da equação (2.1), após integração, obtém-se

$$v(x) = C_1 \text{sen}(\alpha x) + C_2 \text{cos}(\alpha x) \quad (2.3)$$

Para determinar as constantes de integração  $C_1$  e  $C_2$  usam-se, figura 2.1, as condições de extremidade  $v = 0$  para  $x = 0$  e  $v = 0$  para  $x = \ell$ .

Impondo-se a primeira condição à equação (2.3), tem-se

$$0 = C_1 \text{sen}(0) + C_2 \text{cos}(0) \quad (2.4)$$

donde

$$C_2 = 0 \quad (2.5)$$

Sendo  $C_2$  igual a zero ( $C_2 = 0$ ) a equação (2.3) da linha elástica fica:

$$v(x) = C_1 \text{sen}(\alpha x) \quad (2.6)$$

Impondo-se a segunda condição de extremidade à equação (2.6), obtém-se:

$$0 = C_1 \text{sen}(\alpha \ell) \quad (2.7)$$

Esta equação se verifica ou para  $C_1$  igual a zero ou para  $\text{sen}(\alpha\ell)$  igual a zero.

Admitindo-se  $C_1 = 0$  conclui-se de (2.6) que  $v(x) = 0$ . Este resultado,  $v(x) = 0$ , mostra que o equilíbrio se estabelece sem que a barra abandone a sua configuração inicial. É equivalente dizer que a forma reta é uma configuração de equilíbrio.

Supondo então  $\text{sen}(\alpha\ell) = 0$ , resulta

$$\alpha\ell = \ell \sqrt{\frac{P_{fl}}{EI_z}} = n\pi \quad (n = 0, 1, 2, 3.) \quad (2.8)$$

donde:

$$P_{fl} = \frac{n^2 \pi^2 EI_z}{\ell^2} \quad (n = 0, 1, 2, 3.) \quad (2.9)$$

Esta última expressão mostra que existem várias cargas de flambagem, obtidas fazendo-se  $n = 1, 2, 3$ . Obviamente a carga a ser considerada como carga crítica ou carga de flambagem é a que resulta de (2.9) com  $n = 1$ . Então:

$$P_{fl} = \frac{\pi^2 EI_z}{\ell^2} \quad (2.10)$$

Nesta expressão, recorde-se,  $E$  é o módulo de elasticidade do material da barra e  $I_z$  é o momento de inércia de sua seção transversal em relação a um dos eixos centrais (principais) de inércia. O comprimento  $\ell$  é chamado de comprimento de flambagem da barra. No caso estudado — barra com articulação nas extremidades — o comprimento de flambagem é igual ao comprimento da barra. Assim, pode-se escrever:

$$P_{fl} = \frac{\pi^2 EI_z}{(\ell_{fl})^2} = \frac{\pi^2 EI_z}{(\ell)^2} \quad (2.11)$$

Empregando-se procedimento análogo pode-se obter a carga de flambagem de barras com outros tipos de vínculos. Para os casos mais comuns, figura 2.3, têm-se:

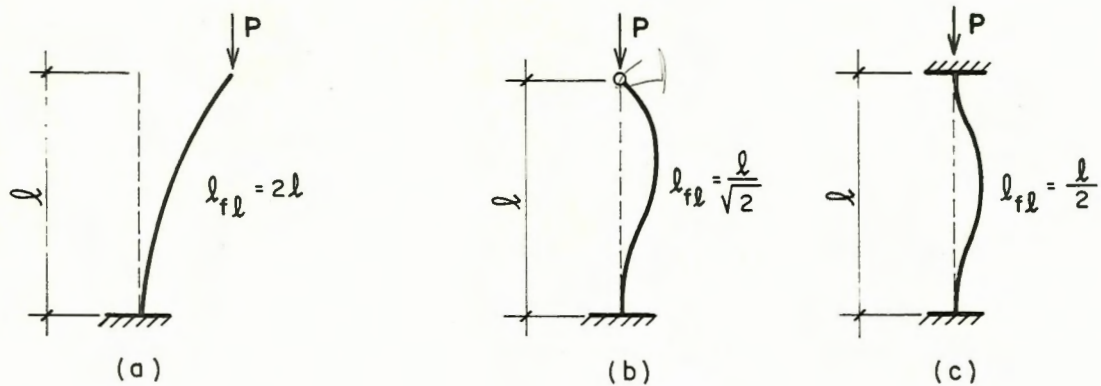


FIGURA 2.3

$$(P_{fl})_a = \frac{\pi^2 EI_z}{(l_{fl})^2} = \frac{\pi^2 EI_z}{(2l)^2} = \frac{\pi^2 EI_z}{4l^2} \quad (2.12)$$

$$(P_{fl})_b = \frac{\pi^2 EI_z}{(l_{fl})^2} = \frac{\pi^2 EI_z}{(l/\sqrt{2})^2} = \frac{2\pi^2 EI_z}{l^2} \quad (2.13)$$

$$(P_{fl})_c = \frac{\pi^2 EI_z}{(l_{fl})^2} = \frac{\pi^2 EI_z}{(l/2)^2} = \frac{4\pi^2 EI_z}{l^2} \quad (2.14)$$

É importante observar que a equação da linha elástica da barra fica indeterminada. Este fato decorre do emprego da fórmula aproximada para descrever a curvatura da barra ( $K = v''$ ).

Conhecida a carga de flambagem da barra pode-se obter facilmente a sua tensão de flambagem:

$$\sigma_{fl} = \frac{P_{fl}}{A} = \frac{\pi^2 EI_z}{Al_{fl}^2} \quad (2.15)$$



Definindo raio de giração da seção da barra e índice de esbeltez, da barra, respectivamente, por

$$i = \left( \frac{I_z}{A} \right)^{1/2} \quad (2.16)$$

$$\lambda = \frac{\ell_{fl}}{i} = \ell_{fl} \left( \frac{A}{I_z} \right)^{1/2} \quad (2.17)$$

a tensão de flambagem, expressão (2.15), pode ser escrita:

$$\sigma_{fl} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (2.18)$$

A tensão de flambagem é o parâmetro que indica o campo de validade da fórmula de Euler. De fato, como se viu, a fórmula de Euler foi deduzida admitindo-se proporcionalidade entre tensões e deformações ( $\sigma = E\varepsilon$ ,  $\sigma \leq \sigma_p$ ).

Sendo então  $\sigma_p$  a tensão correspondente ao limite de proporcionalidade do material da barra, figura 2.2, a condição para que se tenha flambagem de Euler se expressa por

$$\sigma_{fl} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_p \quad (2.19)$$

donde

$$\lambda \geq \pi(E / \sigma_p)^{1/2} = \lambda_p = \lambda_{lim} \quad (2.20)$$

Conclui-se então de (2.20) que ocorrerá flambagem de Euler, também chamada flambagem elástica ( $\sigma_p = \sigma_{el}$ ), quando o índice de esbeltez da barra superar o índice de esbeltez limite ( $\lambda \geq \lambda_p$ ).

Note-se que para determinar o índice  $\lambda_p$  é necessário conhecer-se, para o material da barra, o módulo de elasticidade  $E$  e a tensão de proporcionalidade  $\sigma_p$ .

No caso de barras de aço, supondo-se  $E = 21.000\text{kN/cm}^2$  e  $\sigma_p = 210\text{kN/cm}^2$ , por exemplo, tem-se:

$$\lambda_p = \lambda_{lim} = \pi \left( \frac{21.000}{21} \right)^{1/2} \cong 100 \quad (2.21)$$

### 3. FLAMBAGEM INELÁSTICA

A flambagem é considerada inelástica quando a tensão  $\sigma_{fl}$  é maior que a tensão limite de proporcionalidade  $\sigma_p$  e menor que a tensão de escoamento do material da barra  $\sigma_{es}$  ( $\sigma_p \leq \sigma_{fl} \leq \sigma_{es}$ ), figura 2.2-b. É equivalente dizer-se que flambagem é inelástica quando o índice de esbeltez da barra está compreendido entre  $\lambda_p$  e  $\lambda_{es}$  ( $\lambda_{es} \leq \lambda \leq \lambda_p$ ).

Nestas condições a tensão  $\sigma_{fl}$  é calculada por (AISC-ASD/1989)

$$\sigma_{fl} = \sigma_{es} - \left( \frac{\lambda - \lambda_{es}}{\lambda_p - \lambda_{es}} \right)^2 (\sigma_{es} - \sigma_p) \quad (3.1)$$

Para calcular  $\sigma_{fl}$  por (3.1) é necessário conhecer-se as tensões  $\sigma_{es}$  e  $\sigma_p$  e os índices de esbeltez correspondentes  $\lambda_p$  e  $\lambda_{es}$ .

Determinada a tensão de flambagem e conhecida a área da seção transversal da barra pode-se calcular facilmente a sua carga de flambagem  $P_{fl}$ .

Tem-se então:

$$P_{fl} = \sigma_{fl} A \quad (3.2)$$

### 4. ESTADOS LIMITE E SEGURANÇA

Os elementos estruturais axialmente comprimidos podem atingir o estado limite ou por flambagem elástica quando  $\lambda \geq \lambda_p$ , ou por flambagem inelástica quando  $\lambda_{es} \leq \lambda \leq \lambda_p$  ou ainda, por escoamento do material da barra quando  $\lambda \leq \lambda_e$  (peças curtas).

Assim, tais elementos devem ser projetados de modo que a máxima tensão de compressão neles reinante não ultrapasse a tensão admissível definida ou em função da tensão de escoamento  $\sigma_{es}$ , ou em função da tensão de flambagem,  $\sigma_{fl}$ .

Estas duas condições se traduzem por

$$\sigma_{\text{máx}} \leq \bar{\sigma} = \frac{\sigma_{es}}{\nu} \quad (4.1)$$

$$\sigma_{\text{máx}} \leq \bar{\sigma}_{fl} = \frac{\sigma_{fl}}{\nu} \quad (4.2)$$

O coeficiente de segurança  $\nu$ , sempre maior que a unidade, deve cobrir, em princípio, todas as incertezas relativas ao projeto estrutural.

## 5. APLICAÇÕES NUMÉRICAS

No estudo das barras axialmente comprimidas surgem, como se sabe, problemas de verificação e de dimensionamento.

Nos problemas de verificação procura-se determinar a máxima força que pode ser aplicada a uma barra admitindo-se conhecidos o seu comprimento, a sua seção transversal e também a sua vinculação.

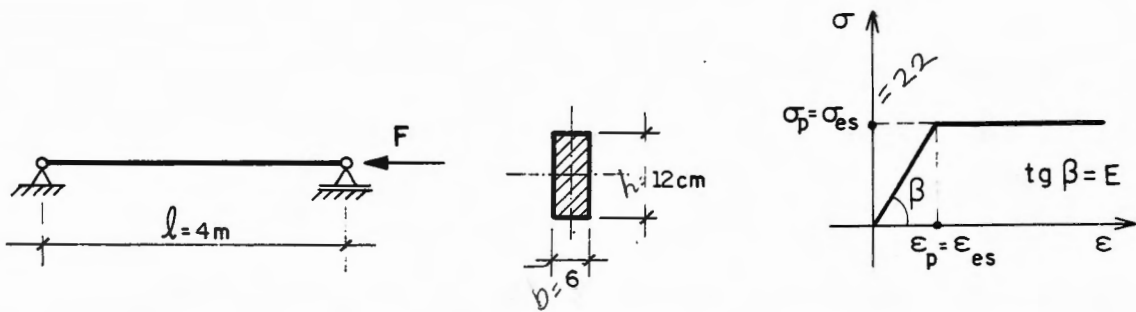
Nos problemas de dimensionamento buscam-se as dimensões da seção transversal da barra supondo conhecidos o seu comprimento, a sua vinculação e, obviamente, a força que solicita a barra.

Em ambos os tipos de problemas é necessário conhecer-se o coeficiente de segurança e o diagrama tensão x deformação do material da barra.

### EXEMPLO 1

Determinar a máxima força axial de compressão que pode ser aplicada à barra de aço representada na figura a seguir. Supor  $E = 21000 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\sigma_p = \sigma_{el} = 22 \text{ kN/cm}^2$  e  $\nu = 2$ .





O momento de inércia, o raio de giração e o índice de esbeltez da barra são dados por:

$$I_y = \frac{bh^3}{12} = \frac{12 \times 6^3}{12} = 216 \text{ cm}^4$$

$$i = \left( \frac{I}{A} \right)^{1/2} = \left( \frac{216}{6 \times 12} \right)^{1/2} = 1,732 \text{ cm}$$

$$\lambda = \frac{l_{fl}}{i} = \frac{l}{i} = \frac{400}{1,732} = 230,95$$

O índice de esbeltez limite  $\lambda_p$  é dado por

$$\lambda_p = \left( \frac{E}{\sigma_p} \right)^{1/2} \pi = \pi \left( \frac{21.000}{22} \right)^{1/2} = 97,06$$

Comparando-se os valores de  $\lambda$  pode-se concluir que o estado limite será atingido por flambagem elástica ( $\lambda = 231 > \lambda_p \cong 97$ ).

Deste modo tem-se:

$$\sigma_{fl} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \times 21.000}{(230,95)^2} = 3,89 \text{ kN / cm}^2$$

$$\sigma_{\text{máx}} \leq \bar{\sigma}_{fl} = \frac{\sigma_{fl}}{\nu} = \frac{3,89}{2} = 1,95 \text{ kN / cm}^2$$

$$F_{\text{máx}} = \sigma_{\text{máx}} A = \bar{\sigma}_{fl} A = 1,95 \times 72 = 140 \text{ kN}$$

A máxima força de compressão que pode ser aplicada à barra é aproximadamente igual a 140kN.

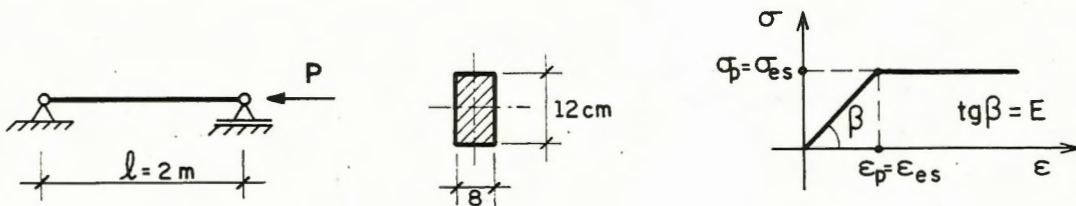
O mesmo resultado é obtido por:

$$F_{fl} = \frac{\pi^2 EI}{l_{fl}^2} = \frac{\pi^2 \times 21.000 \times 216}{(400)^2} = 280 \text{ kN}$$

$$F_{\text{máx}} = \bar{F}_{fl} = \frac{F_{fl}}{\nu} = \frac{280}{2} = 140 \text{ kN}$$

### EXEMPLO 2

Calcular a máxima força de compressão que pode ser aplicada à viga de aço representada na figura abaixo. Admitir  $E = 20.000 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\sigma_p = \sigma_{el} = \sigma_{es} = 18 \text{ kN/cm}^2$  e  $\nu = 2$ .



Sendo  $I = 512 \text{ cm}^4$ ,  $i = 2,309 \text{ cm}$ ,  $\lambda = 86,61$  e  $\lambda_p = 104,72$ , conclui-se que a carga máxima será calculada em função da tensão de escoamento  $\sigma_{es}$  ( $\lambda \cong 86 \leq \lambda_p = 105$ ). Tem-se então:

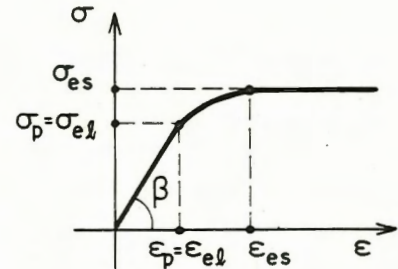
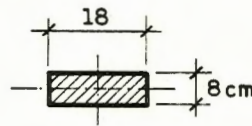
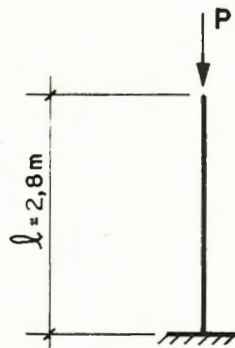
$$\sigma_{\text{máx}} \leq \bar{\sigma} = \frac{\sigma_{es}}{\nu} = \frac{18}{2} = 9 \text{ kN/cm}^2$$

$$F_{\text{máx}} = \sigma_{\text{máx}} A = \bar{\sigma} A = 9 \times 96 = 864 \text{ kN}$$

A máxima força de compressão que pode ser aplicada à viga é de 864kN.

### EXEMPLO 3

Calcular a máxima carga que pode ser aplicada ao pilar de aço representado na figura a seguir. Admitir  $E = 20.000 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\sigma_p = \sigma_{el} = 21 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\lambda_{es} = 30$  e  $\nu = 2,5$ .



Neste caso o comprimento de flambagem  $l_{fl}$  é igual a 5,6m (barra engastada-livre).

Assim, tem-se:

$$I = \frac{18 \times 8^3}{12} = 768 \text{ cm}^4$$

$$i = \left( \frac{768}{144} \right)^{1/2} = 2,309 \text{ cm}$$

$$\lambda = \frac{560}{2,309} = 242,53$$

$$\lambda_p = \pi \left( \frac{20.000}{21} \right)^{1/2} = 96,95$$

Os valores de  $\lambda$  mostram que o estado limite será atingido por flambagem elástica.

Resultam assim:

$$\sigma_{fl} = \frac{\pi^2 \times 20.000}{(242,53)^2} = 3,35 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{\text{máx}} \leq \bar{\sigma}_{fl} = \frac{3,35}{2,5} = 1,34 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

$$P_{\text{máx}} = \sigma_{\text{máx}} A = \bar{\sigma}_{fl} A = 1,34 \times 144 = 193 \text{ kN}$$

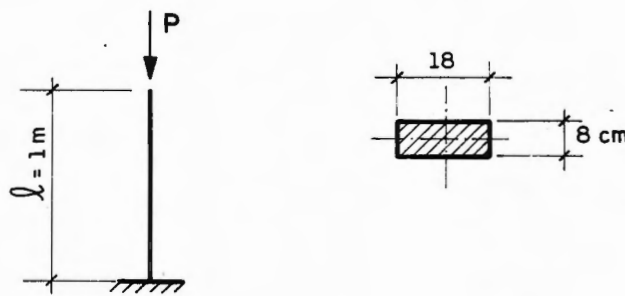
A máxima carga que pode ser aplicada à barra é de 193 kN.

Ao mesmo resultado chega-se por

$$P_{\text{máx}} = \bar{P}_{fl} = \frac{P_{fl}}{v} = \frac{1}{2,5} \cdot \frac{\pi^2 \times 20.000 \times 768}{(2 \times 280)^2} = 193 \text{ kN}$$

#### EXEMPLO 4

Determinar a máxima carga que pode ser aplicada ao pilar de aço da figura abaixo. Adotar os dados do exemplo 3.



Sendo  $\lambda = (200/2,309) = 86,62$ ,  $\lambda_p = 96,95$  e  $\lambda_{es} = 20$ , conclui-se que o estado limite se dará por flambagem inelástica.

As tensões  $\sigma_{fl}$  e  $\bar{\sigma}_{fl}$  são dadas por

$$\sigma_{fl} = 30 - \left( \frac{86,62 - 20}{96,95 - 20} \right)^2 (30 - 21) = 23,25 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

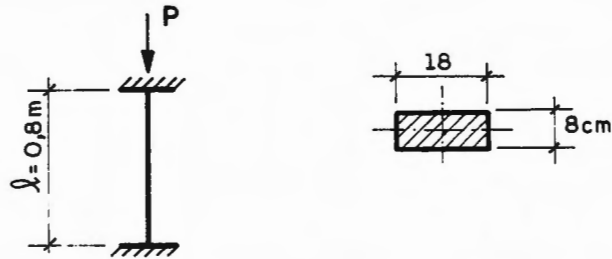
$$\bar{\sigma}_{fl} = \frac{\sigma_{fl}}{v} = \frac{23,25}{2,5} = 9,3 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

Sendo  $\sigma_{\text{máx}} \leq \bar{\sigma}_{fl}$ , obtém-se a carga máxima por:

$$P_{\text{máx}} = \sigma_{\text{máx}} A = \bar{\sigma}_{fl} A = 9,3 \times 144 = 1.339 \text{ kN}$$

### EXEMPLO 5

Determinar a máxima carga que pode ser aplicada à barra de aço esquematizada na figura a seguir. Adotar os dados do exemplo 3.



Neste caso de barra bi-engastada o comprimento de flambagem é igual a 40cm ( $l_{fl} = l/2$ ).

Sendo então  $\lambda = (40/2,309) = 17,32$ ,  $\lambda_p = 96,95$  e  $\lambda_{es} = 20$ , chega-se à conclusão que o estado limite se dará por escoamento do material da barra.

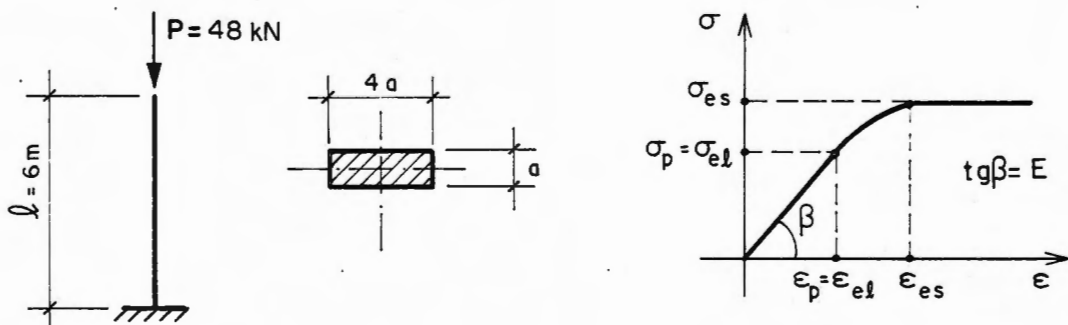
Deste modo, tem-se

$$\sigma_{\text{máx}} = \bar{\sigma} = \frac{30}{2,5} = 12 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

$$P_{\text{máx}} = \sigma_{\text{máx}} A = \bar{\sigma} A = 12 \times 144 = 1728 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

### EXEMPLO 6

O pilar de aço representado na figura abaixo deve suportar uma carga axial máxima de 48kN. Sendo  $E = 20.000 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\sigma_p = \sigma_{el} = 20 \text{ kN} / \text{cm}^2$ ,  $\sigma_{es} = 30 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\lambda_p = 99,34$ ,  $\lambda_{es} = 30$  e  $\nu = 2,5$ , determinar as dimensões da seção transversal do pilar





Como não é possível saber-se de que forma a barra atingirá o estado limite (não se conhece o índice de esbeltez), o problema só pode ser resolvido por tentativas. Arbitra-se o intervalo de variação de  $\lambda$  ( $\lambda < \lambda_{es}$ , por exemplo), calculam-se as dimensões da seção, determina-se  $\lambda$  e verifica-se se o  $\lambda$  obtido está no intervalo arbitrado. As tentativas terminam quando o  $\lambda$  obtido pertencer ao intervalo arbitrado.

Supondo-se, como primeira hipótese, que  $\lambda \leq \lambda_{es} = 30$ , tem-se

$$\sigma_{\text{máx}} \leq \bar{\sigma} = \frac{\sigma_{es}}{v} = \frac{30}{2,5} = 12 \text{ kN / cm}^2$$

$$A = \frac{P_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{máx}}} = \frac{P_{\text{máx}}}{\bar{\sigma}} = \frac{48}{12} = 4 \text{ cm}^2$$

donde:

$$a = 1 \text{ cm}$$

Este valor ( $a = 1 \text{ cm}$ ) mostra que a hipótese feita não está correta. De fato, para  $a = 1 \text{ cm}$  tem-se  $i = 0,289 \text{ cm}$  e  $\lambda = 4,157 > \lambda_{es} = 30$ .

Supondo-se então, como segunda hipótese,  $\lambda > \lambda_p = 99,34$ , tem-se:

$$I = \frac{4a^4}{12} = \frac{a^4}{3}$$

$$i = \left( \frac{I}{A} \right)^{1/2} = \left( \frac{a^4}{12a^2} \right)^{1/2} = \frac{a}{\sqrt{12}}$$

$$\lambda = \frac{2\ell}{i} = \frac{2\ell\sqrt{12}}{a}$$

$$\sigma_{fl} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 a^2 E}{48\ell^2}$$

$$\bar{\sigma}_{fl} = \frac{\sigma_{fl}}{v} = \frac{\pi^2 a^2 E}{48 v \ell^2} = \frac{20.000 \pi^2 a^2}{48 \times 2,5 \times 600^2} = 0,00457 a^2$$

Sendo  $\sigma_{m\acute{a}x} \leq \bar{\sigma}_{fl} = 0,00457 a^2$ , vem

$$A = \frac{P_{m\acute{a}x}}{\sigma_{m\acute{a}x}} = \frac{P_{m\acute{a}x}}{\bar{\sigma}_{fl}} = \frac{48}{0,00457 a^2}$$

Observando que  $A = 4a^2$ , resulta

$$4a^2 = \frac{48}{0,00457 a^2}$$

donde:

$$a = 7,16 \text{ cm}$$

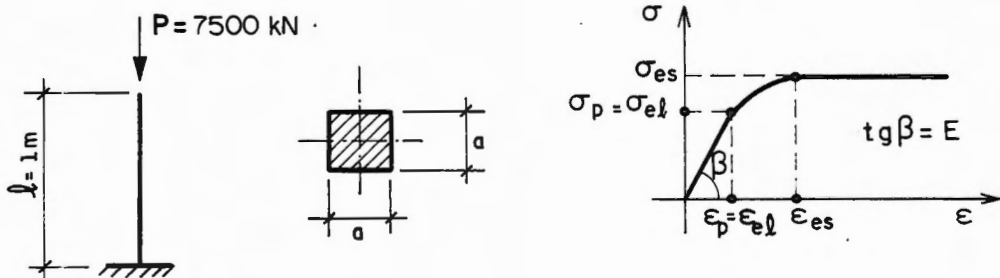
Com este valor de  $a$  obtém-se  $\lambda = 580,76$  e conclui-se que a hipótese formulada ( $\lambda > \lambda_p$ ) está correta.

Assim, a seção transversal da barra deverá ter 7,16cm de largura e 28,64cm de altura (7,16x28,64cm<sup>2</sup>).

## 6. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

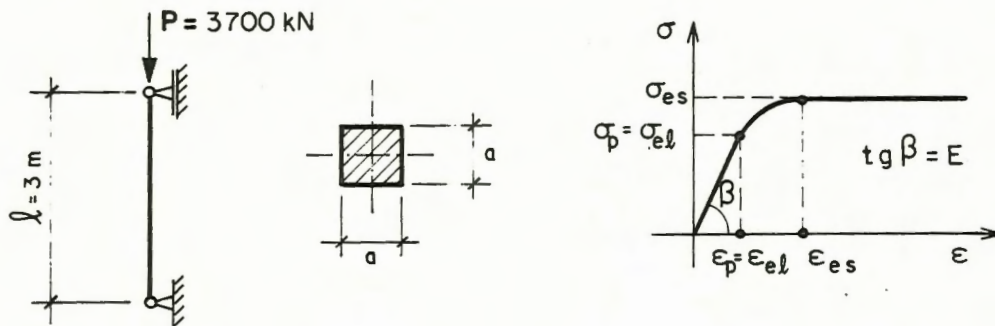
### EXERCÍCIO 1

Determinar a seção transversal do pilar representado na figura abaixo. Adotar os dados do exemplo 6.



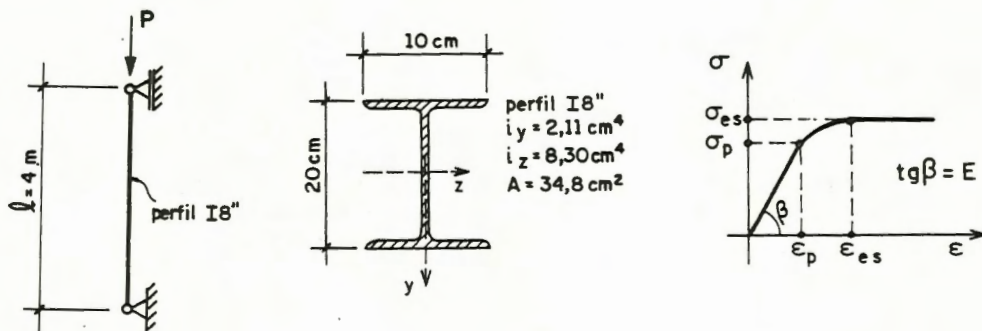
## EXERCÍCIO 2

Determinar a seção transversal do pilar esquematizado na figura a seguir. Adotar dados do exemplo 6.



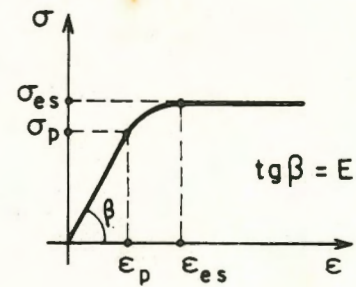
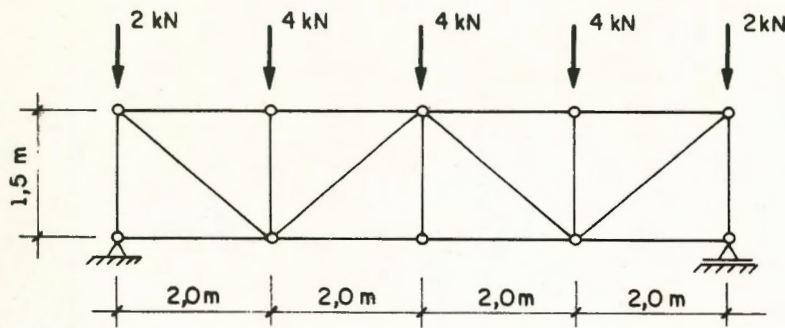
## EXERCÍCIO 3

Calcular a máxima carga de compressão que pode ser aplicada à coluna representada na figura abaixo. Supor  $E = 20.000\text{ kN/cm}^2$ ,  $\sigma_p = 12,5\text{ kN/cm}^2$ ,  $\sigma_{es} = 25\text{ kN/cm}^2$ ,  $\lambda_{es} = 20$  e  $\nu = 2$



## EXERCÍCIO 4

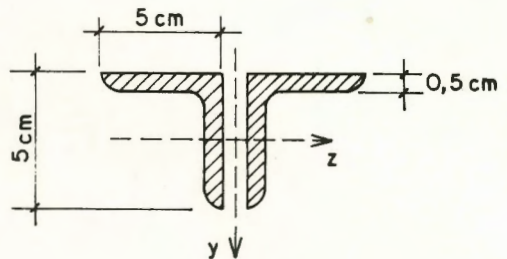
Verificar se é possível construir a treliça mostrada na figura abaixo empregando dupla cantoneira de aço (50x50x5). Supor  $E = 20.500\text{ kN/cm}^2$ ,  $\sigma_p = \sigma_{el} = 12,5\text{ kN/cm}^2$ ,  $\sigma_{es} = 25\text{ kN/cm}^2$ ,  $\lambda_{es} = 20$  e  $\nu = 2$ .



$$A = 9,16 \text{ cm}^2$$

$$i_z = 1,58 \text{ cm}^4$$

$$i_y = 2,30 \text{ cm}^4$$



## 7. BIBLIOGRAFIA

BARBATO, R.L.A.; "Introdução à Teoria das Estruturas", Notas de Aula. SET/EESC-USP, 1992.

BELLUZZI, O.; *Ciencia de la Construccion*. Aguilar, Madri, 1970, Vols. I e IV.

RACHID, M.; MORI, D.; "Instabilidade: Conceitos-Aplicação na Flambagem por Flexão". SET/EESC-USP, 1989

SALES, J.J.; MALITE, M; GONCALVES, R. *Sistemas Estruturais*. - Elementos Estruturais. SET/EESC/USP, 1994.

SCHIEL, F. *Introdução à Resistência dos Materiais*. SET/EESC-USP, 1980.

SILVA, J.F. *Resistência dos Materiais*. Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, 1962.

ZAGOTTIS, D.; "Introdução à Teoria das Estruturas", capítulo 10, Dep. de Eng. de Estruturas e Fundações, EPUSP, 1980.