

FLEXÃO COMPOSTA NO ESTÁDIO III : SEÇÃO
RETÂNGULAR

Eng^o Lauro Modesto dos Santos

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

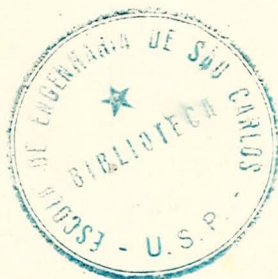
FLEXÃO COMPOSTA NO ESTÁDIO III
SEÇÃO RETANGULAR

Eng.º LAURO MODESTO DOS SANTOS

COM AS ESPECIFICAÇÕES DA NB-1/75
INTRODUZIDAS POR:

PAULO DOS SANTOS NETO

WILSON SERGIO VENTURINI



Publ. n.º 177, SÃO CARLOS, SETEMBRO DE 1976

FLEXÃO NORMAL COMPOSTA - CÁLCULO NOS ESTADOS LIMITES ÚLTIMOS - SEÇÃO RETANGULAR

Δ237+

1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

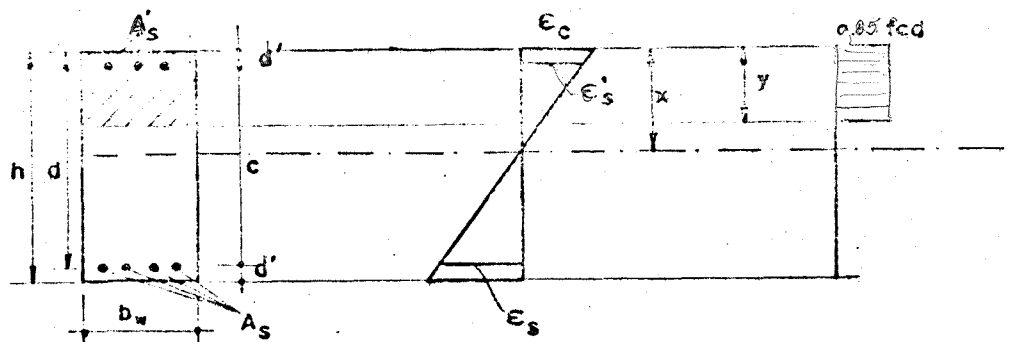
1. Apresentação

Este trabalho constitui uma adaptação do texto "FLEXÃO COMPOSTA NO ESTÁDIO III, SEÇÃO RETANGULAR", de autoria do Prof. LAURO NOBES TO DOS SANTOS, e se destina à resolução dos problemas de flexão normal composta em seções retangulares, de acordo com as novas especificações da NBI/75.

2. Hipóteses de cálculo

O desenvolvimento que se irá apresentar está fundamentado nas hipóteses formuladas na NBI/75, cabendo ainda observar que será adotada a simplificação proposta no item 4.1.1.1 alínea d, ou seja, distribuição retangular de tensões na zona comprimida do concreto.

3. Notações



- Fig. 1 -

b_w = largura da seção

d = altura útil da seção

h = altura total

d' = distância da armadura à borda mais próxima

x = profundidade da L.N. real

y = profundidade da L.N. fictícia ($y = 0,8x$)

A_s = Área da secção transversal das barras de uma das armaduras (a situada do lado que se só atua-se M, seria tração)

A'_s = Área da secção transversal das barras da outra armadura (a situada do lado que se só atua-se M, seria compressão)

N = força normal solicitante (compressão: $N > 0$)

M = momento fletor solicitante (sempre positivo)

γ_f = coeficiente de segurança

$N_d = \gamma_f N$ = força normal de cálculo

$M_d = \gamma_f M$ = momento fletor de cálculo

f_{yd} = tensão de escoamento, real ou convencional de cálculo

σ'_s = tensão de compressão

f_{cd} = tensão de compressão de cálculo do concreto

$\rho = A_s / b_w d$ $\rho' = A'_s / b_w d$

$\alpha = f_{yd} / f_{cd}$ $\alpha' = \sigma'_s / f_{cd}$

$\mu = M_d / (f_{cd} b_w d^2)$

$\nu = N_d / (f_{cd} b_w d)$

$k_h = h / d$

$\eta = d' / d$

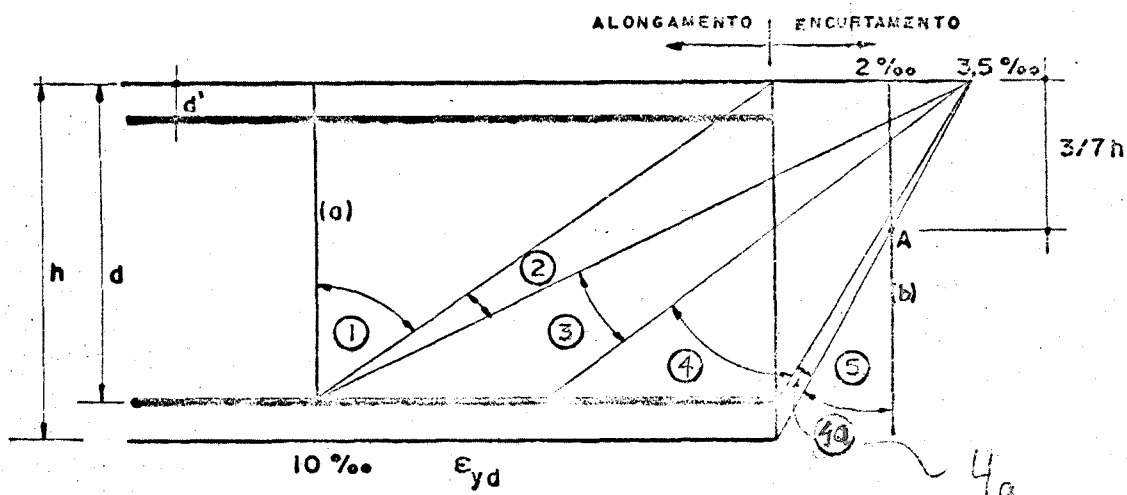
$k_y = y / d$

k_{yd} = valor de k_y que corresponde a tensão de escoamento no aço.

Obs.: No par (M,N) o momento é sempre referido ao C.G. da secção geométrica.

4. Zonas de solicitação

De acordo com a NB-1/75, as peças solicitadas à flexão simples ou composta, normal ou oblíqua, e de compressão ou tração uniforme, podem alcançar o estado limite último nas seguintes situações (fig.2):



- Fig. 2 -

- deformação plástica excessiva

reta a: tração uniforme

domínio 1: tração não uniforme sem compressão

domínio 2: flexão simples ou composta sem ruptura à compressão do concreto, e com o máximo alongamento da armadura tracionada.

- ruptura

domínio 3: flexão simples (seção subarmada) ou composta com ruptura à compressão do concreto e escoamento da armadura tracionada.

domínio 4: flexão simples (seção superarmada) ou composta, com ruptura à compressão do concreto e aço tracionado sem escoamento.

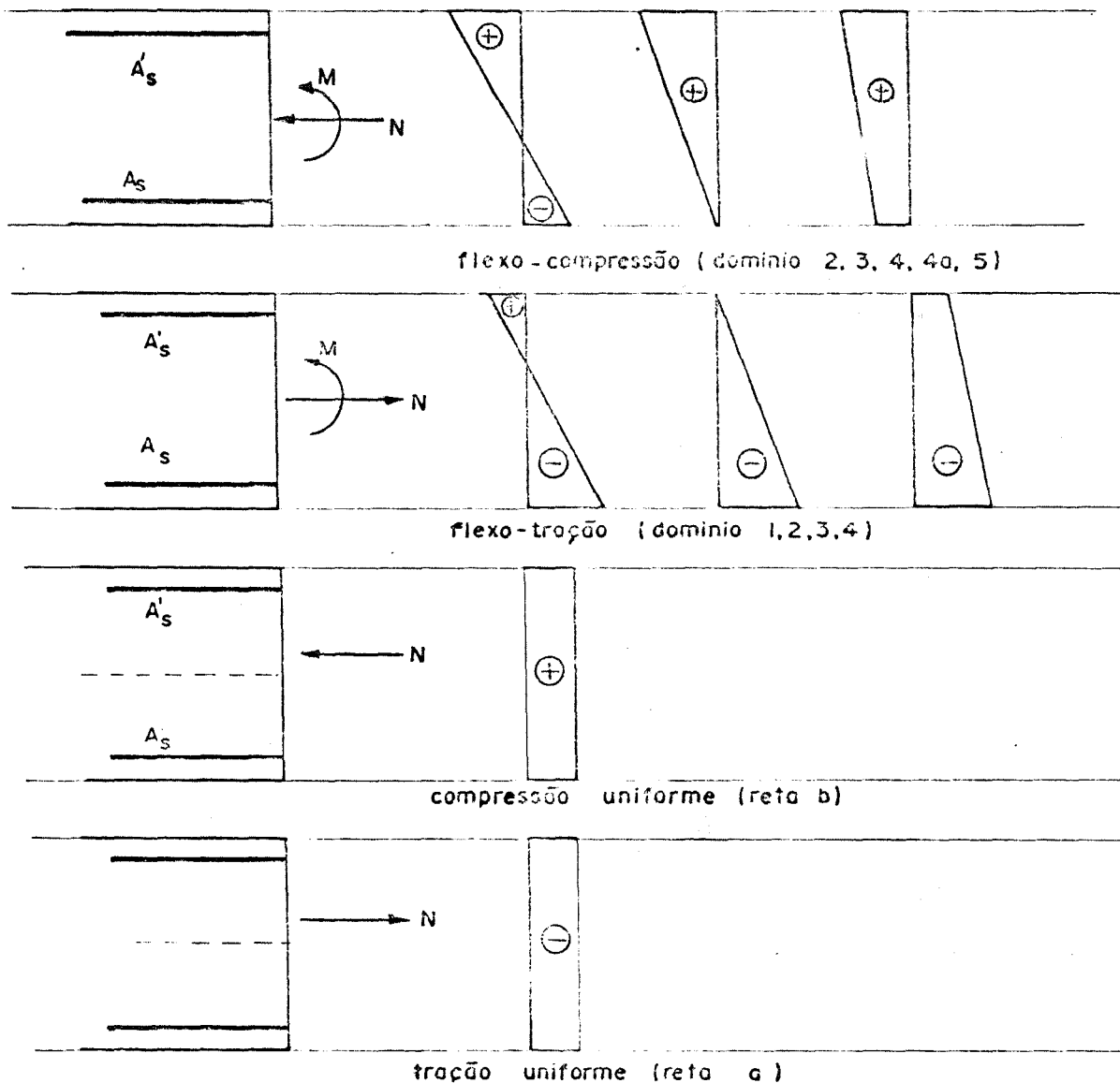
domínio 4a: flexão composta com armaduras comprimidas.

domínio 5: compressão não uniforme, sem tração

reta (b) : compressão uniforme

É objeto, deste estudo, a análise das secções retangulares submetidas a flexo-compressão normal, flexo-tração normal, compressão uniforme e tração uniforme (fig.2-a).

0.19



- Fig. 2a -

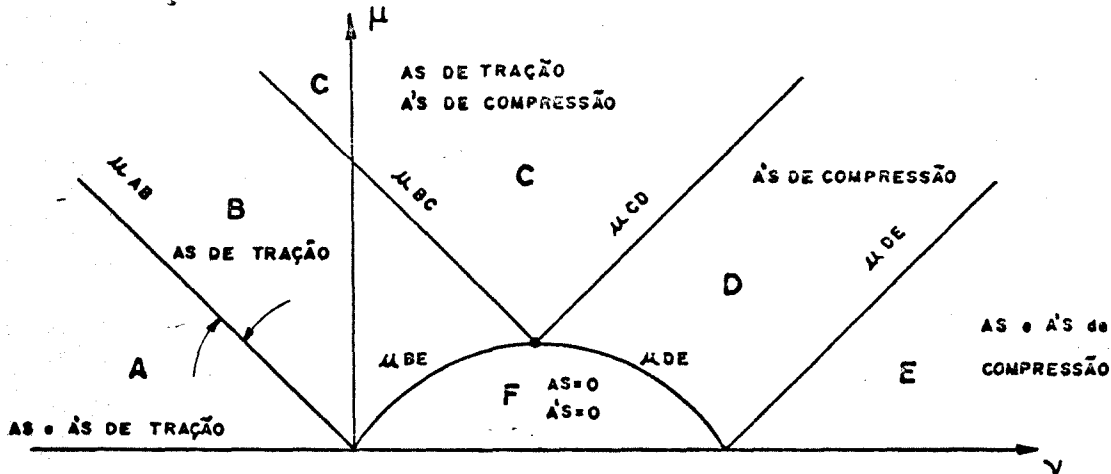
Como se pode observar, todas as situações possíveis estão incluídas nos domínios da figura (2), podendo então, à semelhança da flexão simples, ser resolvidas através das equações de equilíbrio e de compatibilidade de deformações.

É fácil perceber que, da análise destas equações, no que diz respeito às armaduras, configurar-se-á uma das seguintes condições (fig.3):

- a) duas armaduras de tração (zona A)
- b) uma armadura de tração (zona B)
- c) uma armadura de tração e outra de compressão (zona C)
- d) uma armadura de compressão (zona D)
- e) duas armaduras de compressão (zona E)
- f) nenhuma armadura (zona F)

O estudo que se segue tem por objetivo analisar estas seis possibilidades. A cada uma delas corresponderá uma "zona de solicitações".

ção" (zonas A, B, C, D, E e F), conforme o valor do par (μ, ν) que solicita a seção considerada.



- Fig. 3 -

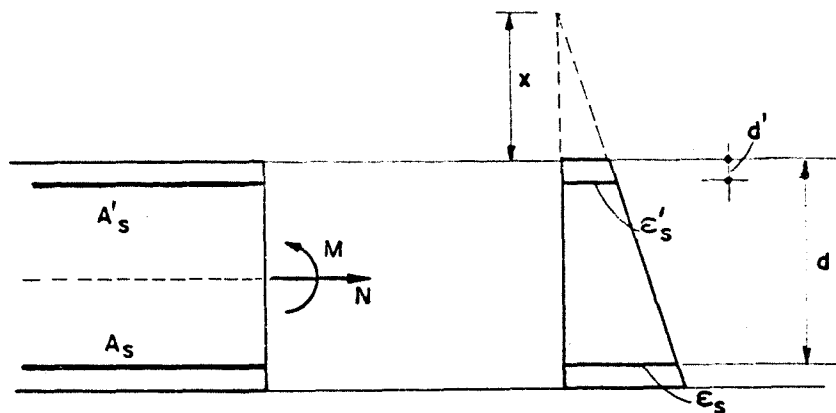
Os limites das seis zonas, μ_{AB} , μ_{BC} , ..., são retas ou curvas cujas equações serão determinadas oportunamente.

Casos particulares:

- pontos sobre o eixo dos μ : flexão normal simples
- pontos sobre o eixo dos ν : compressão axial ou tração axial.

II. EQUACIONAMENTO DOS PROBLEMAS NAS VÁRIAS ZONAS DE SOLICITAÇÃO

1. Dimensionamento na zona A



- Fig. 4 -

1.1. equações de equilíbrio

$$\gamma_f N = N_d = - A_s \sigma_s - A'_s \sigma'_s \quad (1.1)$$

$$\gamma_f M = M_d = (A_s \sigma_s - A'_s \sigma'_s) \frac{c}{2} \quad (1.2)$$

1.2. equação de compatibilidade

$$\frac{\epsilon'_s}{x+d'} = \frac{\epsilon_s}{x+d} \quad (1.3)$$

Como se pode ver, têm-se três equações independentes e sete incógnitas ($A_s, A'_s, \sigma_s, \sigma'_s, \epsilon_s, \epsilon'_s, x$).

Pelo fato de o dimensionamento nesta zona corresponder ao domínio 1, pode-se escrever:

$$\epsilon_s = 1\%$$

$$\sigma_s = f_{yd}$$

Com isso, reduziu-se o número de incógnitas para 5 ($A_s, A'_s, \epsilon'_s, \sigma'_s, x$). Poder-se-ia entretanto escrever uma outra equação: a que liga ϵ'_s com σ'_s . Fica-se assim com 4 equações e 5 incógnitas, sistema que apresenta infinitas soluções. Para resolvê-lo basta arbitrar uma das incógnitas.

No sentido de facilitar o cálculo será arbitrado o valor de ϵ'_s ($\epsilon'_s = \epsilon_{yd}$), que permite afirmar que $\sigma'_s = f_{yd}$. Agora o sistema ficou com 3 equações (1.1, 1.2, 1.3) e 3 incógnitas (A_s, A'_s e x).

Como não interessa o valor de x , basta resolver o sistema formado por (1.1) e (1.2):

$$N_d = - (A_s + A'_s) f_{yd} \quad (1.4)$$

$$M_d = f_{yd} (A_s - A'_s) \frac{c}{2} \quad (1.5)$$

Dividindo-se ambas as equações, respectivamente, por $(b_w d f_{cd})$ e $(b_w d^2 f_{cd})$, obtém-se:

$$\nu = - \alpha (\rho + \rho') \quad (1.6)$$

$$\mu = \alpha (1 - 0,5k_h) (\rho - \rho') \quad (1.7)$$

Resolvendo-se o sistema em ρ e ρ' , chega-se a:

$$\rho' = \frac{1}{2\alpha} \left[\frac{-2\mu}{2-k_h} - \nu \right] \quad (1.8)$$

$$\rho = \frac{1}{2\alpha} \left[\frac{2\mu}{2-k_h} - \nu \right] \quad (1.9)$$

1.3. Condições limites

É fácil perceber que haverá um par (μ, ν) para o qual a deformação na borda superior se anula. Nessa situação a armadura A'_s não será mais necessária, dando portanto a condição limite de aplicação do dimensionamento na zona A.

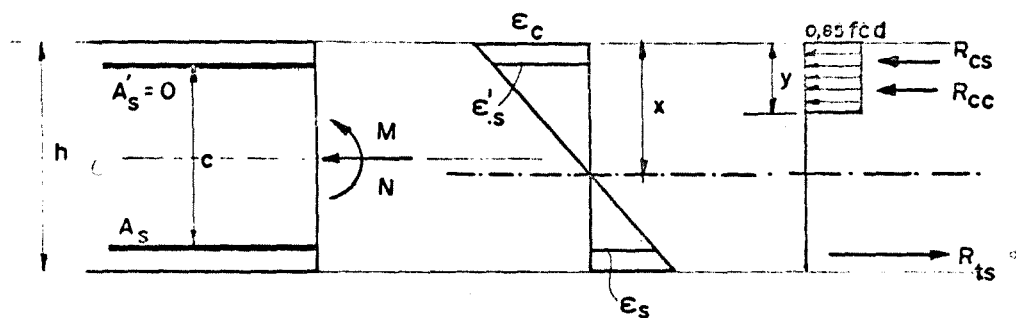
Com $A'_s = 0$, tem-se $\rho' = 0$, e portanto a equação (1.9) fica:

$$\frac{2\mu}{2-k_h} - \nu = 0, \text{ e portanto}$$

$$\mu_{AB} = -0,5\nu(2-k_h) \quad (1.10)$$

A equação (1.10) representa a reta que separa as zonas A e B da figura (2).

2. Dimensionamento na zona B



- Fig. 5 -

2.1. equações de equilíbrio

$$N_d = 0,85b_w y f_{cd} + A'_s \sigma'_s - A_s \sigma_s \quad (2.1)$$

$$M_d = 0,85b_w y f_{cd} \left(\frac{h}{2} - \frac{y}{2} \right) + (A'_s \sigma'_s + A_s \sigma_s) \frac{c}{2} \quad (2.2)$$

2.2. equações de compatibilidade

$$\frac{\epsilon_c}{x} = \frac{\epsilon_s}{d-x} = \frac{\epsilon'_s}{x-d'} \quad (2.3)$$

Como foi comentado, o dimensionamento na zona B pode ser feito com $A'_s = 0$. Fazendo-se o balanceamento do número de equações e do número de incógnitas e levando em conta a condição imposta, conclui-se que só existe uma solução para o problema. Desta solução sai um valor de k_y que poderá estar nas seguintes condições:

$$k_y < k_{y23} \quad (\text{domínio 2})$$

$$k_{y23} \leq k_y \leq k_{34} \quad (\text{domínio 3})$$

$$k_{y34} < k_y < k_{y44a} \quad (\text{domínio 4})$$

Tendo em vista o aproveitamento integral da capacidade da armadura, deve-se evitar o dimensionamento no domínio 4. Caso se tenha $k_{y34} < k_y < k_{y44a}$, passa-se a procurar armadura dupla, caindo-se na zona C.

À luz destas considerações, as equações (2.1), (2.2) e (2.3) podem ser escritas (domínio 2 e 3):

$$N_d = 0,85b_w y f_{cd} - A_s f_{yd} \quad (2.4)$$

$$M_d = 0,85b_w y f_{cd} \left(\frac{h}{2} - \frac{y}{2} \right) + A_s f_{yd} \frac{c}{2} \quad (2.5)$$

$$\frac{\epsilon_c}{x} = \frac{\epsilon_s}{d-x} \quad (2.6)$$

Dividindo-se as duas primeiras equações, respectivamente, por $(b_w d f_{cd})$ e $(b_w d^2 f_{cd})$, obtem-se:

$$v = 0,85k_y - \rho \alpha \quad (2.7)$$

$$\mu = 0,425k_y (k_h - k_y) + 0,50 (0,85k_y - v) (2 - k_h) \quad (2.8)$$

Resolvendo-se o sistema em termos de ρ :

$$\rho = \frac{0,85k_y - v}{\alpha} \quad (2.9)$$

onde k_y é tirado da tabela (4) em função do valor de

$$\mu + v(1 - 0,5k_h) .$$

2.3. Condições limites

Uma primeira condição limite será evidentemente a reta μ_{AB} , para que haja continuidade entre as zonas apresentadas.

Na zona B, essa condição é expressa pela imposição de $k_y = 0$. Entrando com essa condição na equação (2.8), obtem-se:

$$\mu_{BA} = - 0,5v \cdot (2 - k_h) \quad (2.10)$$

Comparando as equações (2.10) e (1.10), vê-se que ambas representam a mesma reta, confirmando a continuidade prevista.

No diagrama da figura (2) vê-se que a zona B apresenta 3 limites: (μ_{BA} , μ_{BC} e μ_{BF}). A determinação de μ_{BC} será feita através da imposição $k_y = k_{yd}$, isto é, para evitar o dimensionamento no domínio 4.

Impondo na equação (2.8) a condição $k_y = k_{yd}$, obtem-se:

$$\mu_{BC} = - (1 - 0,5k_h) \cdot v + 0,85k_{yd}(1 - 0,5k_{yd}) \quad (2.11)$$

Para determinar a curva que limita as zonas B e F basta impor $\rho = 0$, pois na zona F, teoricamente, não se faz necessária nenhuma armadura.

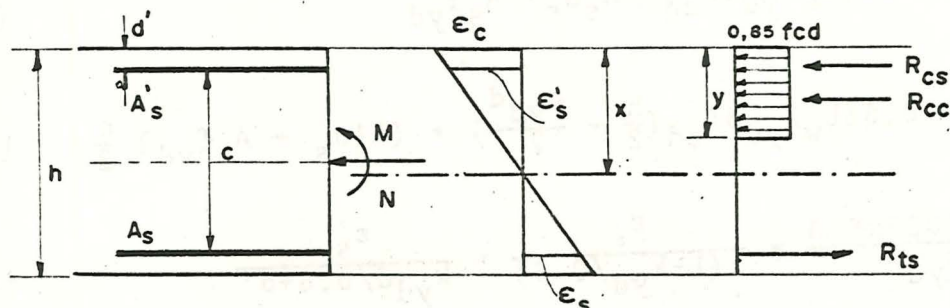
Pela equação (2.7), com essa imposição, vem:

$$v = 0,85k_y \quad (2.12)$$

Esse valor substituído na equação (2.8) fornece a equação de μ_{BF} :

$$\mu_{BF} = 0,59v (0,85k_h - v) \quad (2.13)$$

3. Dimensionamento na zona C



- Fig. 6 -

3.1. equações de equilíbrio

$$N_d = 0,85b_w y f_{cd} + A'_s \sigma'_s - A_s \sigma_s \quad (3.1)$$

$$M_d = 0,85b_w y f_{cd} \left(\frac{h}{2} - \frac{y}{2} \right) + (A'_s \sigma'_s + A_s \sigma_s) \frac{c}{2} \quad (3.2)$$

3.2. equações de compatibilidade

$$\frac{\epsilon_c}{x} = \frac{\epsilon_s}{d-x} = \frac{\epsilon'_s}{x-d} \quad (3.3)$$

O cálculo nesta zona de dimensionamento (duas armaduras, uma tracionada e outra comprimida) é feito sempre que se tenha necessidade de evitar o dimensionamento no domínio 4.

A introdução da armadura comprimida provoca um alívio na zona comprimida do concreto, permitindo valores menores de y e, conseqüentemente, um melhor aproveitamento da armadura tracionada. Nesse sentido, o dimensionamento deverá ser feito no domínio 3.

3.3. balanceamento do número de equações e do número de incógnitas.

número de equações: 4 (independentes)

número de incógnitas: 8 (A'_s , A_s , σ'_s , σ_s , y , ϵ_c , ϵ_s , ϵ'_s)

Levando em conta que o dimensionamento será feito no domínio 3 ($\epsilon_c = 0,35\%$ e $\sigma_s = f_{yd}$) e que existe uma equação que liga σ'_s com ϵ'_s , fica-se com 5 equações e 6 incógnitas, sistema que permite infinitas soluções.

A abordagem completa de todas as soluções seria praticamente impossível. Por isso, resolveu-se fixar uma das incógnitas, fixando assim apenas uma solução para o sistema. A incógnita fixada foi o parâmetro y ($y = y_{34}$) ou, o que é a mesma coisa, $k_y = k_{yd}$.

$$N_d = 0,85b_w k_{yd} d f_{cd} + A'_s \sigma'_s - A_s f_{yd} \quad (3.4)$$

$$M_d = 0,85b_w k_{yd} d f_{cd} \left(\frac{h}{2} - \frac{k_{yd} d}{2} \right) + (A'_s \sigma'_s + A_s f_{yd}) \frac{c}{2} \quad (3.5)$$

$$\frac{0,0035 \times 0,8}{k_{yd} d} = \frac{\epsilon_s}{d(1 - k_{yd}/0,8)} = \frac{\epsilon'_s}{k_{yd} d / 0,8 - d} \quad (3.6)$$

Dividindo as equações (3.4 e 3.5) respectivamente por

$(b_w d f_{cd})$ e $(b_w d^2 f_{cd})$, obtêm-se:

$$v = 0,85k_{yd} - \alpha\rho + \rho' \frac{\sigma'_s}{f_{cd}} \quad (3.7)$$

$$\mu = 0,425k_{yd}(k_h - k_{yd}) + \left(\frac{\sigma'_s}{f_{cd}} \rho' + \alpha\rho \right) 0,5(2 - k_h) \quad (3.8)$$

Colocando $\alpha' = \sigma'_s / f_{cd}$, e resolvendo o sistema em termos de ρ e ρ' , vem:

$$\rho = \frac{1}{2\alpha} \left[\frac{\mu}{1 - 0,5k_h} - v + 0,85 \frac{k_{yd}(1 - k_h + 0,5k_{yd})}{(1 - 0,5k_h)} \right] \quad (3.9)$$

$$\rho' = \frac{1}{2\alpha'} \left[\frac{\mu}{1 - 0,5k_h} + v - 0,85k_{yd} \frac{(1 - 0,5k_{yd})}{(1 - 0,5k_h)} \right] \quad (3.10)$$

Tendo em mãos o valor de k_{yd} (valor fixo para cada tipo de aço), é possível determinar ϵ'_s através da equação (3.6), e daí σ'_s e α' .

3.4. condições limites

Pelo diagrama da figura (2) vê-se que a zona C se encontra limitada pelas zonas B ($\rho' = 0$) e D ($\rho = 0$).

Fazendo-se $\rho' = 0$ na equação (3.10), encontra-se a reta μ_{CB} que limita as zonas C e B:

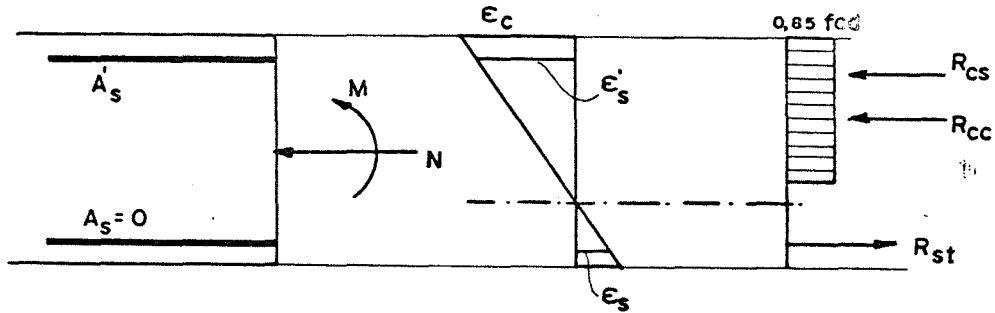
$$\mu_{CB} = - (1 - 0,5k_h) \cdot v + 0,85k_{yd}(1 - 0,5k_{yd}) \quad (3.11)$$

Comparando as equações (3.11) e (2.11) vê-se que as equações coincidem, o que era de se esperar, pois representam a mesma reta.

Fazendo $\rho = 0$ na equação (3.9), encontra-se a equação da reta μ_{CD} que limita as zonas C e D:

$$\mu_{CD} = (1 - 0,5k_h) \cdot v - 0,85k_{yd}(1 + 0,5k_{yd} - k_h) \quad (3.12)$$

4. Dimensionamento na zona D



- Fig. 7 -

4.1. Equações de equilíbrio

$$N_d = 0,85b_w y f_{cd} + A'_s \sigma'_s - A_s \sigma_s \quad (4.1)$$

$$M_d = 0,85b_w y f_{cd} \left(\frac{h}{2} - \frac{y}{2} \right) + (A_s \sigma_s + A'_s \sigma'_s) \frac{c}{2} \quad (4.2)$$

4.2. Equações de compatibilidade

$$\frac{\epsilon_c}{x} = \frac{\epsilon_s}{d-x} = \frac{\epsilon'_s}{x-d'} \quad (4.3)$$

Aumentando a grandeza da força normal em relação a do problema anterior, pode-se chegar a uma situação tal que a armadura de tração torna-se dispensável. Quer dizer, existem pares de valores (μ , ν) para os quais a seção resistente estará constituída apenas da zona comprimida (concreto + armadura).

Considerando $A_s = 0$ as equações (4.1) e (4.2) ficam sendo:

$$N_d = 0,85b_w y f_{cd} + A'_s \sigma'_s \quad (4.4)$$

$$M_d = 0,85b_w y f_{cd} \left(\frac{h}{2} - \frac{y}{2} \right) + A'_s \sigma'_s \frac{c}{2} \quad (4.5)$$

Dada mesma forma como já foi feito nos casos anteriores, estas equações podem ser colocadas em termos adimensionais:

$$\nu = 0,85k_y + \rho' \frac{\sigma'_s}{f_{yd}} \alpha \quad (4.6)$$

$$\mu = \nu (1 - 0,5k_h) - 0,85k_y (0,5k_y - k_h + 1) \quad (4.7)$$

Resolvendo o sistema em ρ' e k_y , vem:

$$\rho' = \frac{(\nu - 0,85k_y)}{\alpha'} \quad (4.8)$$

onde $\alpha' = \frac{\sigma'_s}{f_{cd}}$

$$k_y = (k_h - 1) + \sqrt{(k_h - 1)^2 - \frac{1}{0,425} [\mu - \nu (1 - 0,5k_h)]} \quad (4.9)$$

Obtido k_y (tabela 7), calculam-se σ'_s (tabela 8) e $\alpha' = \sigma'_s/f_{cd}$, e daí obtem-se ρ' pela (4.8).

4.3. condições limites

Pelo diagrama da figura (2) vê-se que a zona D é limitada pelas zonas C, E e F.

A equação da reta μ_{DC} é obtida fazendo-se $k_y = k_{yd}$. Impondo $k_y = k_{yd}$ na equação (4.7), obtem-se:

$$\mu_{DC} = \nu (1 - 0,5k_h) - 0,85k_{yd}(0,5k_{yd} + 1 - k_h) \quad (4.10)$$

Comparando as equações (4.10) e (3.12) vê-se que ambas representam a mesma reta.

A equação da reta μ_{DE} será obtida impondo para k_y o valor k_h . Isto se deve ao fato de que para valores de $k_y > k_h$ já existe necessidade de outra armadura de compressão, pelo menos teoricamente.

Com esta condição, a equação (4.7) fornece:

$$\mu_{DE} = (\nu - 0,85k_h) \cdot (1 - 0,5k_h) \quad (4.11)$$

A equação da curva μ_{DF} é obtida a partir da imposição $\rho' = 0$, pois na zona F, pelo menos teoricamente, não existe necessidade de armadura.

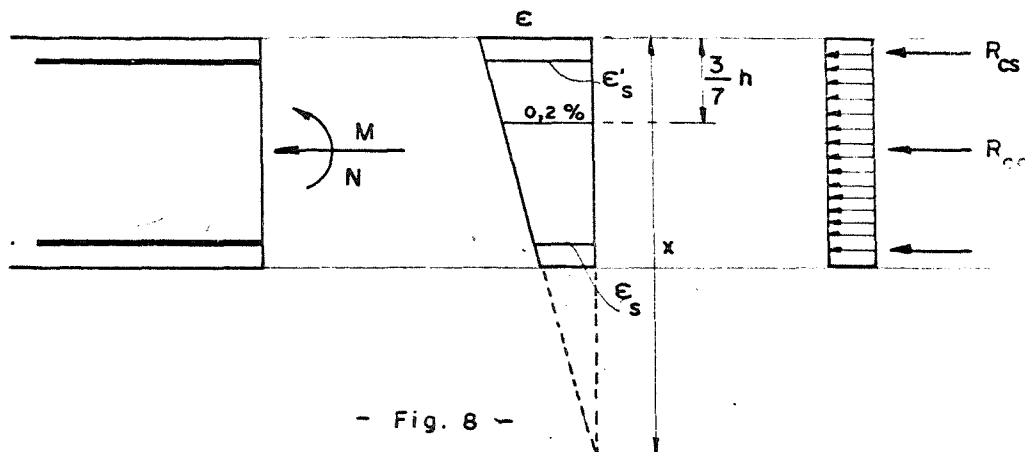
Levando esta condição na equação (4.6), encontra-se:

$$\nu = 0,85k_y \quad (4.12)$$

Substituindo esse valor na (4.7), vem:

$$\mu_{DF} = 0,5\nu(k_h - \nu/0,85) \quad (4.13)$$

5. Dimensionamento na zona E



- Fig. 8 -

5.1. equações de equilíbrio

$$N_d = 0,85b_w h f_{cd} + A'_s \sigma'_s + A_s \sigma_s \quad (5.1)$$

$$M_d = (A'_s \sigma'_s - A_s \sigma_s) \frac{c}{2} \quad (5.2)$$

5.2. equação de compatibilidade

$$\frac{\epsilon_c}{x} = \frac{\epsilon_s}{x-d} = \frac{\epsilon'_s}{x-d'} = \frac{0,002}{x - \frac{3}{7} h} \quad (5.3)$$

5.3. balanceamento do número de equações e de incógnitas.

número de equações: 5 (independentes)

número de incógnitas: 8 ($A_s, A'_s, \sigma_s, \sigma'_s, \epsilon_c, \epsilon_s, \epsilon'_s, y$)

Lembrando que existem ainda as equações $\sigma_s = f(\epsilon_s)$ e $\sigma'_s = f(\epsilon'_s)$, fica-se com 7 equações e 8 incógnitas, sistema que permite infinitas soluções. Para resolvê-lo basta arbitrar qualquer uma das incógnitas.

Por facilidade de cálculo, será imposta a condição $x = \infty$, isto é, o dimensionamento na zona E corresponderá ao dimensionamento na reta b do domínio 5. Com isso, ter-se-á

$$\epsilon_c = 0,2\%$$

$$\epsilon_s = 0,2\%$$

$$\epsilon'_s = 0,2\%$$

5.4. equações adimensionais

Dividindo-se as equações (5.1) e (5.2) respectivamente por $(b_w d f_{cd})$ e $(b_w d^2 f_{cd})$, obtêm-se:

$$v = 0,85k_h + \frac{\sigma'_s}{f_{cd}} \rho' + \frac{\sigma_s}{f_{cd}} \rho \quad (5.4)$$

$$\mu = \frac{\sigma'_s}{f_{cd}} \cdot \rho' (1-0,5k_h) - \frac{\sigma_s}{f_{cd}} \rho (1-0,5k_h) \quad (5.5)$$

ou, levando em conta que $\sigma_s = \sigma'_s$, vem

$$v = 0,85k_h + \alpha' (\rho' + \rho) \quad (5.6)$$

$$\mu = \alpha' (1-0,5k_h) (\rho' - \rho) \quad (5.7)$$

Resolvendo o sistema em termos de ρ e ρ' , vem:

$$\rho' = \frac{1}{2\alpha'} \left[v + \frac{\mu}{1-0,5k_h} - 0,85k_h \right] \quad (5.8)$$

$$\rho = \frac{1}{2\alpha'} \left[v - \frac{\mu}{1-0,5k_h} - 0,85k_h \right] \quad (5.9)$$

5.5. condições limites

Pelo diagrama da figura (2) observa-se que a zona E se encontra limitada pela zona D e pelo eixo v .

Fazendo $\rho = 0$ (zona D), encontra-se pela equação (5.9), a equação da reta μ_{DE} :

$$\mu_{DE} = (1-0,5k_h) \cdot (v-0,85k_h) \quad (5.10)$$

6. Dimensionamento na zona F

Na zona 5, a seção $b_w h$ pré-fixada é grande em relação aos esforços solicitantes N e M ; o concreto simples é suficiente, não havendo necessidade, teoricamente, de nenhuma armadura. Segue-se que a zona F só pode existir no quadrante da flexo-compressão (fig.2).

Para $M = 0$, compressão axial, o limite da zona ao longo do eixo dos v é dado por $v = 0,85k_h$.

Embora não se tenha necessidade de armadura, a NB-1/75, exige que se coloque pelo menos um mínimo:

- aços CA-25 e CA-32

$$(A_s)_{\min} = 0,0025(b_w d)$$

- aços CA-40, CA-50 e CA-60

$$(A_s)_{\min} = 0,0015(b_w d)$$

7. Armaduras simétricas

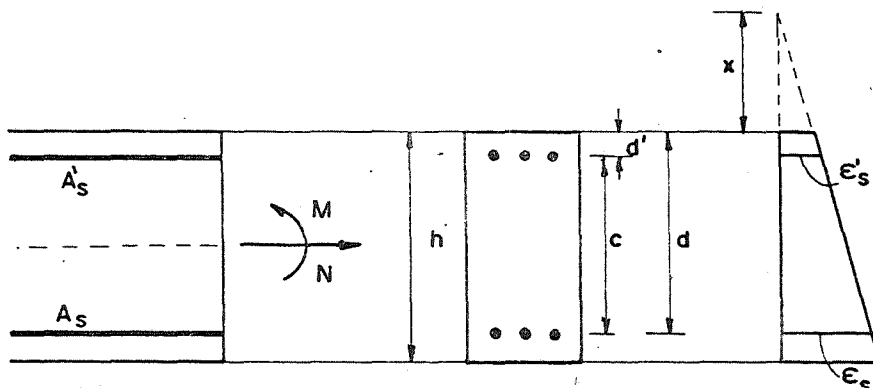
A utilização de armaduras simétricas, na prática, fica restrita aos casos em que existem momentos que atuam em sentidos opostos, ou naqueles casos em que se pretende prevenir a possibilidade de inversão das posições das armaduras por erro de execução.

Na prática, esse tipo de armadura é sempre possível: basta fazer a menor igual à maior. Entretanto, o que se pretende discutir neste item é a possibilidade teórica da existência de duas armaduras iguais para resistirem aos esforços solicitantes.

Deste ponto de vista, existem 3 situações a serem analisadas:

- a) duas armaduras tracionadas
- b) duas armaduras comprimidas
- c) uma armadura tracionada e outra comprimida

7.1. duas armaduras tracionadas simétricas



- Fig. 9 -

$$N_d = - A_s \sigma_s - A'_s \sigma'_s \quad (7.1)$$

$$M_d = A_s \sigma_s \frac{c}{2} - A'_s \sigma'_s \frac{c}{2} \quad (7.2)$$

Nestas duas equações, mesmo fazendo $A'_s = A_s$, restam ainda 3 incógnitas: A_s , σ_s , σ'_s . Por outro lado, o dimensionamento deverá ser feito no domínio I, permitindo-se dizer que $\sigma_s = f_{yd}$.

Fica-se assim com um sistema de duas equações a duas incógnitas, cuja solução é:

$$A_s = \frac{M_d - N_d \cdot \frac{c}{2}}{f_{yd} \cdot c} \quad (7.3)$$

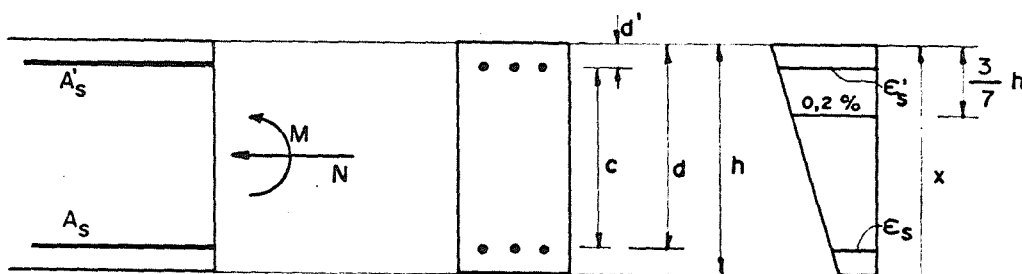
$$\sigma'_s = - \frac{N_d}{A_s} - f_{yd} \quad (7.4)$$

Escrevendo a equação (7.3) em termos adimensionais, obtém-se:

$$\rho = \frac{1}{2\alpha} \left[\frac{2\mu}{2 - k_h} - \nu \right] \quad (7.5)$$

que é idêntica à expressão (1.9). Desse fato pode-se concluir que a possibilidade de se ter duas armaduras simétricas tracionadas só é possível quando se faz a menor igual à maior, a não ser que o momento seja nulo.

7.2. duas armaduras comprimidas simétricas



- Fig. 10 -

$$N_d = 0,85b_w h f_{cd} + A'_s \sigma'_s + A_s \sigma_s \quad (7.6)$$

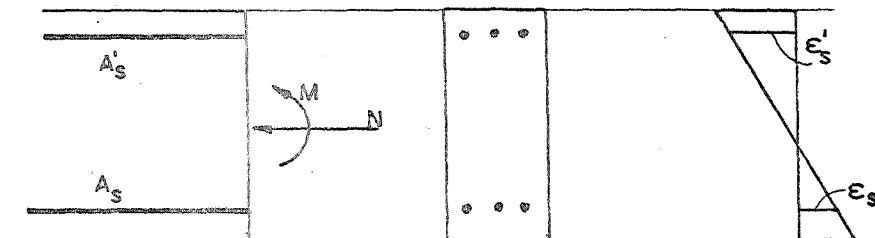
$$M_d = A'_s \sigma'_s \cdot \frac{c}{2} - A_s \sigma_s \cdot \frac{c}{2} \quad (7.7)$$

$$\frac{\epsilon_c}{x} = \frac{\epsilon_s}{x-d} = \frac{\epsilon'_s}{x-d'} = \frac{0,002}{x-3/7h} \quad (7.8)$$

Como foi visto no item 5, esse problema admite infinitas soluções se não houver nenhuma condição imposta.

Impondo a condição $A'_s = A_s$, o problema passa a ter uma única solução. Desta solução saem valores para x , σ_s , σ'_s e A_s . Percebe-se então as dificuldades que apareceriam ao se tentar facilitar a resolução por meio de tabelas. A solução existe e pode ser encontrada sem grandes dificuldades, porém, resolvendo analiticamente o sistema.

7.3. uma armadura tracionada e outra comprimida, simétricas



- Fig. 11 -

O equacionamento e o balanceamento do sistema são feitos de maneira idêntica ao que foi feito no item 4. Lembra-se apenas que lá (item 4), para levantar a indeterminação do sistema, foi arbitrado um valor para k_y . No caso presente, isso não é mais possível pois já existe uma outra condição imposta: a de serem iguais as armaduras A_s e A'_s . Com esta imposição, o sistema apresenta apenas uma solução, da qual saem os valores de k_y e A_s . O valor obtido para k_y poderá estar enquadrado numa das seguintes situações:

$$k_y < k_{y23} = 0,21 \quad (\text{domínio 2})$$

$$0,21 \leq k_y \leq k_{y34} = k_{yd} \quad (\text{domínio 3})$$

$$k_{yd} < k_y < k_{yd44a} \quad (\text{domínio 4})$$

Como o equacionamento do problema foi feito admitindo o domínio 3 (item 4), se o k_y obtido for correspondente aos domínios 2 ou 4, ter-se-ia que refazer o problema, com novo equacionamento.

No caso de se obter um valor para k_y correspondente ao domínio 3, de acordo então com as hipóteses iniciais, a solução será correta. Com essas considerações, resolveu-se abordar o problema apenas no domínio 3, mesmo porque a utilização de armadura de compressão no domínio 2, ou de armadura de tração mal aproveitada no domínio 4, constituem, em geral, soluções inadequadas.

As equações adimensionais para o problema em questão, no domínio 3, e com $A'_s = A_s$ são:

$$v = 0,85k_y + \rho(\alpha' - \alpha) \quad (7.9)$$

$$\mu = 0,425k_y(k_h - k_y) + 0,5\rho(\alpha' + \alpha)(2 - k_h) \quad (7.10)$$

Este sistema pode ser resolvido em termos de ρ e k_y , desde que seja conhecido o parâmetro d' , ou seja, σ'_s . Sem o conhecimento prévio de σ'_s , o sistema deverá ser resolvido por tentativas. Existe, porém, uma maneira simplificada de se encontrar a solução do sistema, que consiste em fixar um valor médio para σ'_s . Isto é possível no domínio 3, onde para os valores usuais de k_h ter-se-á pequena variação nos valores de σ'_s .

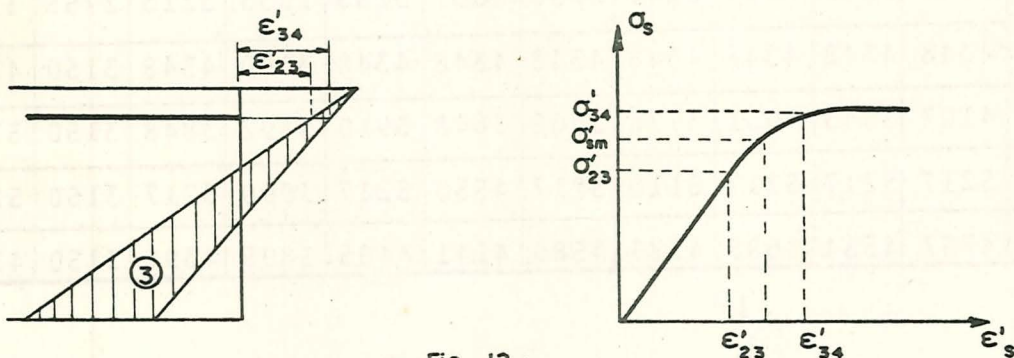
Isto posto, os valores de k_y e ρ podem ser encontrados pelas expressões abaixo:

$$0,425k_y \left[k_h - k_y + (2 - k_h) \frac{f_{yd} + \sigma'_s}{f_{yd} - \sigma'_s} \right] = \mu + 0,5v \frac{f_{yd} + \sigma'_s}{f_{yd} - \sigma'_s} (2 - k_h) \quad (7.11)$$

$$\rho = \frac{\mu - 0,425k_y(k_h - k_y)}{0,5(\alpha + \alpha')(2 - k_h)} \quad (7.12)$$

Para tornar simples a obtenção dos resultados finais, é preciso construir tabelas auxiliares:

a) uma para a apresentação dos valores médios de σ'_s
(TABELA 11)



- Fig. 12 -

b) outra, na qual, entrando-se com o valor numérico do segundo membro da equação (7.11) determina-se o k_y correspondente (TABELA 12)

7.4. condições limites

As condições limites para a definição da zona onde é "possível" a determinação de armaduras simétricas, serão obtidas através dos valores limites de k_y :

$$0,21 \leq k_y \leq k_{yd}$$

Impondo, na equação (7.11), o valor $k_y = 0,21$, determina-se a equação da reta \bar{S}_1 (fig.13).

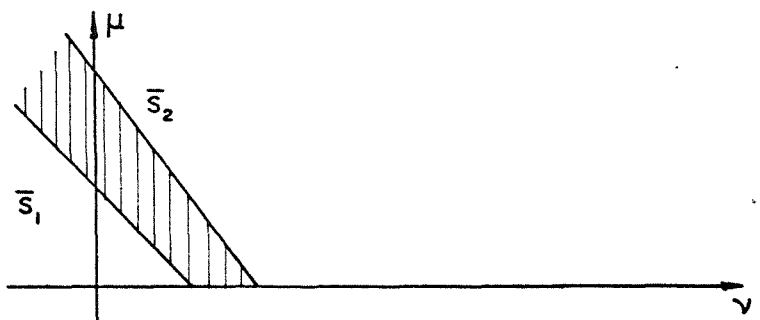
Impondo, na equação (7.11), o valor $k_y = k_{yd}$, determina-se a equação da reta \bar{S}_2 (fig.13).

Se o ponto definido pelo par (μ, ν) estiver sobre uma das retas (\bar{S}_1 ou \bar{S}_2), pode-se utilizar os valores exatos de σ'_s . Estes valores são encontrados na tabela 1.

TABELA 1

Valores de σ'_s (kgf/cm²) para $k_y = 0,21$ e $k_y = k_{yd}$ (domínio 3)

Aço	$k_h = 1,03$		$k_h = 1,05$		$k_h = 1,05$		$k_h = 1,1$		$k_h = 1,12$		$k_h = 1,15$	
	0,21	k_{yd}	0,21	k_{yd}	0,21	k_{yd}	0,21	k_{yd}	0,21	k_{yd}	0,21	k_{yd}
CA25	2174	2174	2174	2174	2174	2174	2174	2174	2174	2174	2174	2174
CA32	2783	2783	2783	2783	2783	2783	2783	2783	2783	2783	2783	2783
CA40A	3478	3478	3478	3478	3478	3478	3478	3478	3478	3478	3478	3478
CA40B	3341	3389	3269	3352	3148	3295	3057	3255	2953	3213	2755	3146
CA50A	4348	4348	4348	4348	4348	4348	4348	4348	3990	4348	3150	4348
CA50B	4043	4107	3945	4051	3778	3968	3648	3910	3492	3848	3150	3747
CA60A	5217	5217	5217	5217	5110	5217	4550	5217	3990	5217	3150	5217
CA60B	4684	4757	4554	4685	4328	4586	4141	4485	3895	4395	3150	4241



- Fig. 13 -

III. EXEMPLOS

1. Exemplo de dimensionamento na zona A

Dados: $b_w = 20\text{cm}$; $h = 50\text{cm}$; $d' = 3\text{cm}$;

$N = - 42,9\text{tf}$; $M = 714\text{tfcm}$

$f_{ck} = 200\text{kgf/cm}$; aço CA-60A

Pode-se: determinar as armaduras

$$v = \frac{1,4(-42,9)}{20 \times 47 \times 0,2/1,4} = - 0,447$$

$$\mu = \frac{1,4 \times 714}{20 \times 47^2 \times 0,2/1,4} = 0,158$$

$$k_h = 50/47 = 1,06 \approx 1,05$$

Entrando com esses valores no gráfico 5, vê-se que o dimensionamento corresponderá a zona A

$$\text{TABELA 2} \rightarrow A = 2,105\mu - v = 0,78$$

$$A' = -2,105\mu - v = 0,114$$

Sendo $\alpha = f_{yd}/f_{cd} = 36,52$ e $\alpha' = \alpha$, obtêm-se

$$\rho = A/2\alpha = 0,0107 \rightarrow A_s = 10,04\text{cm}^2$$

$$\rho = A'/2\alpha' = 0,0016 \rightarrow A'_s = 1,47\text{cm}^2$$

2. Exemplo de dimensionamento na zona B

Dados: $b_w = 20\text{cm}$; $h = 50\text{cm}$; $d' = 2\text{cm}$

$N = 7,1\text{tf}$; $M = 714\text{tfcm}$

$f_{ck} = 200\text{kgf/cm}^2$; aço CA-50B

Pede-se: determinar as armaduras

$$v = \frac{1,4 \times 7,1}{20 \times 47 \times 0,2/1,4} = 0,074$$

$$\mu = \frac{1,4 \times 714}{20 \times 47^2 \times 0,2/1,4} = 0,158$$

$$k_h = 50/47 \approx 1,05$$

Entrando com estes valores no gráfico 4, vê-se que o dimensionamento corresponderá à zona B.

$$\text{TABELA 3} \rightarrow A = \mu + 0,475v = 0,193$$

$$\text{TABELA 4} \rightarrow k_y = 0,27$$

$$\rho = \frac{0,85k_y - v}{\alpha} = \frac{0,85 \times 0,27 - 0,074}{30,43} = 0,0051$$

$$A_s = \rho (b_w d) = 0,0051 (20 \cdot 47) = 4,8 \text{ cm}^2$$

3. Exemplo de dimensionamento na zona C

$$\text{Dados: } b_w = 20 \text{ cm ; } h = 50 \text{ cm ; } d' = 3 \text{ cm}$$

$$N = 38,5 \text{ t ; } M = 2570 \text{ tfcm}$$

$$f_{ck} = 180 \text{ kgf/cm}^2 \text{ ; aço CA-50B}$$

Pede-se: determinar as armaduras

$$v = \frac{1,4 \times 38,5}{20 \times 47 \times 0,18/1,4} = 0,446$$

$$\mu = \frac{1,4 \times 2.570}{20 \times 47^2 \times 0,18/1,4} = 0,633$$

$$k_h = 50/47 \approx 1,05$$

Entrando com estes valores no gráfico 4, vê-se que o dimensionamento corresponderá à zona C.

TABELA 5 $\rightarrow \sigma'_s = 4.051 \text{kgf/cm}^2$

$$\alpha' = \sigma'_s / f_{cd} = 31,50$$

$$\alpha = f_{yd} / f_{cd} = 33,81$$

TABELA 6 $\rightarrow A = 2,105\mu - \nu + 0,0895 = 0,976$

$$A' = 2,105\mu + \nu - 0,5397 = 1,239$$

$$\rho = A / 2\alpha = 0,0144 \rightarrow A_s = 13,57 \text{cm}^2$$

$$\rho' = A' / 2\alpha' = 0,0197 \rightarrow A'_s = 18,48 \text{cm}^2$$

4. Exemplo de dimensionamento na zona D

Dados: $b_w = 20 \text{cm}$; $h = 60 \text{cm}$; $d' = 3 \text{cm}$

$$N = 60 \text{tf} ; M = 857 \text{tfcm}$$

$$f_{ck} = 120 \text{kgf/cm} ; \text{aço CA-40B}$$

Pede-se: determinar as armaduras

$$\nu = \frac{1,4 \times 60}{20 \times 57 \times 0,12 / 1,4} = 0,860$$

$$\mu = \frac{1,4 \times 857}{20 \times 57^2 \times 0,12 / 1,4} = 0,215$$

$$k_h = 60 / 57 \approx 1,05$$

Entrando com estes valores no gráfico 3, vê-se que o dimensionamento corresponderá à zona D.

TABELA 7 $\rightarrow 0,475\nu - \mu = 0,194$

$$k_y = 0,73$$

TABELA 8 $\rightarrow \sigma'_s = 3.394 \text{kgf/cm}^2$

$$\alpha' = \sigma'_s / f_{cd} = 39,58$$

$$\rho' = \frac{\nu - 0,85k_y}{\alpha'} = 0,0061$$

$$A'_s = 6,90 \text{cm}^2$$

Embora, teoricamente, não se tenha necessidade de armadura tracionada, a NB-1/75 exige um mínimo de:

$$(A_s)_{\min} = 0,0015 (b_w d) = 1,71 \text{cm}^2$$

5. Exemplo de dimensionamento na zona E

Dados: $b_w = 20 \text{cm}$; $h = 60 \text{cm}$; $d' = 3 \text{cm}$

$$N = 121 \text{tf} ; M = 435 \text{tfcm}$$

$$f_{ck} = 150 \text{kgf/cm}^2 ; \text{aço CA-25}$$

Pede-se: determinar as armaduras

$$A_s \text{ e } A'_s.$$

$$\mu = \frac{1,4 \times 435}{20 \times 57^2 \times 0,15 / 1,4} = 0,087 \text{ e } \nu = \frac{1,4 \times 121}{20 \times 57 \times 0,15 \times 1,4} = 1,39$$

$$k_h \approx 1,05$$

Entrando com estes valores no gráfico 1, vê-se que o dimensionamento corresponderá à zona E.

$$\text{TABELA 10} \rightarrow A = 2,105\mu + \nu - 0,8925 = 0,314$$

$$A' = 2,105\mu + \nu - 0,8925 = 0,681$$

$$\text{TABELA 9} \rightarrow \sigma'_s = 2,174 \text{kgf/cm}^2$$

$$\alpha' = 20,29$$

$$\rho = A/2\alpha' = 0,0077 \rightarrow A_s = 8,83\text{cm}^2$$

$$\rho' = A'/2\alpha' = 0,0168 \rightarrow A'_s = 19,13\text{cm}^2$$

6. Exemplo de dimensionamento com armadura simétrica

Dados: $b_w = 20\text{cm}$; $h = 50\text{cm}$; $d' = 4\text{cm}$

$$N = 21,4\text{tf} ; M = 1600\text{tfcm}$$

$$f_{ck} = 180\text{kgf/cm}^2 ; \text{aço CA-50A}$$

Pede-se: determinar as armaduras

$$v = \frac{1,4 \times 21,4}{20 \times 46 \times 0,18 / 1,4} = 0,253$$

$$\mu = \frac{1,4 \times 1600}{20 \times 46^2 \times 0,18 / 1,4} = 0,412$$

$$k_h \cong 1,1$$

Entretanto com estes valores no gráfico 4, vê-se que o dimensionamento é possível com armaduras simétricas.

TABELA 11 $\rightarrow \sigma'_s = 4348\text{kgf/cm}^2$

$$k_y = \frac{v}{0,85} = 0,298$$

$$\alpha_o = \alpha' = 33,81$$

$$\rho = \frac{-0,425k_y(k_h - k_y) + \mu}{0,5(\alpha + \alpha')(2 - k_h)} = 0,0102$$

$$A_s = A'_s = 9,39\text{cm}^2$$

7. Exemplo de dimensionamento com armaduras simétricas

Dados: (mesmos do exemplo anterior, com exceção do aço:
aço CA-50B)

Pede-se: determinar as armaduras de tal modo a se ter

$$A_s = A'_s$$

Entrando com os mesmos valores de μ , ν e k_h , do exemplo anterior, no gráfico 4, vê-se que o dimensionamento é possível com armaduras simétricas.

$$\text{TABELA 11} \rightarrow \sigma'_s = 3.779 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\text{TABELA 13 } (k_h = 1,1 ; \text{ CA-50B}) \rightarrow \mu + 6,45\nu = 2,044$$

$$k_y = 0,36$$

$$\alpha = 33,81$$

$$\alpha' = 29,39$$

$$\rho = \frac{-0,425k_y(k_h - k_y) + \mu}{0,5(\alpha + \alpha')(2 - k_h)} = 0,0105$$

$$A_s = A'_s = 9,66 \text{ cm}^2$$

IV. GRÁFICOS

Nos gráficos que seguem estão representados as diversas zonas de solicitação, com os limites correspondentes para valores de $k_h = 1,05$ e $k_h = 1,10$.

O dimensionamento com armaduras simétricas (somente no domínio 3) fica restrito às regiões delimitadas pelas retas \bar{S}_1 e \bar{S}_2 .

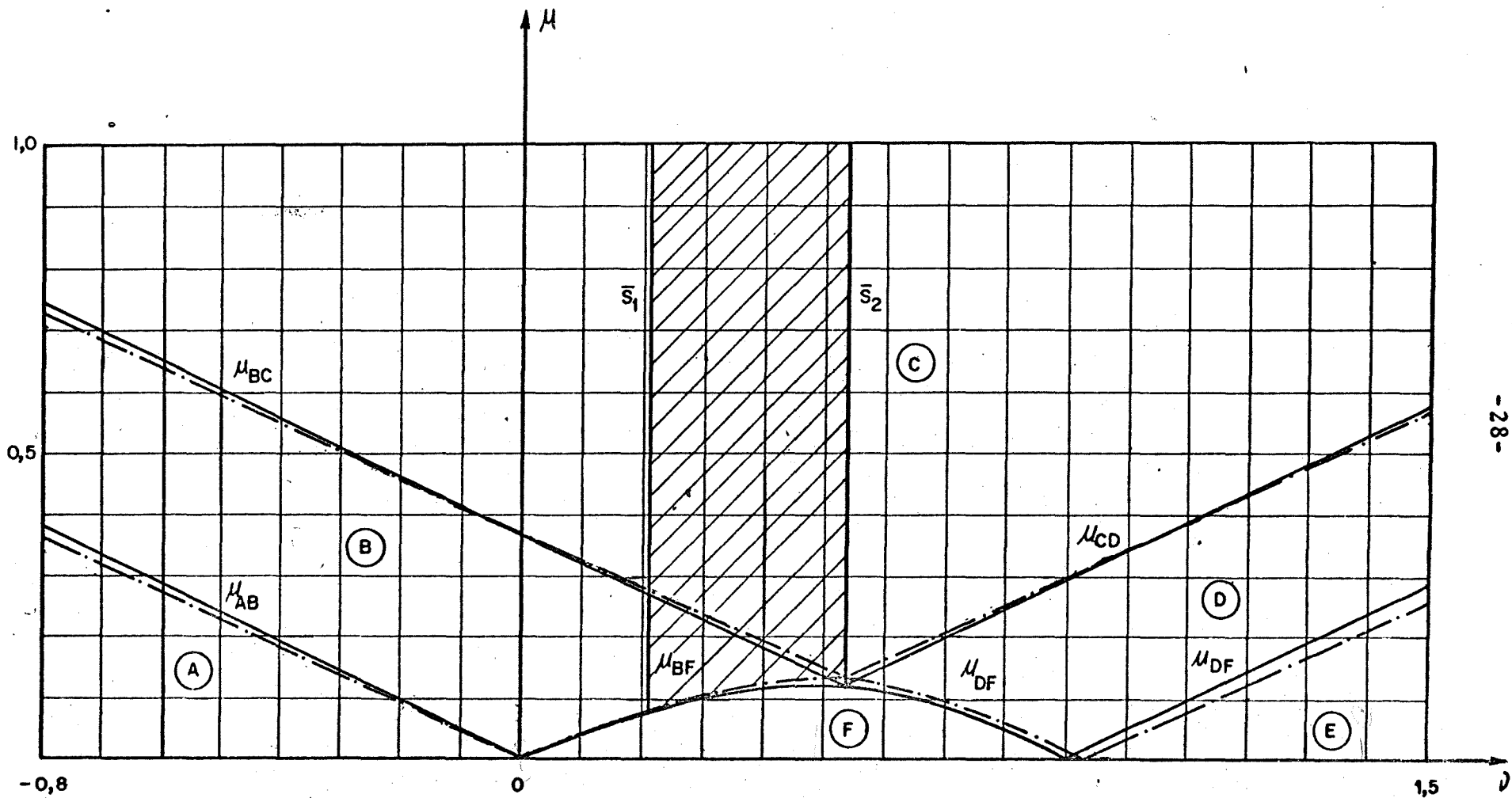


GRÁFICO - 1- LIMITES DAS ZONAS CA - 25 e CA - 32

————— $k_h = 1,05$
 - . . . - . . . $k_h = 1,10$

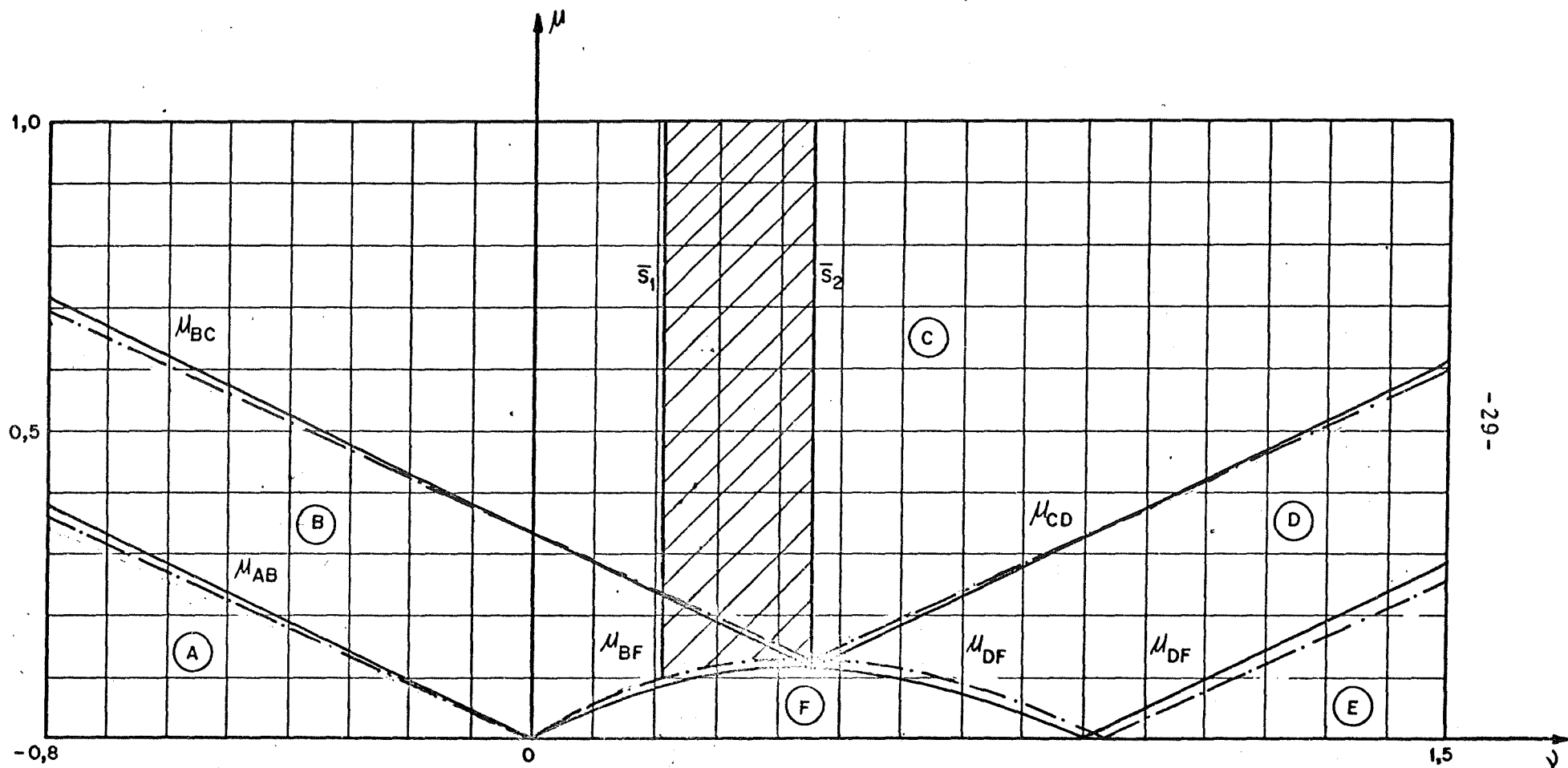
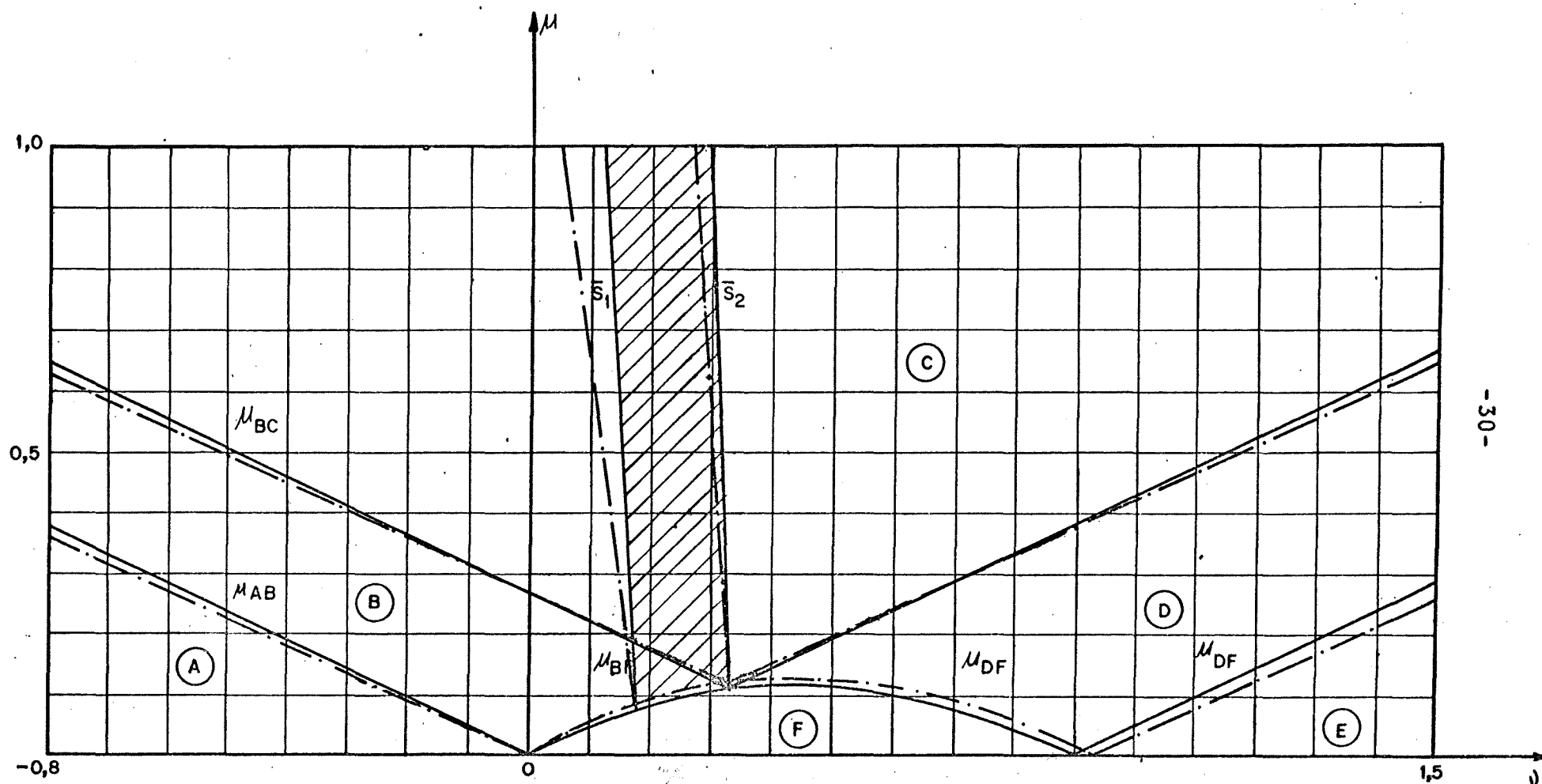


GRÁFICO -2- LIMITES DAS PARA CA - 40 A

————— $k_h = 1,05$
 - $k_h = 1,10$



-30-

GRÁFICO - 3 - LIMITES DAS ZONAS PARA CA - 40 B

————— $k_h = 1,05$
 - · - · - · $k_h = 1,10$

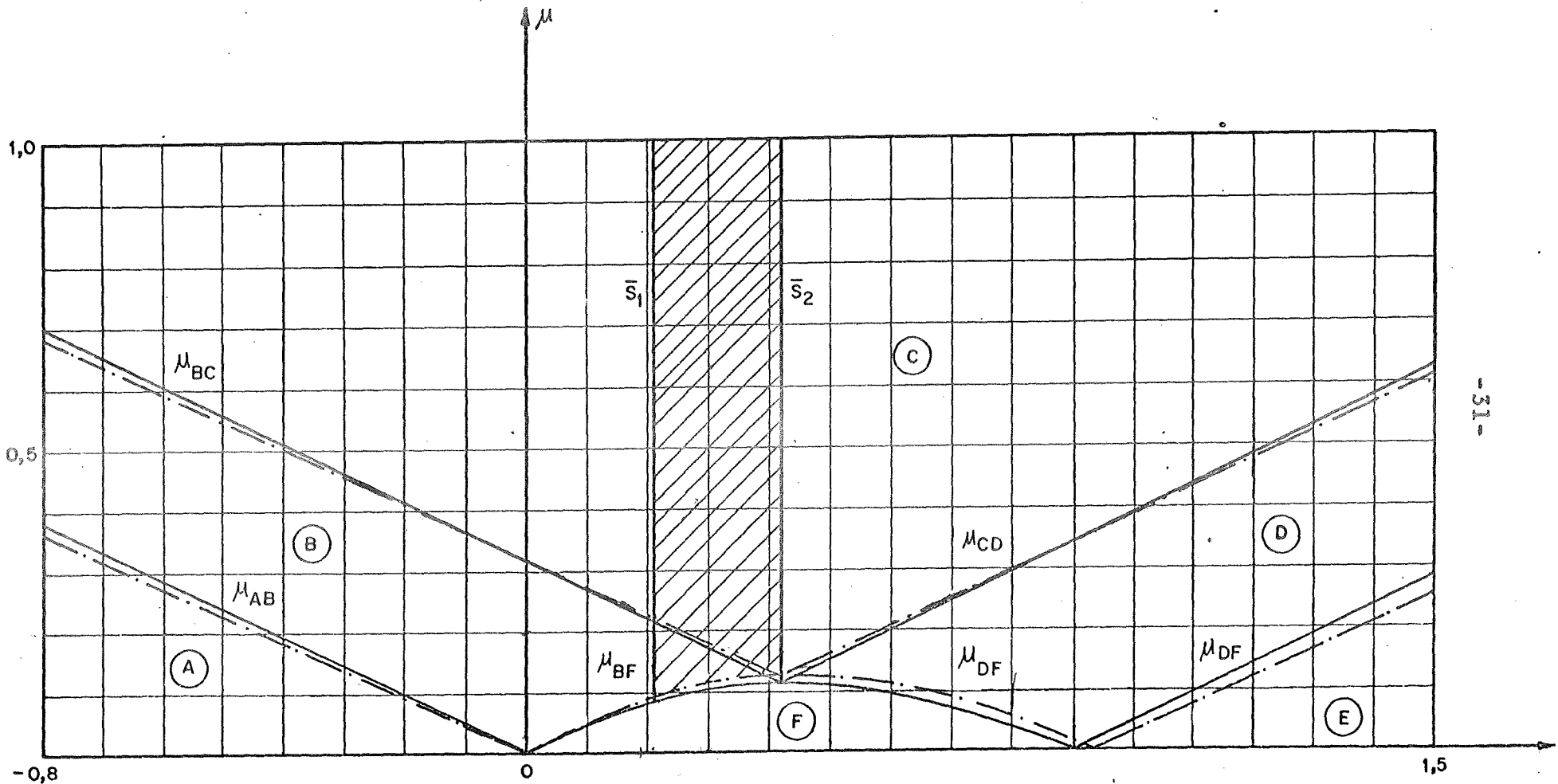


GRÁFICO - 4 - LIMITES DAS ZONAS PARA CA - 50 A

————— $k_h = 1,05$
 - $k_h = 1,10$

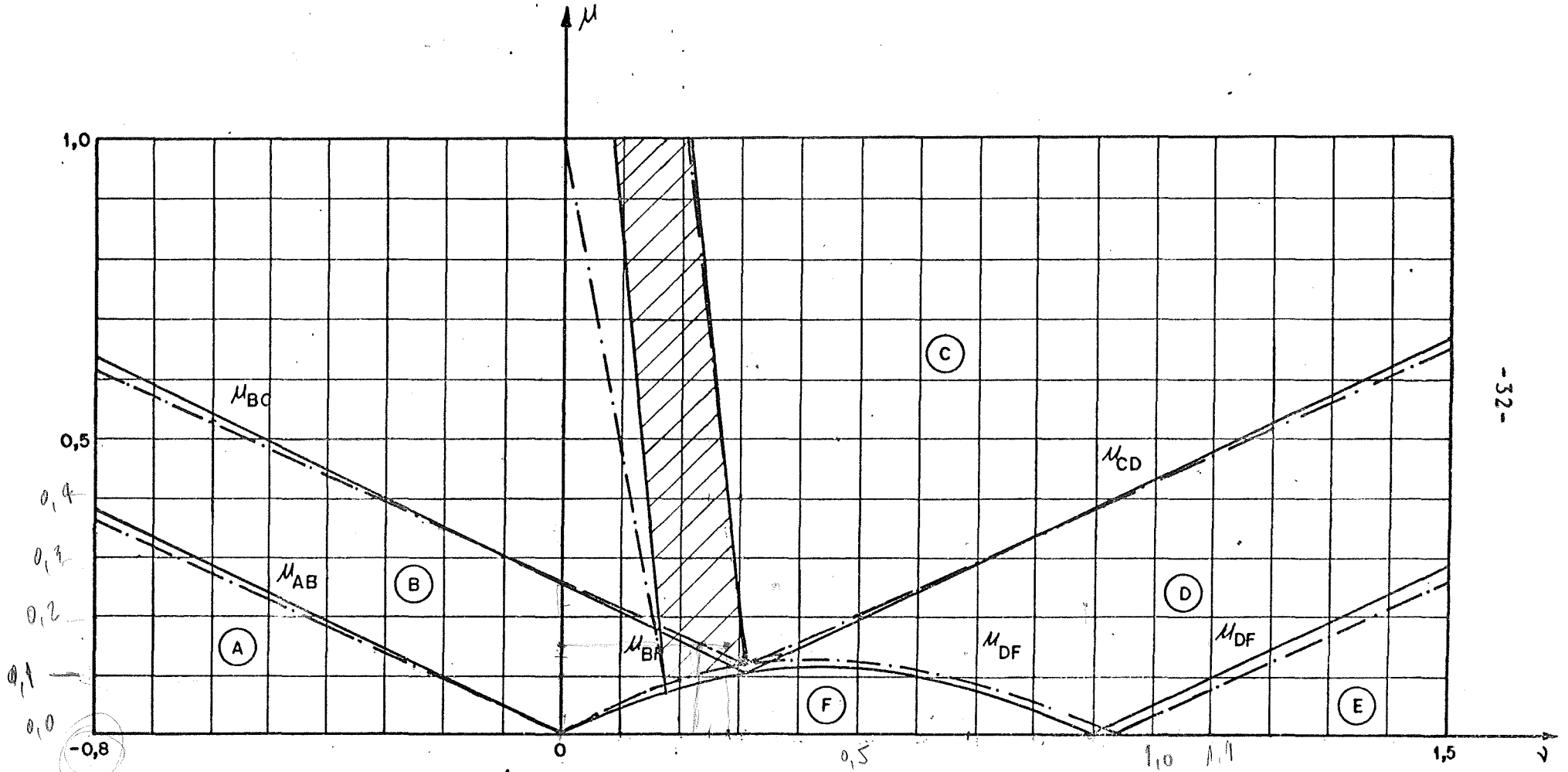


GRÁFICO - 5 - LIMITES DA ZONAS PARA CA - 50 B

— $k_h = 1,05$
 - - - $k_h = 1,10$

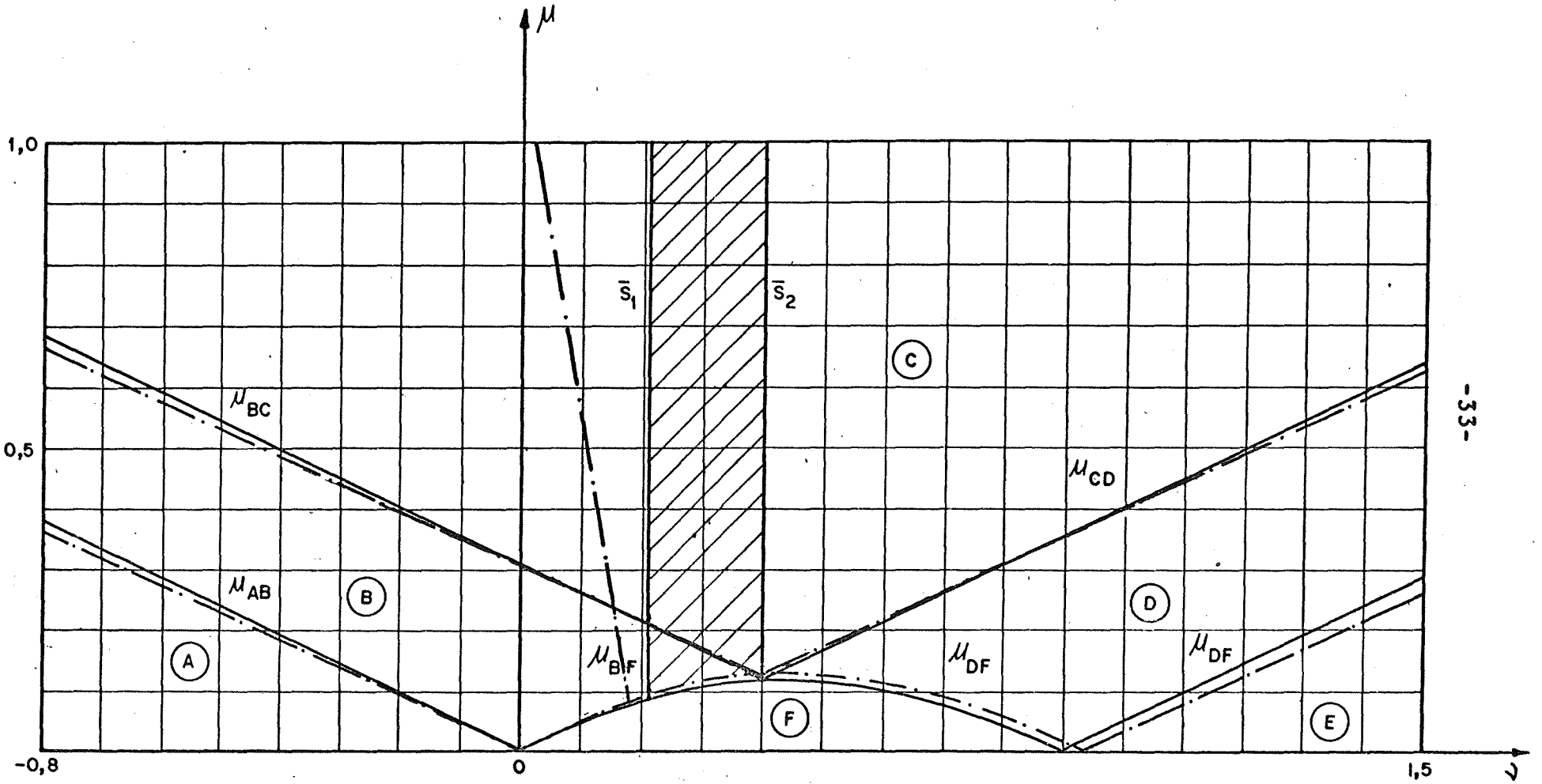


GRÁFICO - 6 - LIMITES DAS ZONAS PARA CA - 60 A

————— $k_h = 1,05$
 - - - - - $k_h = 1,10$

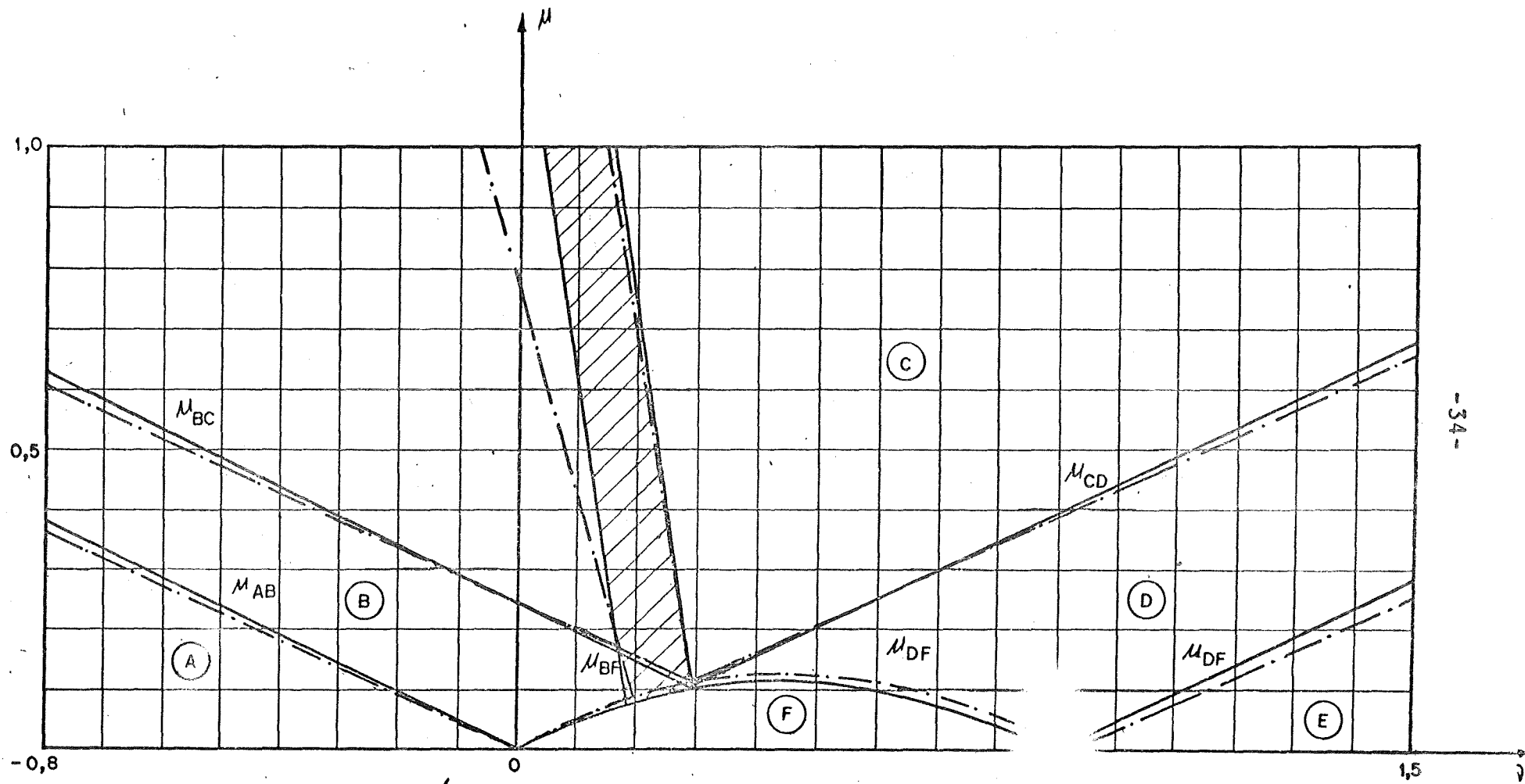


GRÁFICO - 7- LIMITES DAS ZONAS PARA CA - 60 B

— $k_h = 1,05$
 - · - $k_h = 1,10$

V. TABELAS AUXILIARES PARA A RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS NAS DIVERSAS ZONAS.

ZONA - A

$$A_s = \rho b_w d$$

$$A'_s = \rho' b_w d$$

$$\rho = \frac{A}{2\alpha}$$

$$\rho' = \frac{A'}{2\alpha}$$

$$\alpha = \frac{f_{yd}}{f_{cd}}$$

TABELA 2 - VALORES DE A E A'

$k_h = h/d$	A	A'
1,03	2,06 μ -v	-2,06 μ -v
1,05	2,105 μ -v	-2,105 μ -v
1,08	2,174 μ -v	-2,174 μ -v
1,10	2,222 μ -v	-2,222 μ -v
1,12	2,273 μ -v	-2,273 μ -v
1,15	2,353 μ -v	-2,353 μ -v

ZONA - B

$$A_s = \rho b_w d$$

$$A'_s = 0$$

$$\rho = \frac{0,85k_y - v}{\alpha}$$

$$k_y = f(A)$$

$$\alpha = f_{yd}/f_{cd}$$

TABELA 3 - VALORES DE A

$k_h = h/d$	A
1,03	$\mu + 0,485v$
1,05	$\mu + 0,475v$
1,08	$\mu + 0,460v$
1,10	$\mu + 0,450v$
1,12	$\mu + 0,440v$
1,15	$\mu + 0,425v$

TABELA 4 - VALORES DE k_y EM FUNÇÃO DE A

A	k_y	A	k_y	A	k_y	A	k_y
0,0085	0,01	0,1251	0,16	0,2227	0,31	0,3011	0,46
0,0168	0,02	0,1322	0,17	0,2285	0,32	0,3056	0,47
0,0251	0,03	0,1392	0,18	0,2342	0,33	0,3101	0,48
0,0336	0,04	0,1462	0,19	0,2399	0,34	0,3145	0,49
0,0414	0,05	0,1530	0,20	0,2454	0,35	0,3188	0,50
0,0495	0,06	0,1598	0,21	0,2509	0,36	0,3230	0,51
0,0574	0,07	0,1664	0,22	0,2563	0,37	0,3271	0,52
0,0653	0,08	0,1730	0,23	0,2616	0,38	0,3311	0,53
0,0731	0,09	0,1795	0,24	0,2669	0,39	0,3351	0,54
0,0808	0,10	0,1859	0,25	0,2720	0,40	0,3389	0,55
0,0884	0,11	0,1923	0,26	0,2771	0,41	0,3427	0,56
0,0959	0,12	0,1985	0,27	0,2820	0,42	0,3464	0,57
0,1033	0,13	0,2047	0,28	0,2869	0,43	0,3500	0,58
0,1107	0,14	0,2108	0,29	0,2917	0,44	0,3536	0,59
0,1179	0,15	0,2168	0,30	0,2964	0,45	0,3570	0,60

ZONA - C

$$A_s = \rho b_w d$$

$$A'_s = \rho' b_w d$$

$$\rho = A/2\alpha$$

$$\rho' = A'/2\alpha'$$

$$\alpha = f_{yd}/f_{cd}$$

$$\alpha' = \sigma'_s/f_{cd}$$

TABELA 5 - VALORES DE σ'_s (kgf/cm²)

AÇO	$k_h = 1,03$	$k_h = 1,05$	$k_h = 1,08$	$k_h = 1,10$	$k_h = 1,12$	$k_h = 1,15$
CA-25	2174	2174	2174	2174	2174	2174
CA-32	2783	2783	2783	2783	2783	2783
CA-40A	3478	3478	3478	3478	3478	3478
CA-40B	3389	3352	3295	3255	3213	3146
CA-50A	4348	4348	4348	4348	4348	4348
CA-50B	4107	4051	3968	3910	3848	3747
CA-60A	5217	5217	5217	5217	5217	5217
CA-60B	4757	4685	4586	4485	4395	4241

TABELA 6 - VALORES DE A e A'

	Aço	A	A'
$k_h = 1,05$	CA-25	$2,105\mu - \nu + 0,286$	$2,105\mu + \nu - 0,7638$
	CA-32	$2,105\mu - \nu + 0,2495$	$2,105\mu + \nu - 0,7371$
	CA-40A	$2,105\mu - \nu + 0,2153$	$2,105\mu + \nu - 0,7079$
	CA-40B	$2,105\mu - \nu + 0,1021$	$2,105\mu + \nu - 0,5635$
	CA-50A	$2,105\mu - \nu + 0,1811$	$2,105\mu + \nu - 0,6734$
	CA-50B	$2,105\mu - \nu + 0,0895$	$2,105\mu + \nu - 0,5397$
	CA-60A	$2,105\mu - \nu + 0,1541$	$2,105\mu + \nu - 0,6414$
	CA-60B	$2,105\mu - \nu + 0,0788$	$2,105\mu + \nu - 0,5178$

	Aço	A	A'
$k_h = 1,10$	CA-25	$2,222\mu - \nu + 0,2434$	$2,222\mu + \nu - 0,8062$
	CA-32	$2,222\mu - \nu + 0,2085$	$2,222\mu + \nu - 0,7781$
	CA-40A	$2,222\mu - \nu + 0,1760$	$2,222\mu + \nu - 0,7472$
	CA-40B	$2,222\mu - \nu + 0,0709$	$2,222\mu + \nu - 0,5948$
	CA-50A	$2,222\mu - \nu + 0,1437$	$2,222\mu + \nu - 0,7109$
	CA-50B	$2,222\mu - \nu + 0,0595$	$2,222\mu + \nu - 0,5697$
	CA-60A	$2,222\mu - \nu + 0,1184$	$2,222\mu + \nu - 0,6771$
	CA-60B	$2,222\mu - \nu + 0,0500$	$2,222\mu + \nu - 0,5465$

	Aço	A	A'
$k_h = 1,15$	CA-25	$2,353\mu - \nu + 0,1960$	$2,353\mu + \nu - 0,8536$
	CA-32	$2,353\mu - \nu + 0,1627$	$2,353\mu + \nu - 0,8239$
	CA-40A	$2,353\mu - \nu + 0,1320$	$2,353\mu + \nu - 0,7912$
	CA-40B	$2,353\mu - \nu + 0,0359$	$2,353\mu + \nu - 0,6299$
	CA-50A	$2,353\mu - \nu + 0,1019$	$2,353\mu + \nu - 0,7527$
	CA-50B	$2,353\mu - \nu + 0,0260$	$2,353\mu + \nu - 0,6032$
	CA-60A	$2,353\mu - \nu + 0,0786$	$2,353\mu + \nu - 0,7169$
	CA-60B	$2,353\mu - \nu + 0,0179$	$2,353\mu + \nu - 0,5787$

ZONA - D

$$A_s = \text{mínimo}$$

$$A'_s = \rho' b_w d$$

$$\rho' = \frac{v - 0,85k_y}{\alpha'}$$

$$\alpha' = \sigma'_s / f_{cd}$$

TABELA 7

VALORES DE k_y EM FUNÇÃO DE μ , v e k_h

k_y	$k_h = 1,05$	$k_h = 1,10$	$k_h = 1,15$
	$0,475v - \mu$	$0,450v - \mu$	$0,425v - \mu$
0,35	0,0372	0,0223	0,0074
0,36	0,0398	0,0245	0,0092
0,37	0,0425	0,0267	0,0110
0,38	0,0452	0,0291	0,0129
0,39	0,0481	0,0315	0,0149
0,40	0,0510	0,0340	0,0170
0,41	0,0540	0,0366	0,0192
0,42	0,0571	0,0393	0,0214
0,43	0,0603	0,0420	0,0237
0,44	0,0636	0,0449	0,0262
0,45	0,0669	0,0478	0,0287
0,46	0,0704	0,0508	0,0313
0,47	0,0739	0,0539	0,0340
0,48	0,0775	0,0571	0,0367
0,49	0,0812	0,0604	0,0396
0,50	0,0850	0,0638	0,0425
0,51	0,0889	0,0672	0,0455
0,52	0,0928	0,0707	0,0486
0,53	0,0969	0,0743	0,0517
0,54	0,1010	0,0783	0,0560
0,55	0,1052	0,0818	0,0584
0,56	0,1095	0,0857	0,0619
0,57	0,1139	0,0896	0,0654
0,58	0,1183	0,0937	0,0690

ZONA - D

$$A_s = \text{mínimo}$$

$$A'_s = \rho' b_w d$$

$$\rho' = \frac{v - 0,85k_y}{\alpha'}$$

$$\alpha' = \sigma'_s / f_{cd}$$

TABELA 7 (continuação)

VALORES DE k_y EM FUNÇÃO DE μ , v e k_h

k_y	$k_h = 1,05$	$k_h = 1,10$	$k_h = 1,15$
	$0,475v - \mu$	$0,450v - \mu$	$0,425v - \mu$
0,59	0,1229	0,0978	0,0727
0,60	0,1275	0,1020	0,0765
0,61	0,1322	0,1063	0,0804
0,62	0,1370	0,1107	0,0843
0,63	0,1419	0,1151	0,0884
0,64	0,1469	0,1197	0,0925
0,65	0,1519	0,1243	0,0967
0,66	0,1571	0,1290	0,1010
0,67	0,1623	0,1338	0,1054
0,68	0,1676	0,1387	0,1098
0,69	0,1730	0,1437	0,1144
0,70	0,1785	0,1488	0,1190
0,71	0,1841	0,1539	0,1237
0,72	0,1897	0,1591	0,1285
0,73	0,1955	0,1644	0,1334
0,74	0,2013	0,1698	0,1384
0,75	0,2072	0,1753	0,1434
0,76	0,2132	0,1809	0,1486
0,77	0,2193	0,1865	0,1538
0,78	0,2254	0,1923	0,1591
0,79	0,2317	0,1981	0,1645
0,80	0,2380	0,2040	0,1700
0,81	0,2444	0,2100	0,1756
0,82	0,2509	0,2161	0,1812
0,83	0,2575	0,2222	0,1870
0,84	0,2642	0,2285	0,1928
0,85	0,2709	0,2348	0,1987
0,86	0,2778	0,2412	0,2047

ZONA - D

$$A_s = \text{mínimo}$$

$$A'_s = \rho' b_w d$$

$$\rho' = \frac{\mu - 0,85k_y}{\alpha'}$$

$$\alpha' = \sigma'_s / f_{cd}$$

TABELA 7 (continuação)

VALORES DE k_y EM FUNÇÃO DE μ , ν e k_h

k_y	$k_h = 1,05$	$k_h = 1,10$	$k_h = 1,15$
	$0,475\nu - \mu$	$0,450\nu - \mu$	$0,425\nu - \mu$
0,87	0,2847	0,2477	0,2108
0,88	0,2917	0,2543	0,2169
0,89	0,2988	0,2610	0,2232
0,90	0,3060	0,2678	0,2295
0,91	0,3133	0,2746	0,2359
0,92	0,3206	0,2815	0,2424
0,93	0,3281	0,2885	0,2490
0,94	0,3356	0,2956	0,2557
0,95	0,3432	0,3028	0,2624
0,96	0,3509	0,3101	0,2693
0,97	0,3587	0,3174	0,2762
0,98	0,3665	0,3249	0,2832
0,99	0,3745	0,3324	0,2903
1,00	0,3825	0,3400	0,2975
1,01	0,3906	0,3477	0,3048
1,02	0,3988	0,3555	0,3121
1,03	0,4071	0,3633	0,3196
1,04	0,4155	0,3713	0,3271
1,05	0,4239	0,3793	0,3347
1,06		0,3874	0,3424
1,07		0,3956	0,3502
1,08		0,4039	0,3580
1,09		0,4123	0,3660
1,10		0,4208	0,3740
1,11			0,3821
1,12			0,3903
1,13			0,3986
1,14			0,4070
1,15			0,4154

ZONA - D

VALORES DE σ'_s EM FUNÇÃO DE k_y (aços tipo B)

TABELA 8

CA-40B

	$k_y = 0,39$	$k_y = 1,05$
$k_h = 1,05$	3,35	3,41
$k_h = 1,10$	3,25	3,38
$k_h = 1,15$	3,15	3,35

CA-50B

	$k_y = 0,37$	$k_y = 1,05$
$k_h = 1,05$	4,05	4,13
$k_h = 1,10$	3,91	4,09
$k_h = 1,15$	3,75	4,05

CA-60B

	$k_y = 0,35$	$k_y = 1,05$
$k_h = 1,05$	4,65	4,80
$k_h = 1,10$	4,48	4,75
$k_h = 1,15$	4,24	4,70

OBSERVAÇÕES

- 1 - Para valores intermediários de k_y interpola-se linearmente, de acordo com a NB-1/75 (item 4.1.1.1, alínea e)
- 2 - Quando forem necessários valores mais precisos, pode-se utilizar as tabelas I, II e III, do apêndice.

ZONA - E

$$\rho = \frac{A}{2\alpha'}$$

$$\rho' = \frac{A'}{2\alpha'}$$

$$A_s = \rho b_w d$$

$$A'_s = \rho' b_w d$$

$$\alpha' = \sigma'_s / f_{cd}$$

TABELA 9

VALORES DE σ_s CORRESPONDENTES A $\epsilon_s = 0,2\%$

Aço	σ_s (kgf/cm ²)
CA-25	2174
CA-32	2783
CA-40A	3478
CA-40B	2994
CA-50A	4200
CA-50B	3555
CA-60A	4200
CA-60B	3997

enado f_y

TABELA 10

VALORES DE A e A' EM FUNÇÃO DE k_h

k_h	A	A'
1,03	$v-2,061\mu-0,8755$	$v+2,061\mu-0,8755$
1,05	$v-2,105\mu-0,8925$	$v+2,105\mu-0,8925$
1,08	$v-2,173\mu-0,9180$	$v+2,173\mu-0,9180$
1,10	$v-2,222\mu-0,9350$	$v+2,222\mu-0,9350$
1,12	$v-2,272\mu-0,9520$	$v+2,273\mu-0,9520$
1,15	$v-2,353\mu-0,9775$	$v+2,353\mu-0,9750$

ARMADURAS SIMÉTRICAS

TABELA 11

VALORES MÉDIOS DA TENSÃO σ'_s (kgf/cm²) PARA O DIMENSIONAMENTO NO DOMÍNIO 3

AÇO	$k_h = 1,03$	$k_h = 1,05$	$k_h = 1,08$	$k_h = 1,10$	$k_h = 1,12$	$k_h = 1,15$
CA-25	2174	2174	2174	2174	2174	2174
CA-32	2783	2783	2783	2783	2783	2783
CA-40A	3478	3478	3478	3478	3478	*3314
CA-40B	3365	3310	3221	3156	3083	*2950
CA-50A	4348	4348	4348	4348	4169	*3749
CA-50B	4075	3998	3873	3779	*3670	*3488
CA-60A	5217	5217	5217	*4883	*4603	*4183
CA-60B	4720	4619	4457	*4313	*4192	*3695

OBS.: a) Os valores com (*) podem acarretar erros maiores que 5% ; recomenda-se processo iterativo

ARMADURAS SIMÉTRICAS

O cálculo da taxa de armadura ρ será feito diferentemente, conforme se tenha $\sigma'_s = f_{yd}$ ou $\sigma'_s \neq f_{yd}$.

Quando $\sigma'_s = f_{yd}$, basta calcular k_y pela (I) e depois ρ pela (II).

Quando $\sigma'_s \neq f_{yd}$, o cálculo de k_y será feito através das tabelas (12) e (13). Obtido k_y , calcula-se σ'_s pela tabela (11), e daí determina-se ρ pela (III).

AÇOS COM $\sigma'_s = f_{yd}$

$k_h = 1,05$ (CA-25, CA-32, CA-40A, CA-50A, CA-60A)

$k_h = 1,10$ (CA-25, CA-32, CA-40A, CA-50A)

$$k_y = v/0,85 \quad (I)$$

$$\rho = \frac{\mu - 0,425k_y(k_h - k_y)}{(2 - k_h)\alpha} \quad (II)$$

$\frac{f_{yd}}{f_{cd}} = 2,35$

AÇOS COM $\sigma'_s \neq f_{yd}$

$k_h = 1,05$ (CA-40B, CA-50B, CA-60B)

$k_h = 1,10$ (CA-40B, CA-50B, CA-60B, CA-60A)

$k_y =$ obtido das tabelas (12) e (13)

$$\rho = \frac{\mu - 0,425k_y(k_h - k_y)}{0,5(\alpha + \alpha')(2 - k_h)} \quad (III)$$

ARMADURAS SIMÉTRICAS

TABELA 12

VALORES DE k_y PARA $k_h = 1,05$

19,16

k_y	CA-40B	CA-50B	CA-60B
	$\mu+21,7v$	$\mu+11,33v$	$\mu+7,82v$
0,20	3,766	1,998	1,402
0,21	3,948	2,097	1,471
0,22	4,136	2,196	1,540
0,23	4,323	2,295	1,609
0,24	4,509	2,394	1,678
0,25	4,696	2,493	1,747
0,26	4,883	2,591	1,816
0,27	5,070	2,690	1,884
0,28	5,256	2,788	1,953
0,29	5,443	2,886	2,021
0,30	5,629	2,985	2,090
0,31	5,815	3,083	2,158
0,32	6,002	3,181	2,226
0,33	6,118	3,279	2,294
0,34	6,374	3,377	2,363
0,35	6,560	3,475	2,431
0,36	6,746	3,573	
0,37	6,932	3,670	
0,38	7,117		
0,39	7,303		

ARMADURAS SIMÉTRICAS

TABELA 13

VALORES DE k_y PARA $k_h = 1,10$

k_y	CA-40B	CA-50B	CA-60A	CA-60B
	$\mu+9,27v$	$\mu+6,45v$	$\mu+13,63v$	$\mu+4,74v$
0,20	1,652	1,173	2,393	0,882
0,21	1,734	1,231	2,512	0,926
0,22	1,816	1,288	2,631	0,969
0,23	1,897	1,346	2,749	1,012
0,24	1,979	1,404	2,868	1,055
0,25	2,060	1,461	2,986	1,098
0,26	2,141	1,518	3,105	1,140
0,27	2,223	1,576	3,223	1,183
0,28	2,304	1,633	3,341	1,226
0,29	2,385	1,690	3,459	1,268
0,30	2,466	1,747	3,577	1,311
0,31	2,547	1,804	3,695	1,353
0,32	2,628	1,860	3,813	1,395
0,33	2,708	1,917	3,931	1,438
0,34	2,789	1,974	4,048	1,480
0,35	2,869	2,030	4,166	1,522
0,36	2,950	2,087	4,283	
0,37	3,030	2,143	4,401	
0,38	3,110		4,508	
0,39	3,191		4,635	
0,40			4,753	
0,41			4,870	
0,42			4,987	
0,43			5,103	
0,44			5,220	
0,45			5,337	
0,46			5,454	

A P E N D I C E

TABELA I - VALORES DE σ'_s EM FUNÇÃO DE k_y PARA OS AÇOS TIPO B

CA-40B

VALORES EM kgf/cm²

k_y	$k_h = 1,05$	$k_h = 1,10$	$k_h = 1,15$
0,39	3352	3254	3145
0,40	3354	3259	3153
0,41	3356	3264	3162
0,42	3359	3269	3169
0,43	3361	3273	3177
0,44	3362	3277	3183
0,45	3364	3281	3190
0,46	3366	3285	3196
0,47	3368	3288	3202
0,48	3369	3292	3208
0,49	3371	3295	3213
0,50	3372	3298	3218
0,51	3374	3301	3223
0,52	3375	3304	3228
0,53	3376	3307	3232
0,54	3378	3310	3237
0,55	3379	3312	3241
0,56	3380	3315	3245
0,57	3381	3317	3249
0,58	3382	3319	3252
0,59	3383	3321	3256
0,60	3384	3323	3259
0,61	3385	3326	3262

TABELA I - VALORES DE σ'_s EM FUNÇÃO DE k_y PARA OS AÇOS TIPO B

AÇO-40B (continuação)

VALORES EM kgf/cm²

k_y	$k_h = 1,05$	$k_h = 1,10$	$k_h = 1,15$
0,62	3386	3328	3266
0,63	3387	3329	3269
0,64	3388	3331	3271
0,65	3389	3333	3274
0,66	3389	3335	3277
0,67	3390	3338	3280
0,68	3391	3340	3283
0,69	3392	3340	3285
0,70	3392	3341	3287
0,71	3393	3343	3290
0,72	3394	3344	3292
0,73	3394	3345	3294
0,78	3395	3347	3296
0,75	3396	3348	3298
0,76	3396	3349	3300
0,77	3397	3351	3302
0,78	3398	3352	3304
0,79	3398	3353	3306
0,80	3399	3354	3308
0,81	3399	3355	3310
0,82	3400	3356	3311
0,83	3400	3357	3313
0,84	3401	3359	3315
0,85	3401	3360	3316
0,86	3402	3361	3318
0,87	3402	3361	3319
0,88	3403	3362	3321
0,89	3403	3363	3322
0,90	3404	3364	3323
0,91	3404	3365	3325
0,92	3404	3366	3326
0,93	3405	3367	3328

TABELA I - VALORES DE σ'_s EM FUNÇÃO
DE k_y PARA OS AÇOS TIPO B

CA-40B (continuação)

VALORES EM kgf/cm²

k_y	$k_h = 1,05$	$k_h = 1,10$	$k_h = 1,15$
0,94	3405	3368	3329
0,95	3406	3368	3330
0,96	3406	3369	3331
0,97	3406	3370	3332
0,98	3407	3371	3334
0,99	3407	3372	3335
1,00	3407	3372	3336
1,01	3408	3373	3337
1,02	3408	3374	3338
1,03	3408	3374	3339
1,04	3409	3375	3340
1,05	3409	3376	3341
1,06		3376	3342
1,07		3377	3343
1,08		3378	3344
1,09		3378	3345
1,10		3379	3346
1,11			3347
1,12			3348
1,13			3349
1,14			3349
1,15			3350

TABELA II - VALORES DE σ'_s EM FUNÇÃO DE k_y PARA OS AÇOS TIPO B

CA-50B

VALORES EM kgf/cm^2

k_y	$k_h = 1,05$	$k_h = 1,10$	$k_h = 1,15$
0,37	4051	3909	3746
0,38	4054	3917	3760
0,39	4059	3925	3773
0,40	4061	3932	3786
0,41	4064	3938	3797
0,42	4066	3945	3808
0,43	4069	3951	3818
0,44	4072	3956	3828
0,45	4074	3962	3837
0,46	4076	3967	3845
0,47	4079	3972	3854
0,48	4081	3976	3861
0,49	4083	3981	3869
0,50	4085	3985	3876
0,51	4087	3989	3883
0,52	4089	3993	3889
0,53	4090	3997	3895
0,54	4092	4000	3901
0,55	4094	4004	3907
0,56	4095	4007	3912
0,57	4097	4010	3917
0,58	4098	4013	3922

TABELA II - VALORES DE σ'_s EM FUNÇÃO DE k_y PARA OS AÇOS TIPO B

CA-50B (continuação)

VALORES EM kgf/cm^2

k_y	$k_h = 1,05$	$k_h = 1,10$	$k_h = 1,15$
0,59	4099	4016	3927
0,60	4101	4019	3932
0,61	4102	4022	3936
0,62	4103	4025	3941
0,63	4104	4027	3945
0,64	4106	4030	3949
0,65	4107	4032	3953
0,66	4109	4035	3956
0,67	4109	4037	3960
0,68	4110	4039	3963
0,69	4111	4041	3967
0,70	4112	4043	3970
0,71	4113	4045	3973
0,72	4114	4057	3976
0,73	4115	4049	3979
0,74	4116	4051	3982
0,75	4116	4053	3985
0,76	4117	4054	3988
0,77	4118	4056	3991
0,78	4119	4058	3993
0,79	4120	4059	3996
0,80	4120	4061	3998
0,81	4121	4062	4000
0,82	4122	4064	4003
0,83	4122	4065	4005
0,84	4123	4066	4007
0,85	4124	4068	4009
0,86	4124	4069	4011
0,87	4125	4070	4013
0,88	4126	4072	4015
0,89	4126	4073	4017
0,90	4127	4074	4019
0,91	4127	4075	4021
0,92	4128	4076	4023

TABELA II - VALORES DE σ'_s EM FUNÇÃO DE k_y PARA OS AÇOS TIPO B:

CA-50B (continuação)

VALORES EM kgf/cm^2

k_y	$k_h = 1,05$	$k_h = 1,10$	$k_h = 1,15$
0,93	4128	4078	4025
0,94	4129	4079	4026
0,95	4129	4080	4028
0,96	4130	4081	4030
0,97	4130	4082	4031
0,98	4131	4083	4033
0,99	4131	4084	4035
1,00	4132	4085	4036
1,01	4132	4086	4037
1,02	4133	4087	4039
1,03	4133	4088	4040
1,04	4134	4089	4042
1,05	4134	4089	4043
1,06		4090	4044
1,07		4091	4046
1,08		4092	4047
1,09		4093	4048
1,10		4094	4050
1,11			4051
1,12			4052
1,13			4053
1,14			4054
1,15			4055

TABELA III - VALORES DE σ_s' EM FUNÇÃO DE k_y PARA OS AÇOS TIPO B

CA-60B

VALORES EM kgf/cm²

$k_y =$	$k_d = 1,05$	$k_d = 1,10$	$k_d = 1,15$
0,35	4684	4484	4239
0,36	4689	4496	4262
0,37	4694	4507	4283
0,38	4699	4518	4303
0,39	4703	4528	4321
0,40	4707	4537	4338
0,41	4711	4546	4354
0,42	4715	4554	4369
0,43	4718	4562	4378
0,44	4722	4570	4396
0,45	4725	4577	4409
0,46	4728	4584	4421
0,47	4731	4590	4432
0,48	4733	4596	4442
0,49	4736	4602	4452
0,50	4739	4608	4462
0,51	4741	4613	4471
0,52	4743	4618	4480
0,53	4746	4623	4488
0,54	4748	4628	4496
0,55	4750	4633	4504
0,56	4752	4637	4511
0,57	4754	4641	4518
0,58	4756	4645	4525
0,59	4757	4649	4531
0,60	4759	4653	4537
0,61	4761	4657	4543
0,62	4762	4660	4549
0,63	4764	4663	4554
0,64	4766	4667	4560
0,65	4767	4670	4565

TABELA III - VALORES DE σ'_s EM FUNÇÃO DE k_y
PARA OS AÇOS TIPO B

CA-60B (continuação)

VALORES EM kgf/cm²

k_y	$k_h = 1,05$	$k_h = 1,10$	$k_h = 1,15$
0,66	4768	4673	4570
0,67	4770	4676	4575
0,68	4771	4679	4579
0,69	4772	4681	4584
0,70	4774	4684	4588
0,71	4775	4687	4592
0,72	4776	4689	4596
0,73	4777	4692	4600
0,74	4778	4694	4604
0,75	4779	4696	4608
0,76	4781	4699	4612
0,77	4782	4701	4615
0,78	4783	4703	4618
0,79	4784	4705	4622
0,80	4784	4707	4625
0,81	4785	4709	4628
0,82	4786	4711	4631
0,83	4787	4713	4634
0,84	4788	4715	4637
0,85	4789	4716	4640
0,86	4790	4718	4643
0,87	4791	4720	4645
0,88	4791	4722	4648
0,89	4792	4723	4650
0,90	4793	4725	4653
0,91	4794	4726	4655
0,92	4794	4728	4658
0,93	4795	4729	4660
0,94	4796	4731	4662
0,95	4796	4732	4665
0,96	4797	4733	4667
0,97	4798	4735	4669
0,98	4798	4736	4671
0,99	4799	4737	4673
1,00	4799	4739	4675
1,01	4800	4740	4677

TABELA III - VALORES DE σ'_s EM FUNÇÃO DE k_y
PARA OS AÇOS TIPO B

CA-60B (continuação)

VALORES EM kgf/cm^2

k_y	$k_h = 1,05$	$k_h = 1,10$	$k_h = 1,15$
1,02	4801	4741	4679
1,03	4801	4742	4681
1,04	4802	4743	4682
1,05	4802	4744	4684
1,06		4746	4686
1,07		4747	4688
1,08		4748	4689
1,09		4749	4691
1,10		4750	4693
1,11			4694
1,12			4696
1,13			4697
1,14			4699
1,15			4700