

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO B

CÁLCULO DE LAJES USUAIS EM EDIFÍCIOS

(NOTAS DE AULA)

ILIO MONTANARI

EDDIE MANCINI

SÃO CARLOS - 1974

# CÁLCULO DO PAVIMENTO TIPO DE UM EDIFÍCIO DE HABITAÇÃO COLETIVA.

## 1.- INTRODUÇÃO

A finalidade da disciplina "Estruturas de Concreto Armado B" é dar ao aluno elementos sumários para o cálculo de um e dif í c i o e, para isto isto, desenvolveremos o projeto de uma estrutura, com todos os cálculos e detalhes, mostrando uma das muitas organizações possíveis destes cálculos.

Atendo-nos ao tempo disponível, o edifício selecionado para o desenvolvimento do curso, será suposto constituído somente de pavimentos tipos. Com esta suposição, o trabalho manual normalmente existente num tal projeto será atenuado sem, entretanto, prejudicar a finalidade do curso.

Para o início dos trabalhos, num escritório de cálculo, necessitamos em primeiro lugar ter as plantas de arquitetura; em segundo lugar necessitamos também ter informações quanto a natureza do solo onde se implantará o edifício. Para este desenvolvimento, suporemos fornecidos todos estes elementos e, partindo deles descreveremos as diversas etapas de cálculo, até a entrega dos detalhes finais ao construtor.

Um edifício deve ser projetado para suportar cargas ver t i c a i s e horizontais. As primeiras são transmitidas a planos hori z o n t a i s -pisos dos edifícios- formados por lajes de concreto arma do. Estas lajes tem espessuras limitadas pela prática e, por isto, os vãos das mesmas devem também ser limitados. Essa limitação é feita colocando-se vigas, geralmente em duas direções per pend i c u l a r es, as quais servirão de apoio às lajes. O conjunto lajes e vi g as, aquelas apoiando-se sobre estas, forma a estrutura do pavimen to.

Para transmitir as cargas de cada pavimento ao solo, construimos elementos verticais denominados pilares. Resumindo: As cargas verticais são transmitidas às vigas pelas lajes e estas as transmitem aos pilares que, por sua vez, as transmitem ao solo.

As cargas horizontais também são transmitidas ao solo por estes mesmos elementos e mais alguns, se necessário. A maneira como se processa esta transmissão não será objeto deste Curso. Os elementos -lajes, vigas e pilares- formam uma estrutura tridi-



mensional monolítica cujo cálculo exato, em termos práticos, é inexecutável. Usam-se então processos aproximados que consistem em analisar partes, ou mesmo elementos, isoladamente. Assim, estudam-se as lajes, considerando-as contínuas em cada direção e simplesmente apoiadas nas vigas. As vigas recebem as cargas transmitidas pelas lajes e se apoiam nos pilares. A figura 1 esclarece o que dissemos\*.

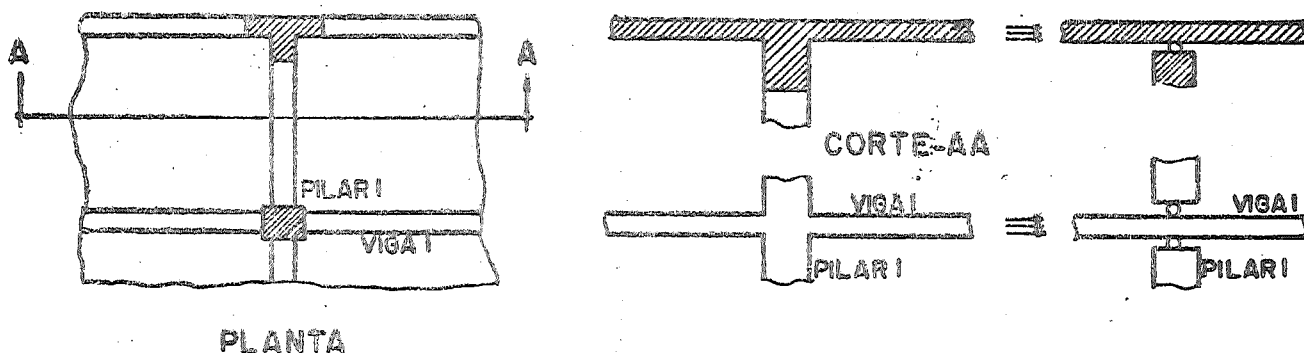


FIG. 1

Quando projetamos duas ou mais vigas que se cruzam, sem apoios nesses cruzamentos, o conjunto é denominado grelha e, como tal deverá ser calculado. Entretanto, se as duas famílias de vigas são projetadas com rigidez diferentes, podemos calculá-las, aproximadamente, supondo que as vigas de menor rigidez - vigas secundárias - se apoiam sobre aquelas de maior rigidez - vigas principais. A viga principal, nesta hipótese, oferece apoio indesclocável às vigas secundárias o que, evidentemente, não é totalmente correto.

O conjunto vigas e pilares, em um plano, denominamos quadros rígidos ou pórticos. Neste caso, os pilares recebem as cargas verticais transmitidas pelas vigas e os momentos resultantes das ligações. Um processo aproximado consiste, como já dissemos, em supor as vigas simplesmente apoiadas nas colunas e, neste caso, não atuam momentos fletores nas mesmas, ficando elas então sujeitas somente a compressão simples.

Para o cálculo de um edifício de habitação coletiva num escritório de cálculo, faz-se inicialmente o lançamento da estrutura em ante-projeto, escolhendo-se as posições das vigas e pilares. As cotas da planta de fôrmas são tiradas diretamente

\* Naturalmente trata-se de cálculo aproximado pois, continuidade haverá sempre entre lajes e vigas e entre vigas e pilares. Porém, com uma escolha adequada da estrutura, esta aproximação é perfeitamente aceitável. Restrições serão apontadas quando estudarmos os elementos isoladamente.

das plantas de arquitetura por processo e regras práticas, que mais adiante estudaremos.

De posse do anteprojeto de todos os pavimentos, iniciam-se os cálculos propriamente ditos. A ordem natural de execução destes cálculos é de cima para baixo, a medida que estabelecemos os efeitos dos pavimentos superiores no pavimento em estudo, até atingirmos as fundações do edifício. Desta maneira, o edifício só poderia começar a ser executado quando todos os detalhes de cálculos estivessem prontos. Na prática, procura-se eliminar este tempo de espera do construtor, iniciando-se o dimensionamento de baixo para cima e desta maneira, fornecendo ao construtor as plantas de que ele necessita, de acordo com a exigência da própria execução.

Para isto, deve-se fazer inicialmente a determinação aproximada das cargas, a fim de ser estudada a solução para as fundações.

Como os pavimentos tipo representam normalmente grande parcela das cargas verticais totais, é aconselhável determinar, com exatidão possível, as cargas destes pavimentos quanto a distribuição das cargas das lajes nas vigas e destas sobre os pilares. Nos outros pavimentos pode-se fazer o estudo das cargas pelo processo das áreas de influência de cada pilar ou pelo processo das vigas isostáticas.

Estas dois processos aproximados permitem calcular as cargas nos pilares, de maneira rápida, as quais podem ser usadas para o estudo das fundações.

No primeiro processo dividimos as vigas, das duas direções que se cruzam no pilar, em partes iguais. Os quatro pontos assim obtidos determinam um retângulo cuja carga é transferida para o pilar em questão, fig. 2.

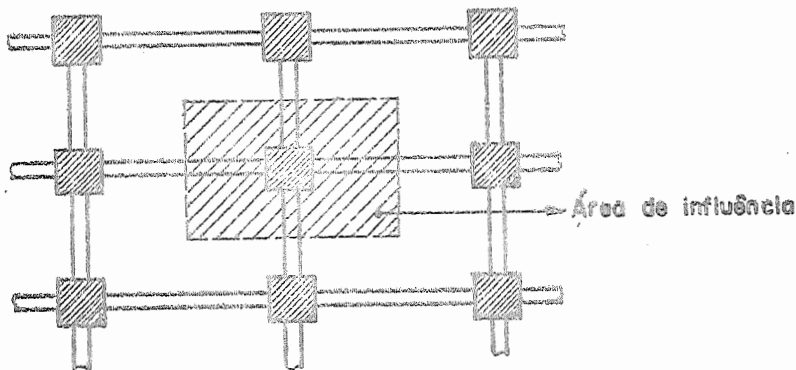


FIG. 2

No segundo processo, imaginamos tódas as vigas simplesmente apoiadas nos pilares. As cargas das lajes serão divididas em partes proporcionais para as vigas do contorno. A divisão é feita traçando-se as bissetrizes dos ângulos das lajes, formando-se assim o que chamamos de "telhado". Cada parte do telhado descarrega sua carga na viga na qual ela está apoiada. Fig. 3.

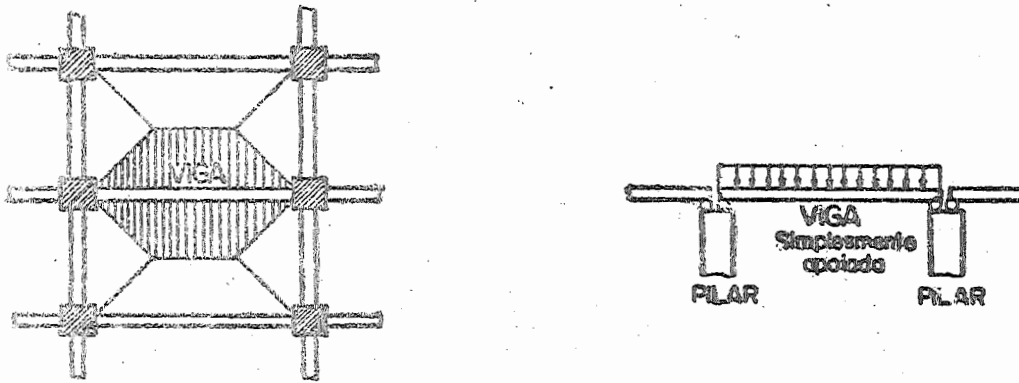


Fig. 3

Determinada, de maneira aproximada, as cargas nas fundações, e de posse da sondagem do terreno onde o edifício será implantado, fixa-se a pressão admissível do solo e passa-se ao projeto da infra-estrutura incluindo o estudo das muralhas do sub-solo.

Desta maneira, os cálculos e detalhes das diversas partes da obra são feitos de baixo para cima como aliás, será executada a obra.

No projeto que será desenvolvido neste curso, devido ao caráter didático, seguiremos marcha de cálculo um pouco diferente. Assim é que deixaremos para o final, a escolha e o dimensionamento da fundação, seguindo no mais o roteiro normal desenvolvido em um escritório de cálculo estrutural.

## 2 - DESCRIÇÃO DO PRÉDIO A CALCULAR

O prédio a calcular é um edifício de habitação coletiva, com sete andares tipo e um andar térreo, destinado a garage.

Para o desenvolvimento do curso, calcularemos os pavimentos tipo, comentando apenas a resolução da laja de transição, situada entre o térreo e o primeiro andar, isto é, teto da garage e piso do primeiro andar. Calcularemos, no final, as fundações para os pilares. Outros elementos do edifício (caixas d'água, escadas, muros de arrimo, etc) serão tratados com pormenores no curso optativo "Estruturas Complementares de Edifícios".

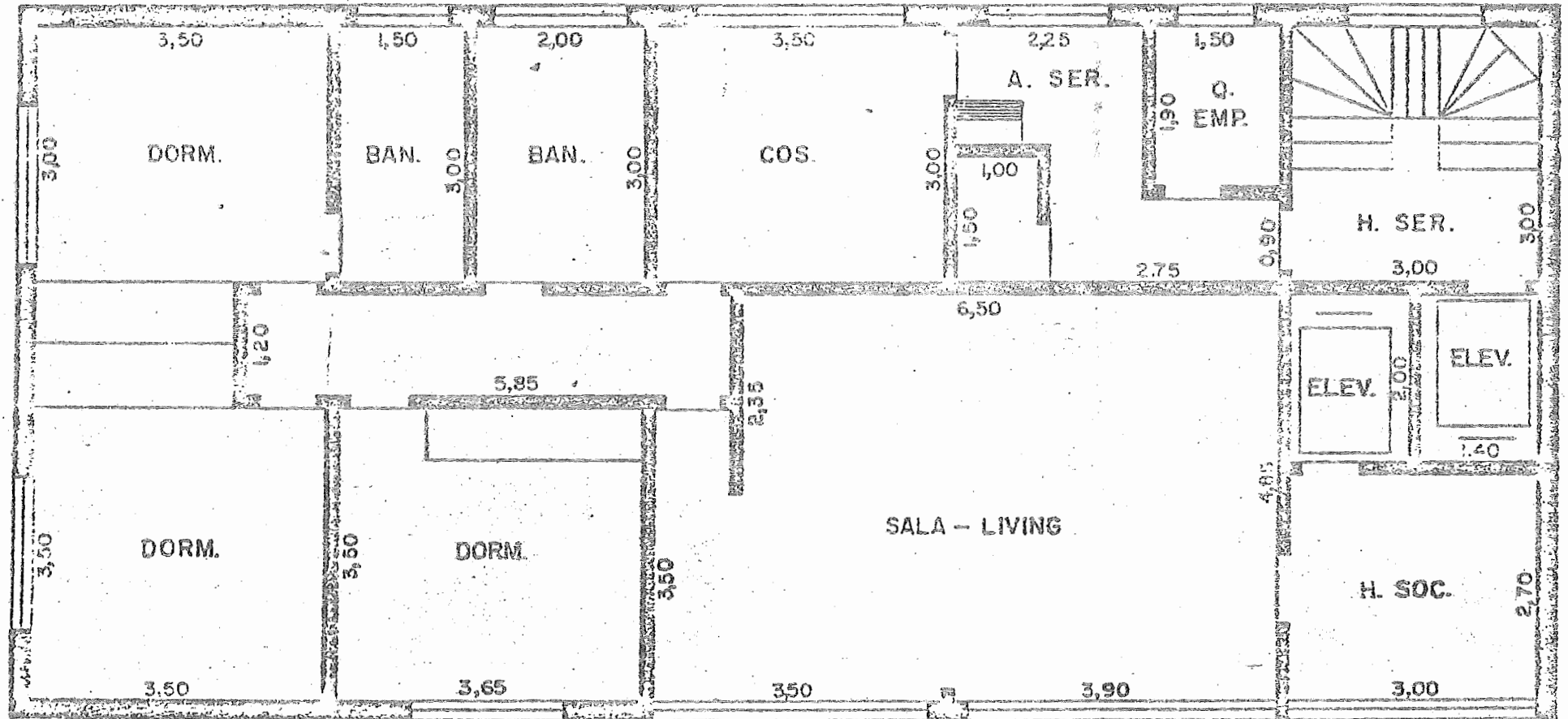
Na página 6, apresentamos a planta da arquitetura do pavimento tipo do edifício. As demais plantas, para o nosso desenvolvimento, não serão necessárias.

Discutiremos a posição das vigas e dos pilares e mostraremos como cotar, em planta, elementos da estrutura em função da planta da arquitetura.

Esta é a ordem seguida na prática pois, sendo os pavimentos tipo geralmente em número superior, eles ditarão a colocação dos pilares devendo, naturalmente, esta posição ser verificada em função dos demais pavimentos.

Com recurso aos pilotis em V, às mãos francesas e, em último caso, ao projeto de vigas para apoios dos pilares, é quase sempre possível adaptar a posição dos pilares do pavimento tipo às exigências dos outros pavimentos.

PLANTA DO PAV. TIPO



### 3 - ESCOLHA DA FORMA DO PAVIMENTO TIPO

Decalca-se, inicialmente, a planta de arquitetura do pavimento, desenhando-se, em papel vegetal, a posição das paredes sem representar os vãos de esquadrias.

Geralmente é conveniente que as vigas coincidam com a posição das paredes. Desta forma, o vigamento, e as lajes, deste pavimento está praticamente determinado, restando somente verificar a possibilidade de se retirar, ou a conveniência de se acrescentar, algumas vigas.

Quando os cômodos tiverem dimensões muito pequenas -2 ou 2,5m pode-se eliminar a viga correspondente, apoiando então a parede diretamente na laje. Se os cômodos tiverem dimensões muito grandes -salões com mais de 6m de vão menor- divide-se este, se possível, acrescentando vigas ou, se não for possível, projeta-se um vigamento aparente ou um teto duplo.

Os pilares são colocados de preferência nos cantos e nos cruzamentos de vigas, não devendo porém ter espaçamento menor que 2m, nem maior que 6m, salvo casos excepcionais. Em alguns casos, a posição de pilares está praticamente determinada, como é o caso dos cantos externos dos edifícios, os pilares da caixa do elevador ou os pilares do fundo da escada.

Como vigas e pilares devem normalmente ficar embutidas nas paredes, uma das dimensões está fixada. Para as vigas, a largura deve ser a mesma da parede sem acabamento: 12cm para as paredes de 15cm acabadas e 22cm para aquelas que terão 25cm. Naturalmente estas dimensões dependem das dimensões dos tijolos da região onde vai ser contruído o edifício.

Os pilares serão projetados, em regra, com uma das dimensões igual a 22cm, sendo que, internamente, quando não se quer que o pilar apareça no cômodo, projetam-se pilares em L, T ou Z com 12cm de espessura.

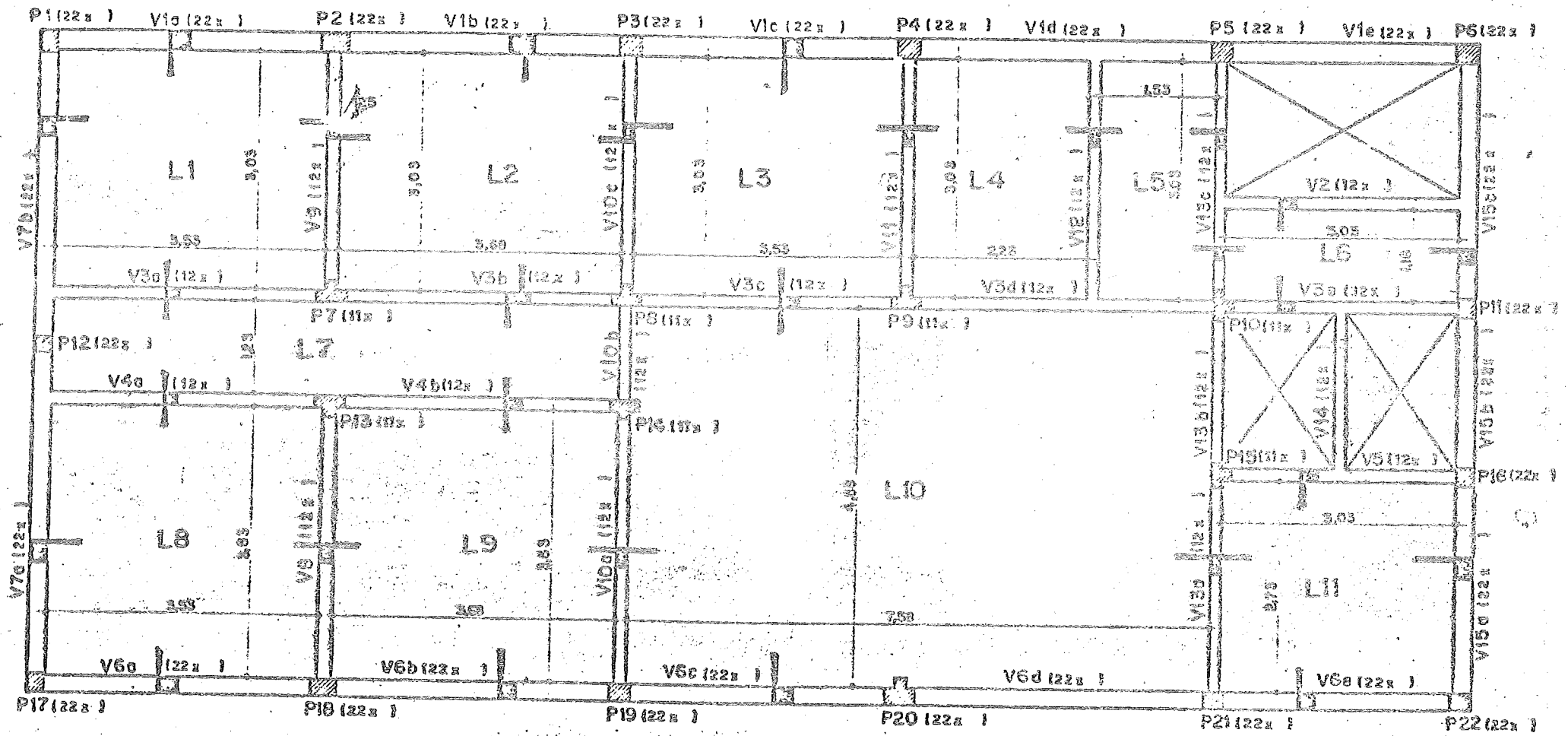
Lajes de banheiros serão rebaixadas de 20 a 30cm, conforme o caso, para receber canalizações. As lajes de locais sujeitos à chuva serão rebaixadas, sempre que possível de 3 a 5cm.

No nosso prédio (ver figura na pag. 8), rebaixamos as lajes dos banheiros sociais de 25cm. A laje do banheiro de empregada não foi rebaixada, devendo as canalizações de esgoto ficar aí aparentes.

Entre os dois banheiros sociais, resolvemos tirar a viga que receberia a parede divisória, isto porque, esta viga divi-



FÔRMAS DO PAV. TIPO



dividir a laje (L2) em duas outras de pequenas dimensões. Da mesma forma, as paredes que formam o banheiro e o quarto de empregada serão supostas apoiadas diretamente nas lajes L4 e L5, respectivamente. Poderíamos ter projetado uma viga para suportar a pequena parede que forma a lateral dos armários dos dois quartos principais, porém, como a menor dimensão da laje L7 é pequena, resolvemos apoiar esta parede da sala-living sobre esta laje. Com isto terminamos a análise para diminuir o número de vigas, Vejamos agora se temos necessidade de acrescentar.

A viga V2 foi colocada com a finalidade de receber as escadas. As vigas V3 e V4 foram levadas até a viga V7 para limitar as dimensões das lajes dos dormitórios e também, porque não convém interromper estas vigas nos pilares P7 e P12 respectivamente, obrigando-nos a dimensionar uma laje de grande dimensões. Poderíamos ligar as vigas V8 e V9 porém, teríamos dois inconvenientes: um estético e um estático. O inconveniente estético é que a viga apareceria no andar inferior, e o estático seria que o tramo central ficaria muito pequeno em relação aos outros dois e desta forma seria certamente tracionado na fibra superior, ocasionando momentos nos pilares. A viga V10 entretanto fizemos contínua. Apesar dos inconvenientes apontados, aqui preferimos uma única viga para dar melhor apoio à laje L10. O inconveniente de ordem estética aqui é atenuado por ser uma divisão natural entre dois ambientes distintos: sala-living e corredor. Finalmente a viga V12 foi levada até à viga V3 para que esta lhe forneça um apoio.

Os pilares foram localizados seguindo a orientação já exposta, procurando espaçá-los de maneira uniforme a fim de nos aproximar o máximo possível dos esquemas de cálculos já citados na introdução e também porque, desta maneira, todos receberão cargas mais ou menos iguais.

Determinadas as posições das vigas e pilares, podemos passar à determinação dos vãos da estrutura. Estes são determinados em função dos vãos constantes da planta de arquitetura.

Sendo  $l_a$  o vão interno entre paredes da planta de arquitetura, e  $l_f$  o vão interno entre vigas da planta de formas, devemos fazer

$$l_f = l_a + C$$

O acréscimo C é a soma das espessuras dos revestimentos das paredes. Normalmente, os revestimentos internos têm espessuras de 1,5cm, dando portanto um valor de  $C = 3,0\text{cm}$ . Os revesti

mentos externos têm geralmente espessura de 2,0cm. Assim, as cotas dos vãos da planta de formas serão obtidas, somando-se 3cm às cotas da planta de arquitetura. A figura 4 indica a posição das vigas no interior das paredes e também a demonstração do processo de cotar a estrutura.

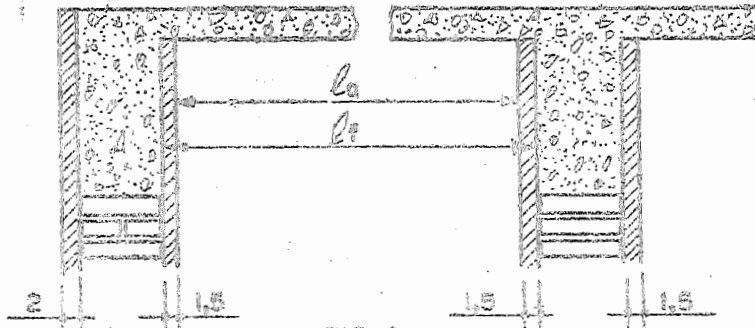


FIG. 4

O passo seguinte será o posicionamento de vigas e lajes na vertical, bem como algumas dimensões das seções transversais de vigas e pilares, atendendo às disposições construtivas usuais nos edifícios. Este posicionamento é feito através de cortes rebatidos no plano do desenho. Para não causar confusão, deve-se seguir sempre a regra geral de girar a parte inferior do corte vertical contra o observador, que se situará sempre na parte inferior ou do lado direito do desenho de formas. A figura da página 8 esclarecerá este pormenor.

No caso de locais sujeitos à chuva, as lajes correspondentes devem ser rebaixadas. Se isto não for possível, deve-se, usando espessuras de pavimentação diferentes, conseguir uma diferença de nível capaz de impedir a entrada de água no interior do edifício.

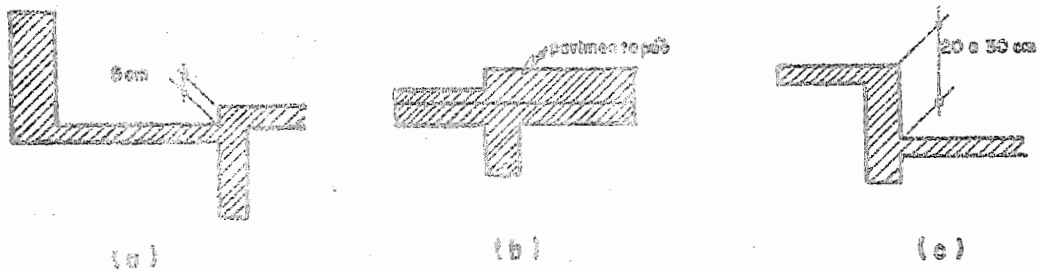


FIG. 5

Na figura 5c vemos o detalhe do rebaixo dos banheiros. Feito isto passa-se a numeração de vigas e pilares. Esta numeração é feita normalmente da esquerda para a direita e de cima para baixo, designando vigas por V e pilares por P.

Deixamos de cotar, por enquanto as alturas das vigas e uma ou duas dimensões dos pilares. As alturas das vigas serão,

para efeito de determinação de cargas, adotadas de maneira aproximada.

#### 4 - CARGAS

As cargas que atuam nos edifícios podem, de um modo geral, ser classificadas em cargas acidentais e cargas permanentes. As primeiras são constituídas pelo peso dos móveis, pessoas e objetos que carregam a laje e são especificadas pelos regulamentos oficiais de carga. Podem ser verticais e horizontais. Transcreveremos a seguir os itens da NB-5 - Norma Brasileira de cargas para o cálculo de Estruturas de Edifícios.

"Item 3 - As cargas verticais, que se consideram atuando nos pisos dos edifícios, além das que se aplicam em caráter especial, são consideradas uniformemente distribuídas e com os seguintes valores mínimos:

- a) Em forros não destinados a depósitos.... 50 kg/m<sup>2</sup>
- b) Em compartimentos destinados a residências, escritórios ou enfermarias: sobre lajes com mais de 12m<sup>2</sup>.....150 kg/m<sup>2</sup>  
sobre lajes com menos de 12m<sup>2</sup>.....200 kg/m<sup>2</sup>
- c) Em compartimentos destinados a reuniões ou ao acesso do público.....300 kg/m<sup>2</sup>
- d) Em compartimentos destinados a bailes, ginástica ou esportes.....400 kg/m<sup>2</sup>
- e) Em compartimentos destinados a arquivos bibliotecas ou depósitos de qualquer natureza: as que se determinarem em cada caso especial.

"Item 4 - Nos cálculos dos pilares e das fundações de edifícios de mais de três pavimentos, as cargas das aléneas (a) e (b) do item 3 podem ser reduzidas de 20% no 4º pavimento a contar de cima, de 40% no 5º e de 60% no 6º e seguintes.

"Item 5 - Ao longo dos parapeitos de balcões deve-se considerar aplicada uma carga mínima vertical de 200 kg/m.

"Item 6 - Em qualquer parapeito deve-se considerar aplicada na altura do corrimão uma carga horizontal de 80 kg/m."

As segundas são constituídas pelo peso próprio e cargas que porventura carreguem permanentemente a estrutura. São re-

sumidas a seguir:

a) Peso próprio dos elementos, que é determinado partindo de uma secção estimada. Nas vigas, podemos admitir uma altura de aproximadamente 0,1 do vão. Para as lajes de edifícios comuns a altura varia entre 5 e 12cm.

b) Peso do pavimento e revestimento, incluindo peso do soalho ou ladrilho, camada de fixação e revestimento inferior das lajes. No caso de edifícios comuns, toma-se para essa parcela, geralmente, 50 kg/m<sup>2</sup>.

c) Peso de paredes. A alvenaria de tijolos maciços tem peso específico igual a 1.600 kg/m<sup>3</sup> e a de tijolos furados 1.200 kg/m<sup>3</sup>.

d) Peso de enchimento. Nas lajes rebaixadas destinadas a receber canalizações, quando for projetada uma camada de enchimento, deve-se levar em conta o peso próprio do mesmo. O peso específico do enchimento, quando feito com escória, pedaços de tijolos com argamassa magra, etc. é de 1.000 kg/m<sup>3</sup>. Se o enchimento for executado com argamassa pura, como é o caso de pequenos rebaixos e os destinados a obtenção de caimentos para escoamento de águas, o peso específico a ser considerado, será de 1.500 kg/m<sup>3</sup>.

e) Cargas de paredes em lajes armadas em uma única direção (figura 6a). Segundo a NBl-75, nas lajes armadas em uma única direção permite-se o cálculo simplificado como viga de largura  $b_w$  igual a largura  $b$  da carga (parede), calculada como na figura 6b fazendo-se a projeção a 45° no eixo da laje e medida na direção perpendicular à largura da laje, para o caso onde o valor  $b$  for maior ou igual a  $l$  (largura da laje). Quando o valor de  $b$  for menor que  $l$ , caso de parede paralela ao lado menor da laje, deve-se somar a  $b$  os seguintes valores na obtenção de  $b_w$ :

a) para momentos fletores positivos:

$$\frac{2a_1(l-a_1)}{l} (1-b/l)$$

b) para momentos fletores negativos

$$\frac{a_1(2l-a_1)}{l} (1-b/l)$$

c) para forças cortantes

$$a_1 \left(1 - \frac{b}{l}\right)$$

d) para momentos flectores em lajes em balanço

$$1,5 a_1 (1 - b/\ell)$$

e) para forças cortantes em lajes em balanço.

$$0,5 a_1 (1 - h/\ell)$$

onde  $a_1$  é a distância do centro da carga ao apoio para cujo lado está a secção que se estuda (fig. 6c).

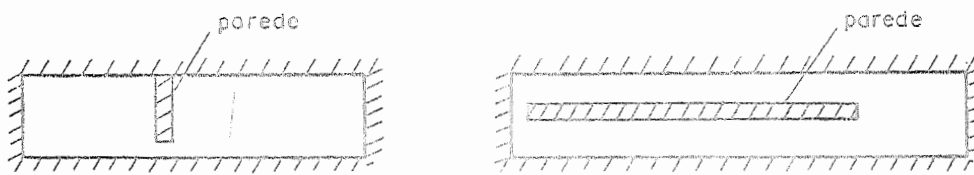


fig. 6a

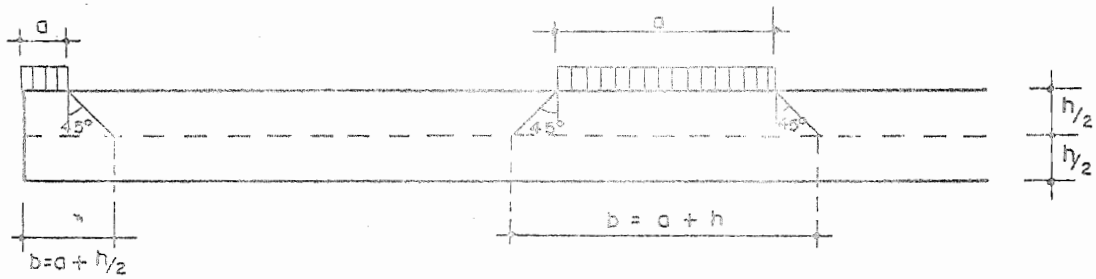


fig. 6b

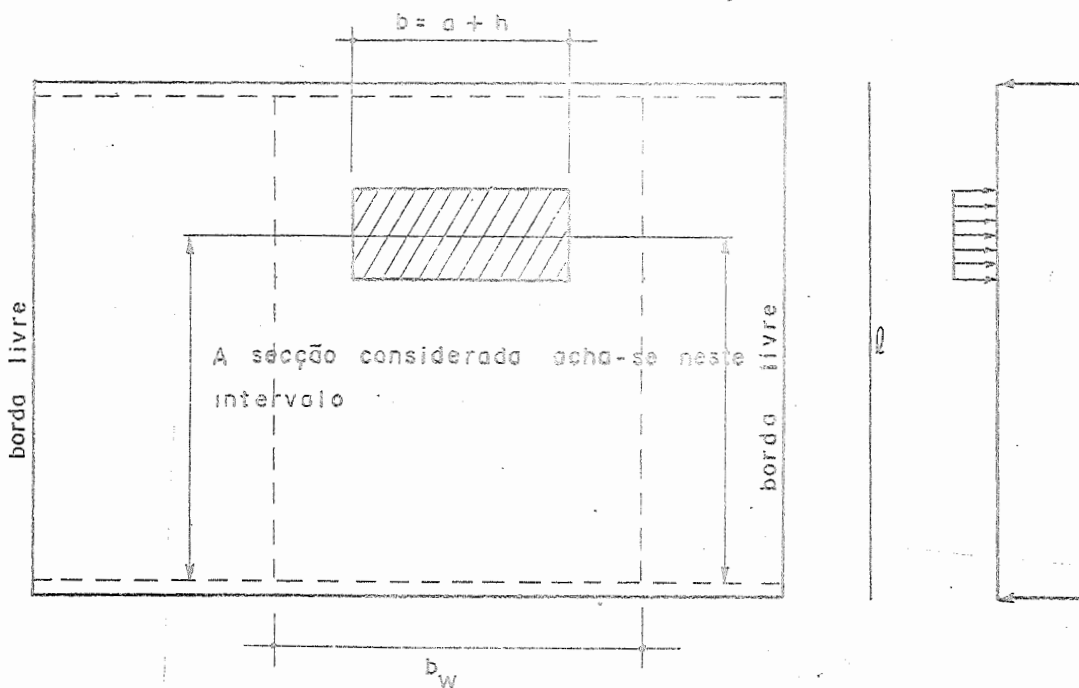


fig. 6c

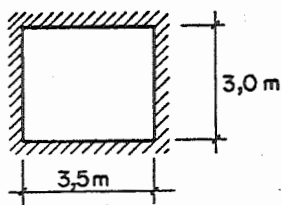
A adoção dos valores indicados de  $b_w$  está subordinada às seguintes condições, no caso de  $b_w > b$ :

1) que  $b_w$  não seja maior que a largura da laje, nem maior que a distância do centro da carga à borda mais próxima da laje acrescida de  $0,5 b_w$ .

2) que a armadura de distribuição por metro não seja menor que a fração da principal por metro dada por  $1 - 0,8 b/b_w$  e que se estenda sobre a largura  $b_w$  acrescida dos comprimentos de ancoragem.

f) Cargas de paredes em lajes armadas em cruz. Neste tipo de laje, a carga das paredes pode ser considerada distribuída. Sobre toda a área da laje. Como medida de segurança não convém deduzir a parte vazia ocupada pelas esquadrias.

Exemplo 1 - Seja calcular a carga por metro quadrado de uma laje de edifício de habitação coletiva, com vãos de 3,0 e 3,50m. A espessura da laje é de 7cm.



Solução: A área da laje é  $3,50 \times 3,0 = 10,5 m^2$  portanto, a sobrecarga a ser adotada é de  $200 \text{ kg/m}^2$  de acordo com a NB-5.

Temos portanto:

- a) Sobrecarga  
(Pessoas e móveis)..... $200 \text{ kg/m}^2$
  - b) Pêso da pavimentação  
(Pavimento, camada de fixação e revestimento).....  $50 \text{ kg/m}^2$
  - c) peso próprio (espessura: 7cm)  
 $2.500 \times 0,07$ ..... $175 \text{ kg/m}^2$
- $q = 425 \text{ kg/m}^2$

Exemplo 2 - Calcular a carga por metro quadrado de uma laje de edifício de habitação coletiva, com vãos de 3,30 e 7,0m. A espessura da laje é de 8cm e suporta uma parede de 3m de altura de tijolos furados, disposta no sentido do vão menor e com largura de 25cm.

Solução. Calculando-se a carga da parede para momento fletor, calcula-se inicialmente a largura da viga equivalente.

$$b = a+h = 25+8 = 33\text{cm.}$$

$$b_w = b + \frac{2a}{\ell} \frac{(\ell - a)}{1} (1 - b/\ell) \quad \text{com } a_1 = 3,3/2 = 1,65$$

$b_w = 3,3\text{m}$  que verifica as condições da NB1-75.

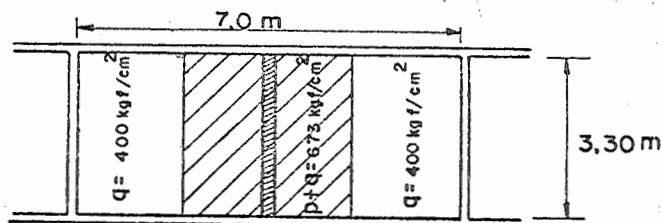
Nesta viga de  $b_w = 3,3\text{m}$  distribui-se a carga da parede igual a 900 kg/m.

A carga distribuída ainda a computar é:

- a) sobrecarga 150 kg/cm<sup>2</sup>
  - b) revestimento 50 kg/cm<sup>2</sup>
  - c) peso próprio:  $2.500 \times 0,08$  200 kg/cm<sup>2</sup>
- $q = 400 \text{ kg/cm}^2$

Na faixa que suporta a parede tem-se:

peso da parede	p.....	900/3,3.....	273 kg/cm <sup>2</sup>
carga da laje	q.....		<u>400</u> kg/cm <sup>2</sup>
total	q + p .....		673 kg/cm <sup>2</sup>



## 5 - CÁLCULO DAS LAJES

### 5.1 - Classificação

Em função da relação entre os vãos, as lajes são classificadas em dois grupos. Lajes armadas numa única direção, quando a relação entre os vãos é maior que 2. Estas lajes são calculadas como apoiadas em uma só direção, a qual coincide com a direção do vão menor. Lajes armadas em duas direções ou, lajes armadas em cruz, quando a relação entre os vãos é menor ou igual a 2. São calculadas como apoiadas nas duas direções.



## 5.2 - Distribuição das cargas

O estudo aproximado das lajes se faz dividindo-as numa série de faixas de largura a 1m. e imaginando-as independentes entre si. Nas lajes armadas em cruz, considera-se duas famílias de faixas perpendiculares entre si e paralelas aos apoios.

As lajes armadas numa única direção têm apenas uma família de faixas disposta paralelamente à direção do menor vão. Desta maneira, a carga que atua por metro de laje e, a carga que atua por metro linear de faixa cuja largura é 1m, neste caso, coincidem.

Nas lajes armadas em cruz, devemos considerar dois casos: lajes isoladas e lajes contínuas. Consideremos inicialmente as lajes isoladas.

Sendo laje armada em cruz, imaginamos a mesma dividida em faixas de 1m segundo duas direções paralelas aos apoios.

Uma das teorias aproximadas para o cálculo de laje, denominada teoria das grelhas, supõe que parte da carga total por metro quadrado de laje, atua numa direção e a outra parte atua na outra direção. Cada parcela, ou cada quinhão de carga, desenvolve na laje, na sua direção, esforços que devem ser resistidos pela laje. Chamando uma direção de apoios de x e a outra de y,

devemos ter

$$q_x + q_y = q$$

A determinação dos quinhões  $q_x$  e  $q_y$  é feita admitindo a teoria das grelhas, com faixas independentes entre si e, que os referidos quinhões são constantes para cada ponto da laje, em cada direção (ver fig. 7). Mediante estas hipóteses e, impondo a igualdade das flechas no ponto médio das faixas centrais, calculadas para as duas direções, tiramos as incôgnitas  $q_x$  e  $q_y$ .

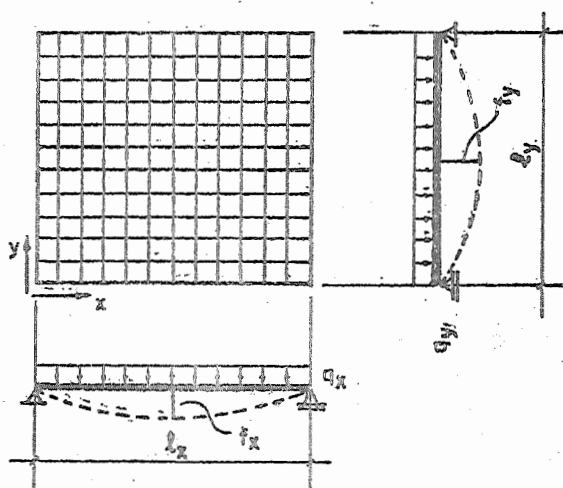


FIG. 7

Para o caso de laje, armada em cruz, apoiada nos quatro lados temos os seguintes valores para as flechas:

$$f_x = \frac{5 q_x l_x^4}{384 EJ} ; \quad f_y = \frac{5 q_y l_y^4}{384 EJ}$$

De acôrdo com o que foi dito,  $f_x = f_y$ , isto é:

$$q_x l_x^4 = q_y l_y^4 \quad \text{ou}$$

$$\frac{q_x}{l_x^4} = \frac{q_y}{l_y^4} = \frac{q_x + q_y}{l_x^4 + l_y^4} = \frac{q}{l_x^4 + l_y^4}$$

e portanto:

$$q_x = \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} q ; \quad q_y = \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4} q$$

Mudando cada apoio simples por engastamento perfeito, formamos outros 5 casos de lajes, fig. 8:

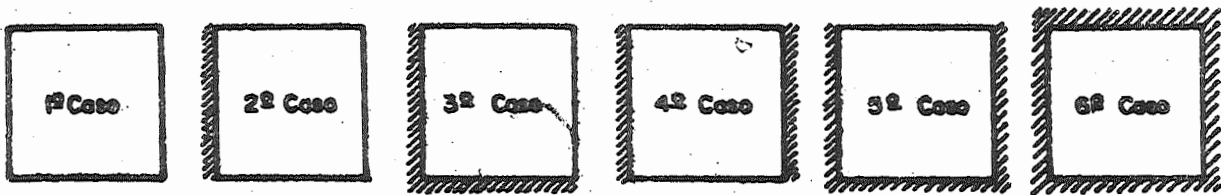


FIG. 8

Para estes outros casos, determinamos os quinhões de carga seguindo a mesma marcha de cálculo.

No final deste capítulo fornecemos tabelas\* que permitem uma resolução rápida dos quinhões através do conhecimento do coeficiente  $k_x$ , em função da relação  $l_y/l_x$ . Para o primeiro caso, por exemplo, o valor de  $k_x$  é:

$$k_x = \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} = \frac{(l_y/l_x)^4}{1 + (l_y/l_x)^4}$$

que é função apenas da relação  $l_y/l_x$ . Temos portanto:

$$q_x = k_x q ; q_y = q - q_x$$

Para as lajes contínuas, armadas em cruz, o cálculo dos quinhões recai no caso de lajes isoladas. Para isto, supomos que cada viga ou apoio intermediário funciona como engastamento perfeito, e cada viga ou apoio externo funciona como apoio simples\*\*.

Nestas condições, cada laje pode ser considerada isolada com engastamento perfeito, se se tratar de lado interno, ou com apoio simples, se se tratar de lado externo.

\* Estas tabelas foram tiradas do "Curso Prático de Concreto Armado. Vol. I, 1955 de Aderson Moreira da Rocha.

\*\* Naturalmente nem sempre isto é válido. Somente no caso de vãos iguais (ou aproximadamente iguais) e carregamento também iguais é que a ligação entre duas lajes vizinhas pode ser considerada como engastamento perfeito.

### 5.3 - Cálculo dos momentos fletores

Antes de calcular os momentos fletores nas lajes, devemos definir os seus vãos para este cálculo, ou os seus vãos teóricos.

A NB-1 item 3.3.23. considera como vão teórico:

"a) De laje isolada: o vão livre acrescido da espessura da laje no meio do vão.

b) De laje contínua, vão intermediário: a distância entre os centros dos apoios.

c) De laje contínua, vão extremo: o vão livre acrescido da semilargura do apoio interno e da semi-espessura no meio do vão".

Na figura 9, representamos o critério da NB-1 para o cálculo dos vãos teóricos das lajes.

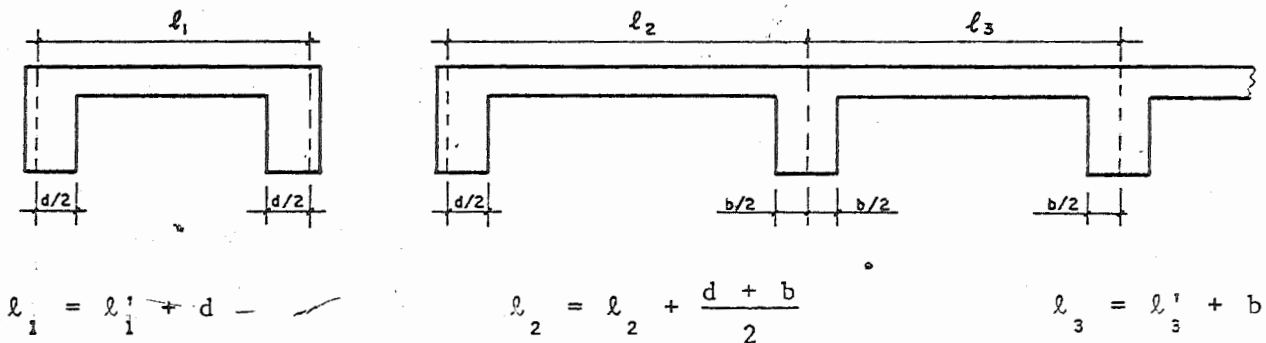


Fig. 9

Vejamos então o cálculo dos momentos fletores nas lajes.

#### 5.31 - Lajes armadas numa direção

Consideremos inicialmente o caso da laje isolada.

O momento fletor desta laje é calculado imaginando-a dividida em faixas, de largura  $1m$ , da direção do menor vão. O comportamento destas faixas é, aproximadamente, igual ao comportamento de uma viga, portanto, encontram-se para fletores máximos em uma laje isolada os seguintes valores:

lajes com dois apoios:  $M = q l^2 / 8$

Lajes com um apoio e 1 engaste:  $M = q l^2 / 14,22$ ;  $X = - q l^2 / 8$

lajes com dois engastes:  $M = q l^2 / 24$  ;  $X = - q l^2 / 12$

Nas lajes armadas numa única direção e contínuas, os momentos se distribuem ao longo da mesma, na direção da continuidade, como se fossem vigas de largura  $l_m$ . A determinação da distribuição do momento é feita com o cálculo estático de uma viga contínua. Porém, para as lajes, é suficiente conhecer os máximos valores dos momentos fletores nos vãos e nos apoios. Tendo por base o que acabamos de dizer, a NB-1 prescreve para o cálculo aproximado de lajes contínuas armadas numa única direção:

"Item 33.2.6. As lajes contínuas armadas numa única direção podem ser calculadas como vigas contínuas livremente apoiadas, com as seguintes modificações:

a) Não serão considerados, nos vãos, momentos positivos menores do que os que se obteriam se houvesse engastamento perfeito da laje nas extremidades dos referidos vãos.

b) Em edifícios, quando o menor vão da laje contínua não for inferior a 80% do maior, permite-se calcular os momentos máximos e mínimos, oriundos de carga uniformemente distribuída, com a fórmula  $M = q l^2 / k$ , sendo  $k$  igual a (a 1ª coluna refere-se ao caso de haver mísulas, condições do Item 3.1.3, com altura sobre o apoio não inferior a 1/30, e a 2ª aos demais casos):

Momentos negativos sobre os apoios, havendo mais de dois vãos (no caso de vãos desiguais,  $l$  designa a média aritmética dos dois vãos adjacentes ao apoio considerado).

Apoios internos dos vãos extremos.....	-8	-9
Demais apoios intermediários.....	-9	-10
Idem, havendo dois vãos		
Apoio intermediário.....	-7	-8
Momentos positivos nos vãos		
Vãos extremos.....	12	11
Vãos intermediários.....	18	15

Os momentos negativos nos vãos, sendo  $l$  o vão maior, podem ser calculados pela fórmula:

$$M = \frac{l^2}{24} (g - \frac{P}{2})$$

A figura 10 indica os valores de k

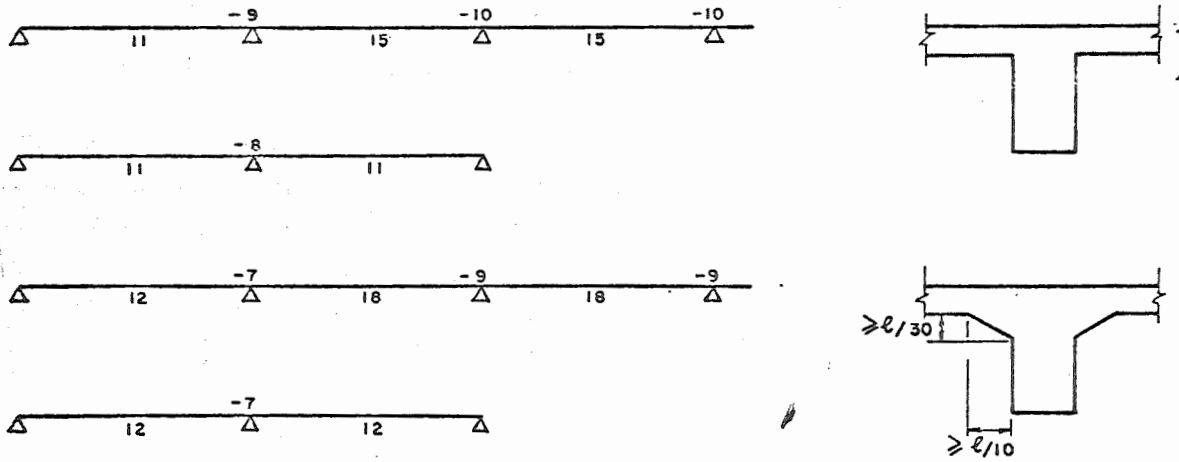
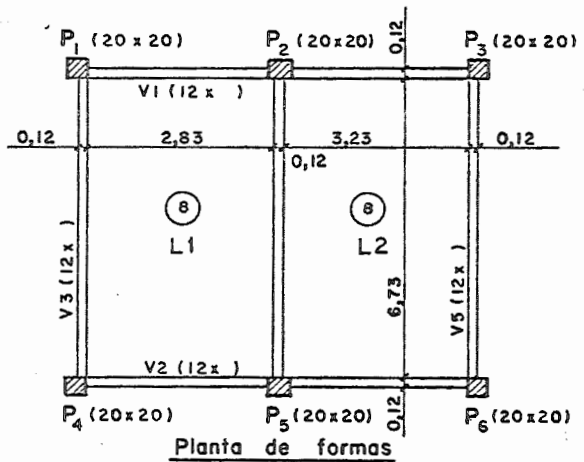
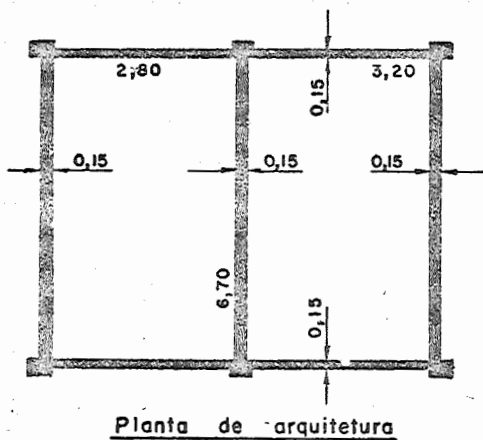


Figura 10

Exemplo: Seja calcular os momentos fletores das lajes L1 e L2, indicadas nas plantas da figura 11.



Solução: Os vãos teóricos para as duas lajes são:

laje L 1:  $l_x = 2,83 + 0,04 + 0,06 = 2,93\text{m}$

$l_y = 6,73 + 0,08 = 6,81\text{m}$

laje L 2:  $l_x = 3,23 + 0,04 + 0,06 = 3,33\text{m}$

$l_y = 6,73 + 0,08 = 6,81\text{m}$

As duas lajes são armadas numa única direção ( $\lambda = l_y / l_x = 2$ ).

Cálculo das cargas:

Sobrecarga (edifício residencial comum)....150 kg/m<sup>2</sup>

Pavimentação..... 50 kg/m<sup>2</sup>

Peso próprio (d= 8cm) 0,08 x 2.500.....200 kg/m<sup>2</sup>

$q = 400 \text{ kg/m}^2$

350

585

Considerando a ligação laje-viga sem mísula, os momentos máximos são:

$$\text{No vão } M_1 = \frac{q \ell^2}{11} = \frac{400 \times 2,93^2}{11} = 312 \text{ kgm/m}$$

$$M_2 = \frac{q \ell^2}{11} = \frac{400 \times 3,33^2}{11} = 403 \text{ kgm/m}$$

O momento negativo na viga V4 será calculado com o vão médio  $\ell = \frac{2.93 + 3.33}{2} = 3.13$

$$X = - \frac{q \ell^2}{8} = \frac{400 \times 3.13^2}{8} = - 400 \text{ kgm/m}$$

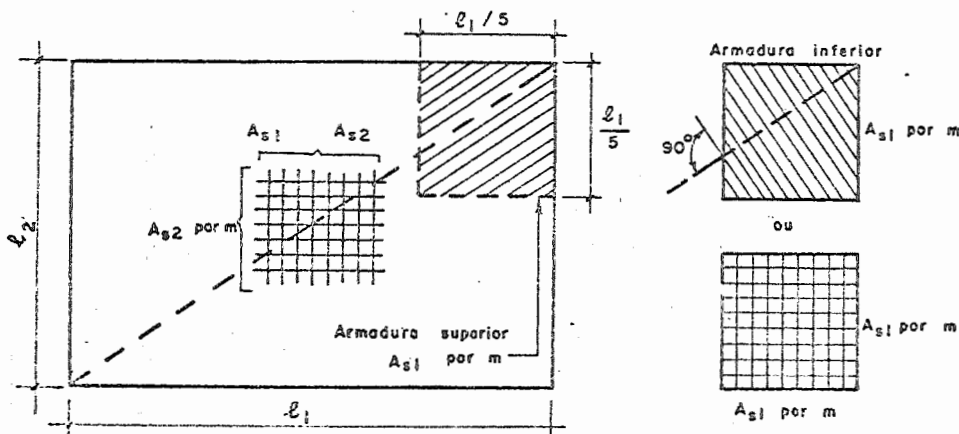
### 5.32 - Lajes armadas em cruz

Para o cálculo dos momentos fletores das lajes armadas em cruz, devemos respeitar o disposto na NB-1:

Item 3.3.2 - As lajes retangulares armadas em cruz devem ser calculadas por um dos seguintes processos:

a) No regime elástico, calculando-as como placas com os valores do módulo de deformação e do coeficiente de Poisson prescritos em 3.2.5. e 3.2.6. permitindo-se processos simplificado como segue:

b) Por processo simplificado que considere o efeito redutor dos momentos volventes. Em edifícios dispensa-se a colocação de armadura para resistir diretamente aos momentos volventes, salvo nos cantos simplesmente apoiados das lajes. Estes cantos consideram-se suficientemente armados se se adicionarem, abrangendo um quadrado de lado igual a 1/5 do lado maior da laje, duas armaduras -uma superior paralela à diagonal e outra inferior a ela perpendicular- ambas iguais, por unidade de largura, à armadura do centro da laje na direção mais armada; a armadura inferior pode ser substituída por uma armadura em cruz, em cada direção, à citada armadura do centro da laje, e



paralela às bordas da Laje. No caso de cargas uniformemente distribuídas pode-se admitir que as reações também se distribuam uniformemente ao longo das bordas.

c) No regime de ruptura, se a laje tiver espessura uniforme e a armadura em cada direção for distribuída uniformemente, utilizando-se as configurações das linhas de ruptura conhecidas através da experiência".

Neste Curso desenvolveremos, sucintamente, um processo aproximado para o cálculo das lajes armadas em cruz. Este processo é o chamado processo das Grelhas.

Conhecidos os quinhões de carga  $q_x$  e  $q_y$ , deve-se considerar a laje isoladamente em cada direção. Então, dividindo-se a laje em duas famílias de faixas ortogonais, consideramos cada faixa, com o vão e carga que lhe corresponde, como sendo uma viga de igual vinculação da laje na mesma direção.

De um modo geral, as fórmulas que dão os momentos fletores máximos nos vãos e apoios, têm o seguinte aspecto, para as direções x e y:

$$M_x = q_x \frac{\ell_x^2}{i_x}; \quad M_y = q_y \frac{\ell_y^2}{i_y}$$

$$X_x = -q_x \frac{\ell_x^2}{j_x}; \quad X_y = -q_y \frac{\ell_y^2}{j_y}$$

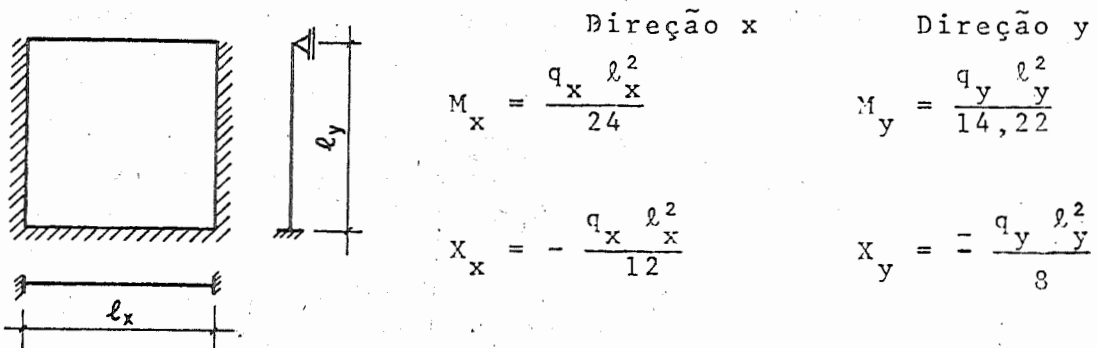
Os valores de  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $j_x$  e  $j_y$  dependem da vinculação da laje.

Para as lajes isoladas, podem-se apresentar 6 casos de apoios conforme já indicamos.

Os valores dos coeficientes, deduzíveis facilmente são os seguintes:

2 apoios	$i_x$ ou $i_y = 8$
1 apoio e 1 engaste	$i_x$ ou $i_y = 14,22$ ; $j_x$ ou $j_y = 8$
2 engastes	$i_x$ ou $i_y = 24$ ; $j_x$ ou $j_y = 12$

Por exemplo, para o caso 5, com a teoria das grelhas, devemos usar:





O cálculo das lajes contínuas, armadas em cruz, recai no caso de lajes isoladas, fazendo-se as mesmas considerações sobre os apoios já feitas anteriormente.

### 5.33 - Processo de Marcus para as lajes armadas em cruz

Numa primeira teoria, Marcus partiu da equação das placas de derivadas parciais de quarta ordem, integrando-a com o auxílio de diferenças finitas. O resultado alcançado foi de pouca utilidade prática devido à complexidade das expressões deduzidas.

Numa segunda teoria, aproximada, Marcus adaptou a teoria das grelhas de forma a obter valores dos momentos positivos próximos daqueles obtidos com a primeira teoria.

Sendo esta última, mais precisa que a teoria das grelhas, fornece-nos resultados mais econômicos com pequeno trabalho de cálculo.

Para atingir este objetivo, Marcus introduziu nas expressões dos momentos fletores positivos, da teoria das grelhas, coeficientes menores que a unidade de tal forma que estes valores se aproximassem quando calculados pelas duas teorias.

Chamando de  $V_x$  e  $V_y$  estes coeficientes, as fórmulas de Marcus, para os momentos positivos, são:

$$M_x = \frac{q_x l_x^2}{i_x} V_x; \quad M_y = \frac{q_y l_y^2}{i_y} V_y$$

como  $q_x = k_x q$  e  $q_y = k_y q$  ( $k_y = 1 - k_x$ ) vem:

$$M_x = \frac{q k_x l_x^2}{i_x} V_x; \quad M_y = \frac{q k_y l_y^2}{i_y} V_y$$

Comparando as duas teorias, Marcus estabeleceu fórmulas aproximadas que dão os coeficientes  $V_x$  e  $V_y$ , para cada caso de apoio da laje isolada, em função dos vãos na duas direções.

Chamando  $\lambda$  a relação  $l_y/l_x$ , as expressões de  $V_x$  e  $V_y$  são, para qualquer caso de apoio:

$$V_x = 1 - \frac{20 k_x}{3 m_x \lambda^2}; \quad V_y = 1 - \frac{20 k_y \lambda^2}{3 m_y}$$

Desta forma ficamos com expressões aproximadas e que determinam os momentos fletores considerando o efeito redutor

dos momentos volventes, como preceitua o item 14, alínea b da NB-1.

Daremos, agora, para estas fórmulas um outro aspecto, passando todos os coeficientes para o denominador e, no numerador, deixando sempre a expressão  $q l_x^2$ .\*

$$M_x = \frac{q l_x^2}{\left( \frac{i_x}{k_x v_x} \right)}$$

$$M_y = \frac{q l_y^2}{\frac{i_y}{k_y v_y}} = \frac{q l_x^2}{\frac{i_y}{k_y v_y} \frac{l_x^2}{l_y^2}} = \frac{q l_x^2}{\left( \frac{i_y}{k_y v_y} \lambda^2 \right)}$$

Chamando os termos entre parentesis de  $m_x$  e  $m_y$  temos:

$$M_x = q l_x^2 / m_x \quad e \quad M_y = q l_x^2 / m_y$$

Para o cálculo dos momentos negativos, usaremos as mesmas fórmulas da teoria das grelhas com transformações idênticas as feitas para os momentos positivos:

$$X_x = - \frac{k_x q l_x^2}{j_x} = - \frac{q l_x^2}{\left( \frac{j_x}{k_x} \right)}$$

$$X_y = - \frac{k_y q l_y^2 l_x^2}{j_y l_x^2} = \frac{q l_x^2}{\frac{j_y}{k_y} \left( \frac{l_x^2}{l_y^2} \right)} = - \frac{q l_x^2}{\left( \frac{j_y}{k_y} \lambda^2 \right)}$$

Chamando as expressões entre parêntesis de  $n_x$  e  $n_y$  respectivamente, temos:

$$X_x = - q l_x^2 / n_x ; \quad X_y = - q l_x^2 / n_y$$

No final deste capítulo fornecemos tabelas\*\* para os coeficientes  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $n_x$  e  $n_y$ , para todos os casos de apoio de lajes, em função de  $\lambda = l_y / l_x$ .

\* Esta transformação foi feita pelo Prof. Aderson Moreira da Rocha em "Curso Prático de Concreto Armado. Vol. I., 1955.-

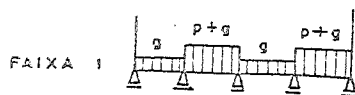
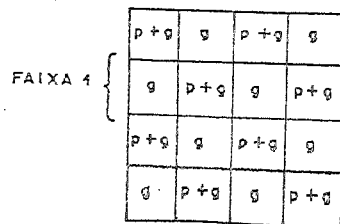
\*\*Estas tabelas foram tiradas de "Curso Prático de Concreto Armado, Vol. I, 1955 de Aderson Moreira da Rocha.

Para o cálculo de  $\lambda$  tomamos sempre para valor de  $\ell_x$  o vão na direção que possui maior número de engastamento. No caso de haver igualdade de engastamento nas duas direções, devemos tomar para  $\ell_x$  o menor vão.

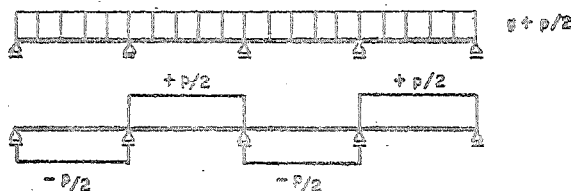
O que dissemos até aqui é válido para as lajes isoladas. No caso de lajes contínuas armadas em cruz, os apoios internos não são engastamento perfeitos porém, para levantar esta indeterminação, Marcus supõe estes apoios como sendo engastamentos teoricamente perfeitos. Esta hipótese, entretanto, se agasta da realidade se as lajes contínuas tiverem vãos muito diferentes uns dos outros, ou se as cargas uniformemente distribuídas sobre as lajes forem diferentes, embora seja uso corrente o emprego das fórmulas de Marcus para lajes deste tipo.

Se a sobrecarga é pequena em relação a carga total ( $p < 1.5g$ , por exemplo), como geralmente acontece nos edifícios, então o cálculo pode ser feito como sendo lajes isoladas, sem que seja necessário estudar a posição mais desfavorável das sobrecargas.

No caso em que a sobrecarga é grande, deve-se estudar as lajes com cargas nas posições mais desfavoráveis. Para uma determinada laje, a posição mais desfavorável para momentos máximos é carregá-la com a carga total ( $g+p$ , permanente + sobrecarga) e, as lajes vizinhas carregadas somente com a carga permanente.



O carregamento indicado na figura pode ser dividido em outros dois, que somados representam o mesmo efeito: um, com carga uniformemente distribuída de valor  $g + p/2$ , e outro, carregamento anti-simétrico de valor  $\pm p/2$ .



Desta maneira, com o primeiro carregamento, podemos estudar cada painel isoladamente e considerá-lo engastado nos painéis vizinhos.

Neste caso, calculamos com as expressões de Marcus os momentos positivos nos vãos das diversas lajes:

$$M_x^I = \frac{q^I l_x^2}{m_x^I}; \quad M_y^I = \frac{q^I l_y^2}{m_y^I}; \quad q^I = g + \frac{p}{2}$$

Com o segundo carregamento temos, praticamente, apoios internos livres à rotação. Neste caso é lícito considerar os diversos painéis como sendo simplesmente apoiados nos quatro lados. Temos então novos momentos, calculados também com as expressões de Marcus, que devem ser acrescentados àqueles do primeiro carregamento.

$$M_x^{II} = \frac{q^{II} l_x^2}{m_x^{II}}; \quad M_y^{II} = \frac{q^{II} l_y^2}{m_y^{II}}; \quad q^{II} = \pm p/2$$

O resultado final será, portanto:

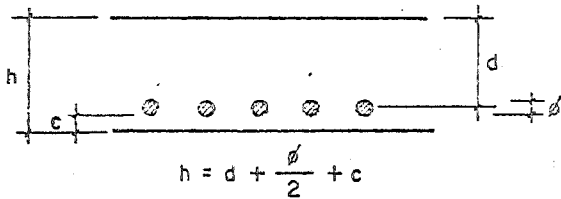
$$M_x = M_x^I \pm M_x^{II}; \quad M_y = M_y^I \pm M_y^{II}$$

O sinal + é usado para se obter o máximo positivo e o - para o máximo negativo.

Os máximos momentos negativos são obtidos carregando todas as lajes com a carga total. Assim, o que fizemos para as lajes isoladas continua valendo neste caso, qualquer que seja o valor da sobrecargas.

### 5.4 - Altura das lajes

A altura total  $h$  da laje é obtida somando-se a altura útil meio diâmetro da armadura utilizada e ainda a espessura do



coobrimento. Quanto ao coobrimento a NB-1 diz: "Item 6.3.3.3.1 - Todas as barras da armadura, principal ou não, devem ter cobrimento de concreto nunca menor que:

Em lajes e paredes no interior de edifícios.....	1..cm...
Em lajes e paredes ar la livre.....	1,5cm
Em vigas, pilares e arcos no interior de edifícios...	1,5cm
Em vigas, pilares e arcos ao ar livre.....	2 cm
Em peças em contato com o solo.....	2 cm

Neste último caso exige-se, junto a armadura calculada para resistir a esforços de tração, se o solo não for rochoso, a interposição de uma camada de concreto simples, não computada no cálculo, com espessura mínima de 5 cm.

Em lajes no interior de edifícios, permite-se que 0,5cm do cobrimento exigido seja feito com embôço.

Item 6.3.3.2. Medidas especiais. Além do cobrimento mínimo, deverão ser tomadas medidas especiais para aumento da proteção da armadura se o concreto for sujeito a abração, a altas temperaturas, a correntes elétricas ou a agentes fortemente agressivos, tais como ambiente marinho e agentes químicos.

Na prática, em casos comuns de lajes que receberão embôços, costuma-se adotar a seguinte fórmula prática:

$$h = d+1 \text{ (em centímetros)}$$

A fixação da altura da laje deve ser feita tendo em vista o dispositivo do item 4.2.3 quanto a deformação excessiva e quanto a esbeltez dada no item 6.1.1.1. a espessura das lajes não deve ser menor que:

- 5 cm em lajes de cobertura não em balanço;
- 7 cm em lajes de piso e lajes em balanço
- 12cm em lajes destinadas a passagem de veículos.

Em lajes cogumelos, esses limites devem ser elevados, respectivamente, para 12cm, 15cm e 15cm.

Para a fixação da espessura de lajes de edifícios recorre-se ao item 4.2.3.2.1 da NB-1 onde é dada a condição que, se verificada, o cálculo das flechas poderá ser dispensado. Essa condição aparece expressa por:

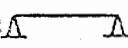
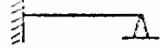
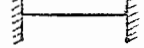
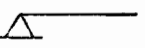
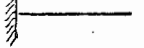
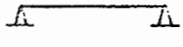
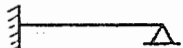
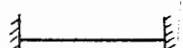

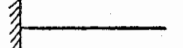
$$d > \ell / (\Psi_2 * \Psi_3)$$

devendo-se tomar para  $\Psi_2$  e  $\Psi_3$  valores da tabela abaixo (nas lajes armadas em cruz,  $\ell$  é o menor vão). Em qualquer caso deverão ser respeitados os limites do item 6.1.1.1.

lajes armadas em uma direção	valores de $\Psi_2$
- simplesmente apoiadas .....	1,0
- contínuas.....	1,2
- duplamente engastada.....	1,7
- em balanço.....	0,3

Lajes armadas em cruz

Valores de  $\Psi_2$

$\ell_1 \backslash \ell_2$					
	1,5 1,1	1,7 1,4	1,9 1,8	1,0 0,5	1,0 0,6
	1,7 1,1	1,8 1,4	2,0 1,8	1,4 0,6	1,3 0,7
	1,9 1,2	2,0 1,4	2,2 1,7	1,7 0,7	1,7 0,8
	1,0 1,0	1,4 1,3	1,7 1,7	0,5 0,3	0,6 0,3
	1,1 1,0	1,3 1,3	1,7 1,7	0,6 0,5	0,7 0,5

$\ell_1$  é o vão menor

$\ell_2$  é o vão maior

o número superior:  $\Psi_2$  para  $\ell_2 / \ell_1 = 1$

o número inferior:  $\Psi_2$  para  $\ell_2 / \ell_1 > 2$

para  $1 < \ell_2 / \ell_1 < 2$ : interpola linearmente.

Valores de  $\Psi_3$  em lajes

Resistência de cálculo do aço ( $f_{yd}$ ) correspondente à tensão efetiva de serviço (kgf/cm <sup>2</sup> )	$\Psi_3$
2150.....	35
2800.....	33
3500.....	30
4350.....	25
5200.....	20

Para as lajes, com mais de 4 metros de vão teórico, que suportarem paredes na direção do vão suscetíveis de fissuração, as alturas uteis mínimas calculadas por este item deverão ser multiplicadas por  $\ell/4$  ( $\ell$  em metros).

No caso em questão, utilizando-se CA-25 tem-se:

Laje L <sub>1</sub>	$\ell_1 = 3,12$ e $\ell_2 = 3,60$	$\Psi_2 = 1,65$	$d = 3,12 / (1,65 \times 3,5) \approx 6,0$ $h = 7,0 \text{ cm}$
Laje L <sub>2</sub>	$\ell_1 = 3,10$ e $\ell_2 = 3,60$	$\Psi_2 = 1,42$	$d = 3,10 / (1,42 \times 3,5) \approx 6,5$ $h = 8,0 \text{ cm}$
Laje L <sub>3</sub>	$\ell_1 = 3,12$ e $\ell_2 = 3,62$	$\Psi_2 = 1,60$	$d = 3,12 / (1,60 \times 3,5) \approx 6,0$ $h = 7,0 \text{ cm}$
Laje L <sub>4</sub>	$\ell_1 = 2,40$ e $\ell_2 = 3,12$	$\Psi_2 = 1,87$	$d = 2,40 / (1,87 \times 3,5) \approx 4,0$ $h = 7,0 \text{ cm}$
Laje L <sub>5</sub>	$\ell_1 = 1,62$ e $\ell_2 = 3,12$	$\Psi_2 = 1,44$	$d = 1,62 / (1,44 \times 3,5) \approx 4,0$ $h = 7,0 \text{ cm}$
Laje L <sub>6</sub>	$\ell_1 = 1,85$ e $\ell_2 = 3,12$	$\Psi_2 = 1,20$	$h = 7,0 \text{ cm}$
Laje L <sub>7</sub>	$\ell_1 = 1,35$ e $\ell_2 = 7,56$	$\Psi_2 = 1,20$	$h = 7,0 \text{ cm}$
Laje L <sub>8</sub>	$\ell_1 = 3,62$ e $\ell_2 = 3,62$	$\Psi_2 = 1,80$	$d = 3,62 / (1,8 \times 3,5) \approx 6,0$ $h = 7,0 \text{ cm}$
Laje L <sub>9</sub>	$\ell_1 = 3,62$ e $\ell_2 = 3,80$	$\Psi_2 = 1,78$	$d = 3,62 / (1,78 \times 3,5) \approx 6,0$ $h = 7,0 \text{ cm}$
Laje L <sub>11</sub>	$\ell_1 = 2,82$ e $\ell_2 = 3,12$	$\Psi_2 = 1,46$	$d = 2,82 / (1,46 \times 3,5) \approx 6,0$ $h = 7,0 \text{ cm}$

A laje do living será tratada adiante devido suas grandes dimensões, apesar de ser possível ainda trata-la como laje maciça de espessura 11cm.

Obs.: Os valores  $\ell_1$  e  $\ell_2$  pela NB-1 são dados como  $\ell_x$  e  $\ell_y$ ; adotou-se aqui a nova convenção para evitar confusão com a definição de  $\ell_x$  e  $\ell_y$  na utilização do processo de Marcus.

### 5.5 - Organização dos Cálculos\*

O cálculo das lajes, desde a determinação das cargas até o dimensionamento e detalhes, é feito em planta sobre papel vegetal.

Iniciamos com um desenho esquemático das lajes do pavimento tipo estudando, a seguir, as condições de apoios das diversas lajes.

O contorno externo foi considerado como sendo simplesmente apoiado.

Na ligação de uma laje rebaixada com outra em nível superior, apesar de existir continuidade, esta não foi considerada a fim de evitar o emprêgo de armadura especiais. Este procedimento é aceito para as lajes rebaixadas de vãos comuns em edifícios, tornando-se precário para o caso de grandes vãos.

Quando o lado de uma laje estiver parcialmente apoiado e parcialmente engastado, será mais prudente desprezar o engastamento, desde que este não atinja  $2/3$  do comprimento do lado em questão. É o caso dos apoios entre L5 e L6 e L10 e L11 que, para efeito das lajes L5 e L10 foram considerados apoios simples. A laje L6 é considerada engastada na laje L5.

A laje L7 tem continuidade com a L1 e não tem com a L2. Como é uma laje armada numa única direção, poderíamos considerá-la engastada na L1 e simplesmente apoiada na L2, porém, por se tratar de laje com vão pequeno, as armaduras negativas iriam tomar, praticamente todo o vão. Resolvemos por isso, considerá-la apoiada na viga V3.

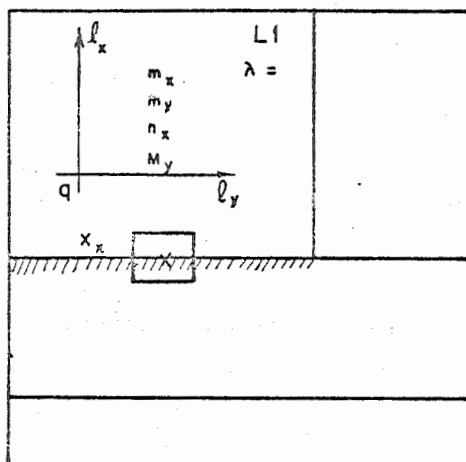
Uma vez estabelecido os tipos de vinculação das diversas lajes, passaremos ao cálculo das grandezas que interessam.

Na figura seguinte apresentamos o esquema de colocação dos elementos de cálculo, para o caso de edifícios em que a sobre carga é pequena comparada com a carga total por metro quadrado de laje.

No esquema traçamos, em cada laje, dois eixos cartesianos  $x$  e  $y$ , colocando nas suas extremidades os valores de  $l_x$  e  $l_y$  ( $l_x$  sendo a direção mais engastada ou o menor vão, no caso de igualdade de engastamento nas duas direções).

\*Seguiremos orientação adotada pelo Prof. Aderson Moreira da Rocha em "Cálculo completo de um edifício" Revista Estrutura e Novo Curso Prático de Concreto Armado". Vol. I, 12ª Edição.





A relação  $\lambda = l_y / l_x$  é colocada no canto direito superior em cada laje. Com esta relação e a vinculação da laje, já determinada, entrando nas tabelas de 1 a 6, no caso correspondente, tiramos os coeficientes  $m_x, m_y, n_x$  e  $n_y$ , os quais escrevemos, nesta ordem, abaixo de  $\lambda$ .

A carga  $q$  já determinada, é colocada junto à origem dos eixos.

As fórmulas para o cálculo dos momentos fletores são:

$$M_x = q l_x^2 / m_x ; \quad M_y = q l_x^2 / m_y ;$$

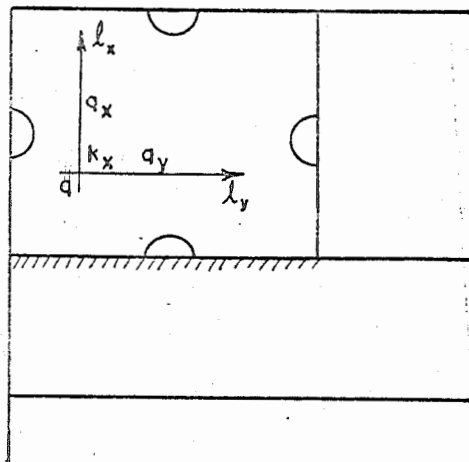
$$X_x = -q l_x^2 / n_x ; \quad X_y = -q l_x^2 / n_y$$

Nestas fórmulas, o numerador é sempre o mesmo:  $q l_x^2$ . Os resultados obtidos para os momentos positivos  $M_x$  e  $M_y$ , são escritos ao longo dos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente. Os resultados para  $X_x$  e  $X_y$  são escritos ao longo dos apoios a que pertencem.

Depois de efetuados todos os cálculos, verifica-se que em cada apoio existem dois valores diferentes para o momento negativo, cada um correspondendo a uma laje vizinha. O momento negativo neste apoio é a média dos dois valores obtidos, não adotando valor inferior a 80% do maior dos dois momentos. Estes valores são escritos dentro do retângulo no apoio correspondente.

A figura seguinte indica o esquema adotado para o cálculo da contribuição das lajes nas vigas vizinhas.

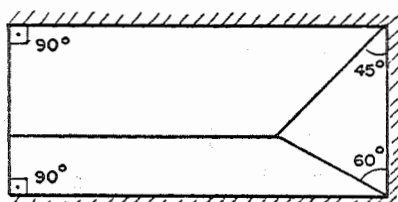
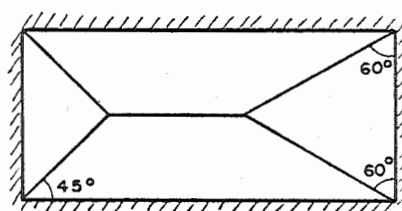
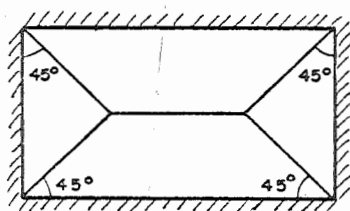
O quinhão  $q_x$  é calculado com  $q_x = q \cdot K_x$ . O produto  $K_x l_x$  dá a carga por metro de largura na direção  $x$ ; esta carga é lançada igualmente para os apoios quando estes forem idênticos; caso contrário  $0,55 q_x l_x$  para o mais vinculado. Obtida as cargas, os seus valores são colocados no semicírculo ao lado do apoio. Para o  $q_y$  procede-se igualmente.



Outra determinação do carregamento nas vigas é dada na NB-1 item 3.3.2.8 é o chamado "telhado" que consiste no cálculo das reações de apoio de lajes retangulares com cargas uniformemente distribuídas considerando para cada apoio carga correspondente aos triângulos ou trapézios obtidos traçando-se a partir dos vértices, na planta da laje, retas inclinadas de:

- \* 45° entre dois apoios do mesmo tipo;
- 60° a partir do apoio engastado quando o outro for livremente apoiado;
- 90° a partir do apoio quando a borda vizinha for livre.

Calcula-se a carga de cada lado com a área determinada pelo seu respectivo triângulo ou trapézio.



### 5.6 - Cálculo das armaduras

O cálculo das armaduras se faz, como já foi visto, para uma seção retangular, com a fórmula:

$$k_6 = \frac{b d^2}{M}$$

onde, no caso,  $b = 100\text{cm}$ . Com o valor de  $k_6$ , tira-se de tabelas o valor de  $k_3$ , e com êle

$$A_s = k_3 \frac{M}{d} \text{ (por metro de laje)}$$

Existem tabelas que dão, para as lajes de espessuras comuns, diretamente as armaduras em função do momento calculado. Assim, basta entrar com os momentos da laje para se obter, na tabela, a armadura e o espaçamento necessário. Estes resultados são escritos também no desenho esquemático.

Para a armadura das lajes, a NB-1 prescreve:

"Item 3.3.2.7 Quanto a armadura de tração sobre os apoios. Nas lajes engastadas de edifícios, não em balanço, quando não se determinar o diagrama exato dos momentos negativos, as barras da armadura principal sobre os apoios deverão estender-se de acordo com o diagrama triangular de momentos de base igual a 0,25ℓ; nas contínuas, os triângulos serão iguais nos dois lados do apoio, com base igual a 0,25 do maior dos vãos menores das lajes contínuas ao apoio considerado; no tramo interno contíguo a um balanço, a base do triângulo será 0,25 do respectivo vão no mínimo.

"Item 6.3.1.1. Quanto à seção transversal. O diâmetro das barras não deve ultrapassar 1/10 da espessura da laje.

Nas lajes armadas numa só direção e nas lajes nervuradas, a armadura de distribuição por metro de largura da laje deve ter seção transversal de área igual ou superior a 1/8 da área da armadura principal, com um mínimo de  $0,5\text{cm}^2$ , e ser composta de pelo menos tres barras.

"Item 6.3.2.1. Quanto ao espaçamento de barras. Na região dos maiores momentos nos vãos das lajes, o espaçamento das barras da armadura principal não deve ser maior que 20cm. Nas lajes armadas numa única direção esse espaçamento não deve, também, ser maior que 2h.

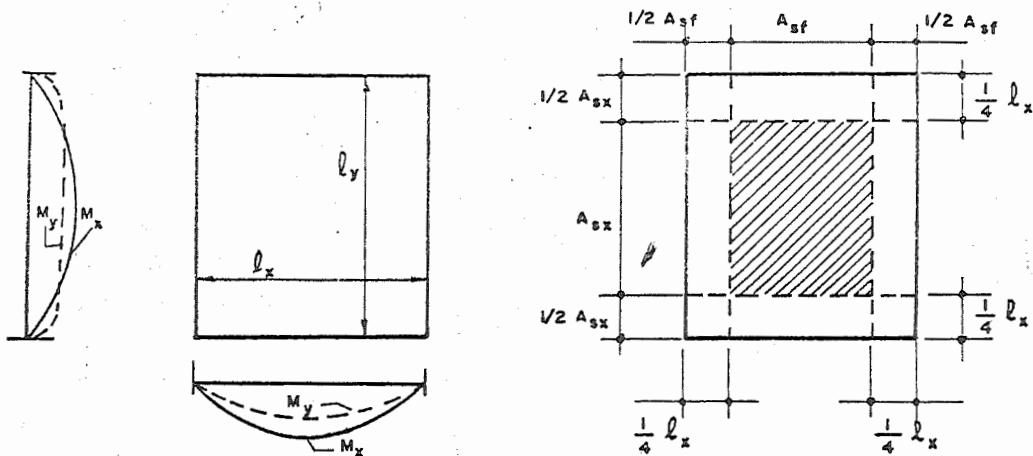
Os estribos das lajes nervuradas, sempre que necessários, não devem ter espaçamento maior que 20cm.

O espaçamento das barras de distribuição não deve ser maior que 33cm.

### 5.7 - Desenho dos detalhes de execução

Os desenhos devem representar, de maneira clara e precisa, todos os resultados do cálculo, isto é, as dimensões das peças, as posições e dimensões dos ferros (Recomenda-se, nesta altura, a leitura da NB-16. Execução de Desenhos para Obras de Concreto Simples ou Armado).

A distribuição da armadura positiva da laje é feita atendendo a variação dos momentos fletores. Para lajes de grandes vãos, colocamos a armadura calculada somente na região central da laje (parte hachurada da figura) e a metade desta armadura nas regiões laterais. A figura indica a distribuição dos momentos e a maneira prática de distribuir a armadura numa laje deste tipo, simplesmente apoiada.



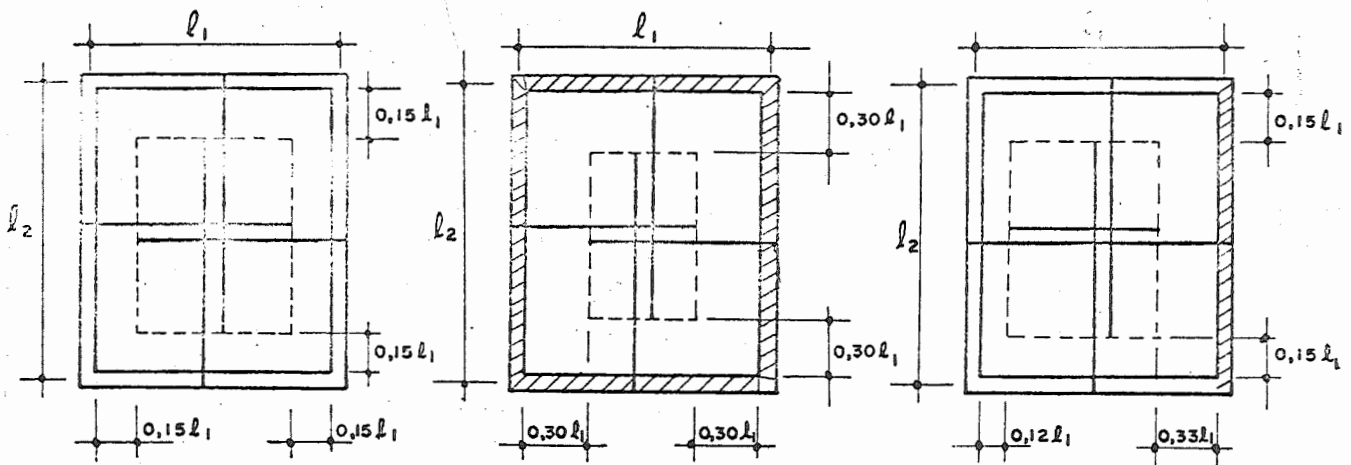
Normalmente, nos casos de lajes de dimensões comuns, não é necessário variar a armadura nos dois sentidos. Neste caso, para direção x por exemplo, a armadura  $A_{sx}$  terá espaçamento maior próximo aos apoios porém, não variará na direção y.

Atendendo então a variação dos momentos e se a laje é uma laje com dimensões comuns, podemos adotar esquemas indicados na figura para a distribuição da armadura.

Para os vãos isolados (2 apoios), costuma-se colocar os ferros alternadamente formando uma malha mais fechada no centro do que nas laterais. O comprimento dos ferros, assim colocados, deve ser igual ao vão teórico menos 0,15 do menor vão da la

je.

Para vãos extremos é preferível usar um ferro grande e um pequeno com as disposições indicadas na figura. O ferro pequeno será colocado, neste caso, a uma distância de  $0,12$  do menor vão, do lado do apoio extremo e a  $0,33$  também do menor vão do lado do engaste (ou apoio central).

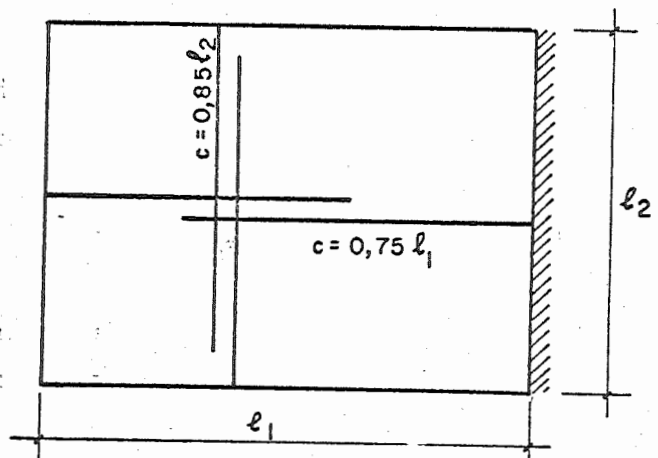
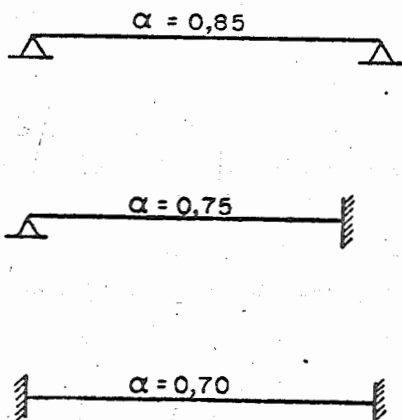


Para a distribuição da armadura negativa, costuma-se coloca-los também alternadamente. O comprimento de cada ferro é determinado em função dos vãos menores das lajes vizinhas.

Chamando de  $l_m$  a média dos menores vãos das lajes vizinhas, podemos tomar para comprimento dos ferros negativos alternados o valor de  $3/8 l_m$ , sendo que, quando  $l_m$  for menor que 80% do maior dos menores vãos das lajes vizinhas, substituímos  $l_m$  por este último valor.

As plantas de armadura das páginas 37 e 38 foram executadas usando ferros alternados conforme mostra a figura seguinte.

O comprimento dos ferros vale  $C = \alpha l$  onde  $l$  é o vão na direção considerada e  $\alpha$  depende das condições de apoio deste vão.



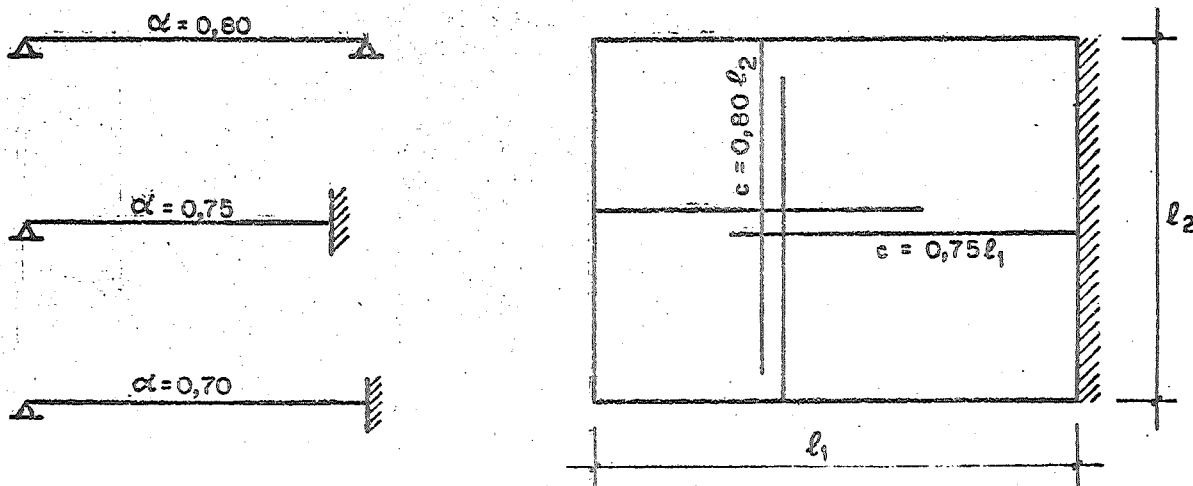
Para a distribuição da armadura negativa, costuma-se colocarlos também alternadamente. O comprimento de cada ferro é determinado em função dos vãos menores das lajes vizinhas.

Chamando de  $l_m$  a média dos menores vãos das lajes vizinhas, podemos tomar para comprimento dos ferros negativos alternados o valor  $3/8 l_m$ , sendo que, quando  $l_m$  for menor que 80% do maior dos menores vãos das lajes vizinhas, substituímos  $l_m$  por este último valor.

A NB-1 não prescreve limites para o espaçamento dos ferros negativos porém, deve-se atender que a NB-1 exige no apoio, sempre que a laje faça parte de uma viga T, uma armadura mínima, transversal à mesma, de  $1,5\text{cm}^2$  por metro linear abrangendo a largura da mesa.

As plantas de armadura das páginas 37 e 38 foram executadas usando ferros alternados conforme mostra a figura seguinte.

O comprimento dos ferros vale  $C = \alpha l$  onde  $l$  é o vão na direção considerada e  $\alpha$  depende das condições de apoio deste vão.

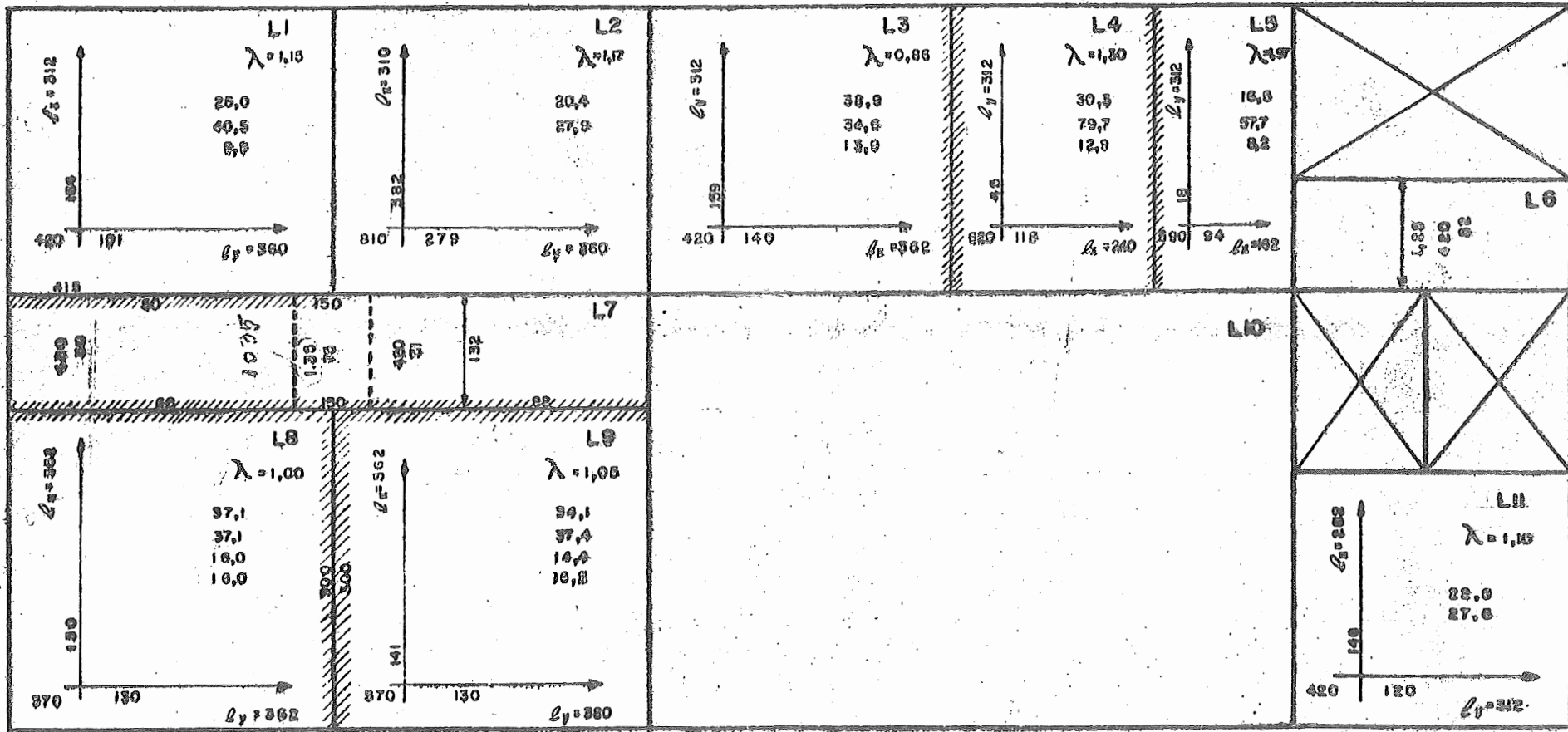


Nas plantas de armadura numeramos todos os ferros, repetindo o mesmo número toda vez que aparece um ferro do mesmo tipo, isto é, do mesmo diâmetro e mesmo comprimento.

Anexa às plantas devemos fazer tabelas de armaduras, obedecendo ao croquis da figura seguinte

Nº	$\phi$	Quantidade	Comprimento	
			Unit.	Total

Resumo		
$\phi$	Compr. total	peso



Nota: Por facilidade de cálculo não foi considerada a continuidade no contorno da laje L10 o que não é recomendável. É mais prudente e correto armar este contorno para os momentos negativos decorrentes da continuidade.

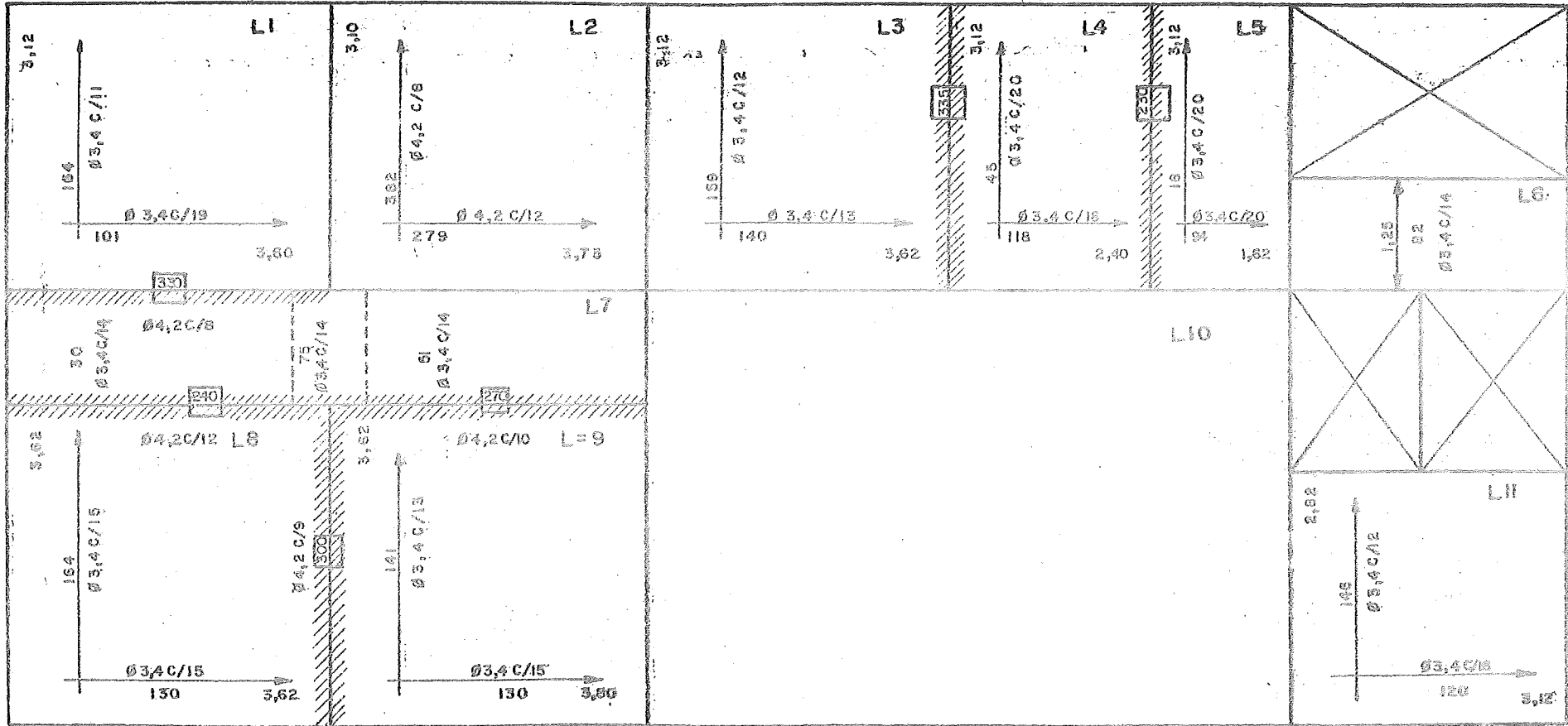
Nas plantas de armadura numeramos todos os ferros, repetindo o mesmo número toda vez que aparece um ferro do mesmo tipo, isto é, do mesmo diâmetro e mesmo comprimento.

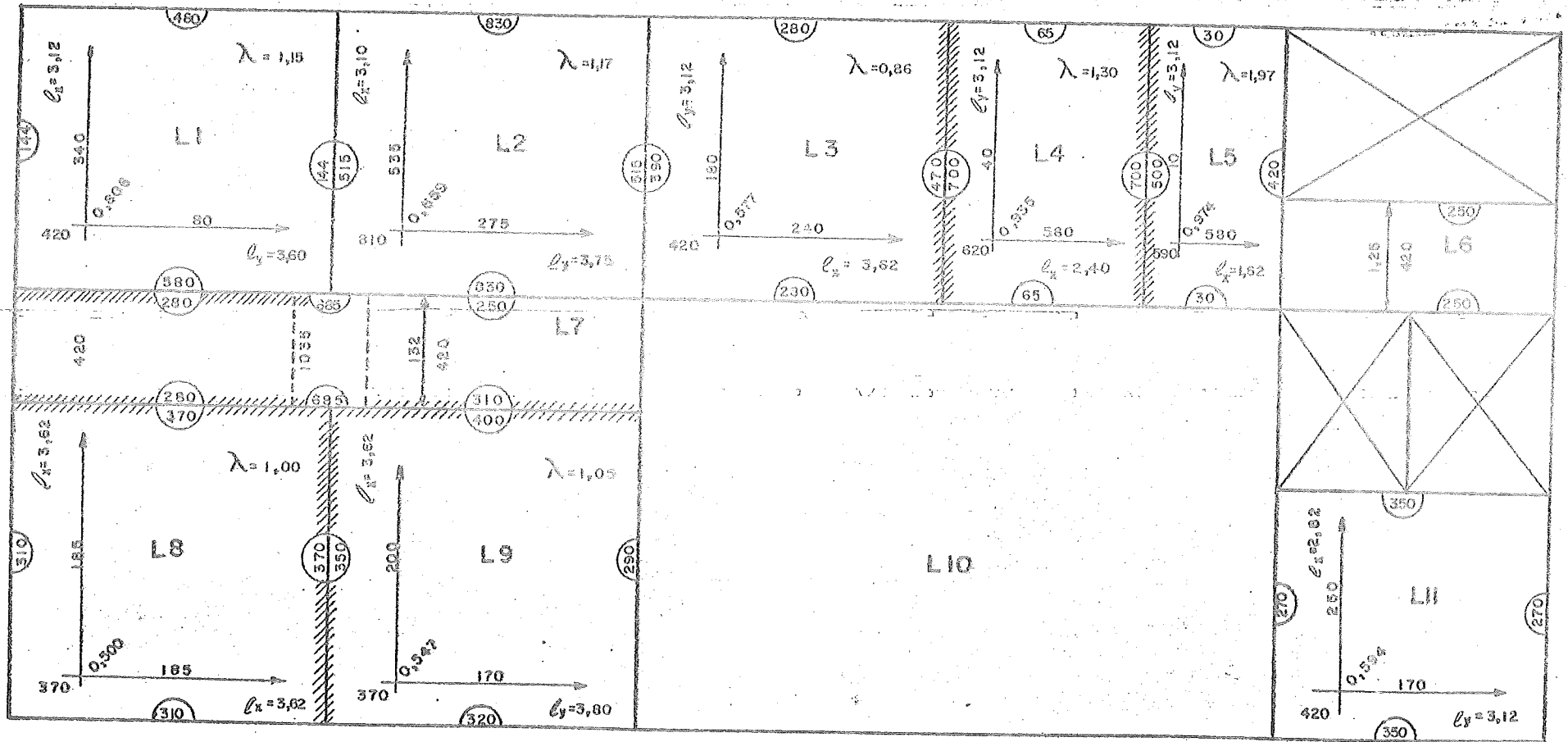
Anexa às plantas devemos fazer tabelas de armaduras, obedecendo ao croquis da figura seguinte

Nº	Ø	Quantidade	Comprimento	
			Unit.	Total

Ø	Comprimento Total	pêso



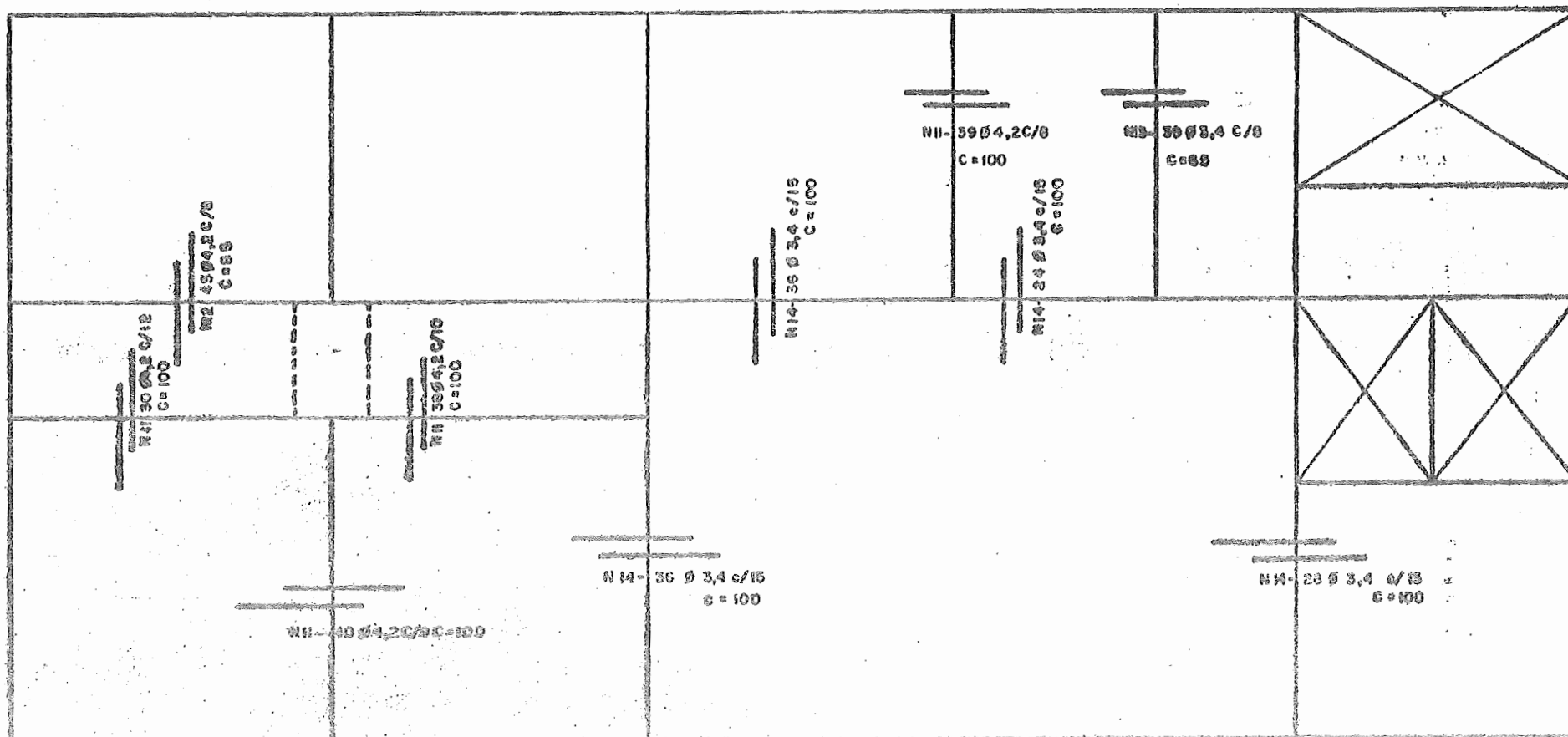




<p style="text-align: center;">N2-33Ø3,4 C/11 C=250</p>	<p style="text-align: center;">N5-45Ø4,2 C/8 C=270</p>	<p style="text-align: center;">N1-30Ø3,4 C/13 C=270</p>	<p style="text-align: center;">N1-12Ø3,4 C/20 C=270</p>	<p style="text-align: center;">N1-9Ø3,4 C/20 C=270</p>
<p style="text-align: center;">N3-17Ø3,4 C/19 C=310</p>	<p style="text-align: center;">N6-26Ø4,2 C/20 C=320</p>	<p style="text-align: center;">N1-14Ø3,4 C/15 C=270</p>	<p style="text-align: center;">N8-20Ø3,4 C/16 C=170</p>	<p style="text-align: center;">N1-25Ø3,4 C/14 C=125</p>
<p style="text-align: center;">N1-24Ø3,4 C/15 C=270</p>	<p style="text-align: center;">N4-52Ø3,4 C/14 C=130</p>	<p style="text-align: center;">N9-16Ø3,4 C/20 C=120</p>	<p style="text-align: center;">N10-26Ø3,4 C/20 C=240</p>	
<p style="text-align: center;">N1-24Ø3,4 C/15 C=270</p>	<p style="text-align: center;">N7-24Ø3,4 C/15 C=290</p>	<p style="text-align: center;">N1-18Ø3,4 C/16 C=270</p>		

ARMADURA POSITIVA

-2F-



Nota: Sobre o contorno da laje L10 foi colocada a ferragem julgada necessária para evitar trincas excessivas sobre os apoios.

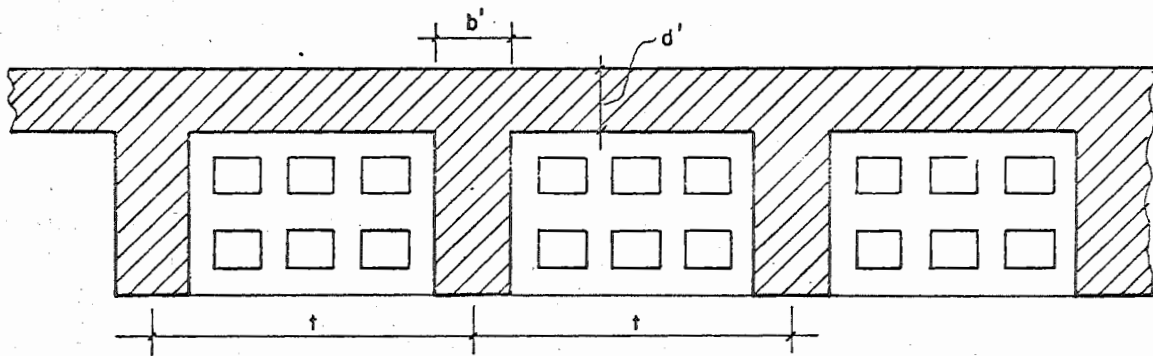
### ARMADURA NEGATIVA

### 5.8. - Lajes mistas e nervuradas

A figura da pág. 37 não apresenta a ferragem da laje L10 porque para esse vão projeta-se um tipo de laje especial. No caso deste exemplo ainda esta laje poderia ser feita como maciça; a não utilização deste tipo corrente é feito para apresentação do cálculo de lajes nervuradas e mistas.

Lembrando que a zona tracionada do concreto não contribui para a resistência da secção podemos diminuir o peso próprio da laje substituindo o concreto tracionado por material mais leve, por exemplo o tijolo furado. Para dar ligação entre a zona comprimida do concreto e a armadura a ser disposta na zona tracionada deixam-se nervuras no concreto.

A secção da laje passa a ser a da fig. 12.



Este tipo de laje tem seu cálculo previsto nas normas brasileiras podendo recair na categoria das lajes mistas ou das lajes nervuradas.

#### 5.8.1 - Lajes mistas

Segundo a NB-4, "chamam-se lajes mistas aquelas que se constroem com tijolos cerâmicos, capazes de resistir aos esforços de compressão, oriundos da flexão, quando solidários com nervuras de concreto armado".

O emprêgo de lajes mistas é vedado pela NB-4, "em pisos sujeitos a cargas concentradas, dentro da área de um tijolo, maiores que 75 kg".

Esta norma exige ainda que haja uma nervura entre duas fiadas de tijolos não sendo permitido o uso de camadas superpostas de tijolos.

Com a notação da Fig. 12, segundo a NB-4, para a laje mista devemos ter

- a) espaçamento das nervuras  $t \leq 40$  cm
- b) largura da nervura  $b' \geq \begin{cases} 3 \text{ cm} \\ 1/8 t \end{cases}$
- c) altura da mesa comprimida  $d' \begin{cases} \geq 3 \text{ cm} \\ \leq 5 \text{ cm} \end{cases}$

Se a espessura da mesa ultrapassar 5cm o cálculo deve ser feito como laje nervurada.

A característica principal do cálculo como laje mista é que este considera o tijolo tomando parte na resistência da secção. A tensão admissível no tijolo pode ser tomada  $\frac{1}{5}$  de sua tensão de ruptura não devendo esta ultrapassar o limite de 60 kg/cm<sup>2</sup>. Os calculos devem ser feitos no Estádio II.

#### 5.8.2 - Exemplo de laje mista

Seja projetar numa laje mista para os vãos teóricos (de cálculo) 4,50 e 6,50m. Usaremos para esse vão a laje mista cujas dimensões estão indicadas nos cortes da figura 13. O tijolo a usar tem dimensões 10 x 20 x 30cm, com 6 furos.

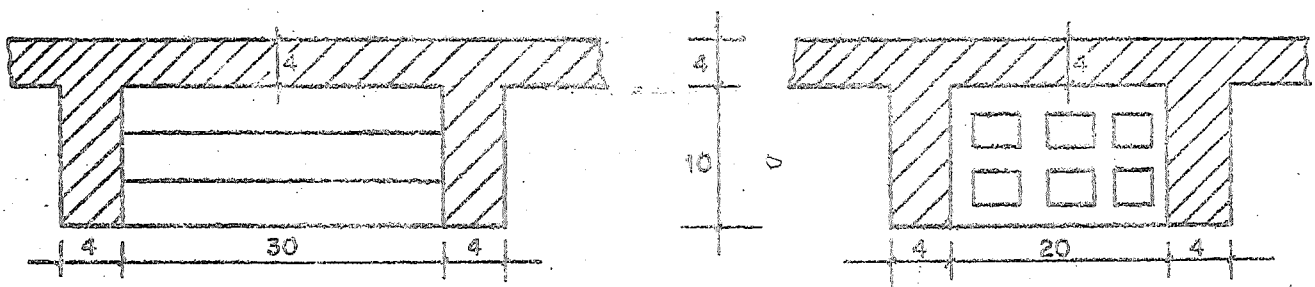


Fig. 13 - Laje Mista

Evidentemente as nervuras com espaçamento menor serão colocadas no sentido em que o momento na laje é maior.

Para o cálculo do peso próprio dividimos o peso do material contido na área hachurada da fig. 14 pela área respectiva.

Assim temos

- a) peso da mesa

$$0,20 \times 0,30 \times 0,04 \times 2.400 = 5,8 \text{ kg}$$

- b) peso das nervuras  
 $1,08 \times 0,04 \times 0,14 \times 2.400 = 14,5 \text{ kg}$
- c) peso de um tijolo =  $3,5 \text{ kg}$   
total.....  $23,8 \text{ kg}$
- d) Área da região hachuriada  
 $0,34 \times 0,24 = 0,082 \text{ m}^2$

Logo o peso próprio será

$$\text{p.p.} = \frac{23,8}{0,082} = 290 \text{ kg/m}^2$$

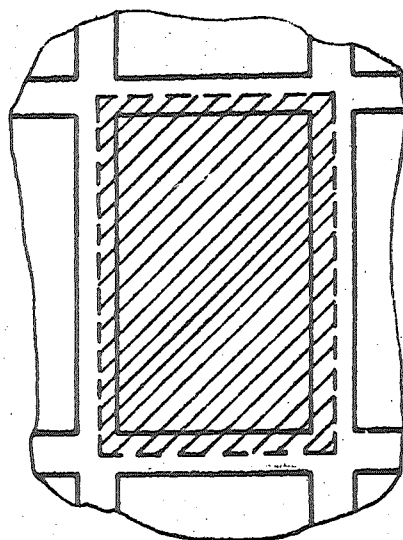


Fig. 14

As cargas atuantes na laje são então

- a) peso próprio  $290 \text{ kg/m}^2$
- b) sobrecarga  $150 \text{ kg/m}^2$
- c) revestimento  $50 \text{ kg/m}^2$

e portanto  $q = 490 \text{ kg/m}^2$ .

Com a tabela de Marcus referente a laje simplesmente apoiada nas quatro bordas temos

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} = \frac{6,50}{4,50} = 1,44$$

$$m_x = 14,7, \quad m_y = 30,5$$

$$q l_x^2 = 4,90 \times 4,50^2 = 9940$$

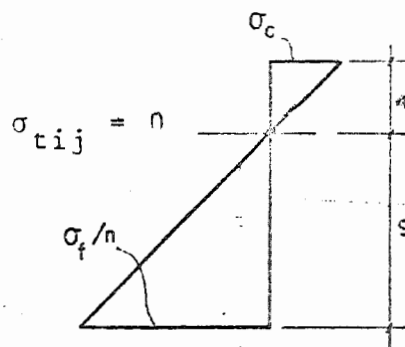
$$M_x = q \frac{l_x^2}{m_x} = \frac{9940}{14,7} = 675 \text{ kgm}$$

$$M_y = q \frac{l_y^2}{m_y} = \frac{9940}{30,5} = 326 \text{ kgm}$$

Passamos agora no cálculo da ferragem necessária. Para isso calcularemos inicialmente o momento admissível com  $\sigma_f = \bar{\sigma}_f = 1500 \text{ kg/cm}^2$ . Tomaremos a tensão no tijolo nula tendo em vista a linha neutra não cortar a nervura, caso em que o cálculo não estaria muito correto pelo fato de estarmos trabalhando com tijolo furado e não tijolo maciço.

Com esta hipótese temos

$$\frac{\sigma_c}{4} = \frac{\sigma_f}{9n}$$



portanto

$$\sigma_c = \frac{4}{9} \times 100 = 44 \text{ kg/cm}^2 < \bar{\sigma}_c = 60 \text{ kg/cm}^2$$

Para  $\sigma_c = 44 \text{ kg/cm}^2$  temos pela tabela de Loeser (CA-25)  $k_6 = 165$  e o momento admissível por metro de laje

$$\bar{M} = \frac{bd^2}{k_6} = 100 \times \frac{13^2}{165} = 102 \text{ tcm}$$

Como os momentos atuantes na laje são menores que o momento admissível calculado para esses momentos a linha neutra deverá cortar a mesa.

A ferragem correspondente a  $M_x = 68 \text{ tcm}$  é determinada com a marcha de cálculo.

$$k_6 = \frac{bd^2}{M} = \frac{100 \times 13^2}{68} = 250$$

Da tabela de Loeser tiramos  $\sigma_c = 33 \text{ kg/cm}^2$ ,  $k_x = 0,254$ ,  $k_3 = 0,728$  e portanto

$$x = 0,254 \times 13 = 3,3 \text{ cm}$$

$$A_s = k_3 \frac{M}{d} = 0,728 \times \frac{68}{13} = 3,8 \text{ cm}^2/\text{m}$$

A ferragem por nervura será

$$A_s = 3,8 \times 0,24 = 0,90 \text{ cm}^2$$

Na outra direção temos

$$M_y = 33 \text{ tcm}$$

$$k_6 = \frac{bd^2}{M} = 100 \times \frac{13^2}{33} = 510$$

$$\sigma_c = 23 \text{ kg/cm}^2, k_x = 0,187, k_3 = 0,711$$

$$A_s = k_3 \frac{M}{d} = 0,711 \times \frac{33}{13} = 1,8 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_s = 1,8 \times 0,34 = 0,61 \text{ cm}^2/\text{nervura}$$



### 5.8.3 - Laje nervurada

Quando se despreza a resistência dos tijolos (caso em que esses serviriam apenas como forma) ou estes não são usados, o cálculo é feito como laje nervurada.

A NB-1 permite o cálculo de lajes nervuradas no regime elástico (item 3.3.2.1); assim o cálculo como grelha pode ser utilizado; supõe-se a carga total dividida em dois quinhões, agindo um em cada direção e determinados igualando a flecha máxima das vigas centrais (portanto como laje maciça com os coeficientes  $V_x$  e  $V_y$  de Marcus tomados iguais à unidade).

#### Restrições da NB-1

Item 3.3.2.9 - A resistência da mesa deverá ser verificada sempre que a distância livre entre nervuras superar 50cm ou houver carga concentrada no painel entre nervuras. As nervuras deverão ser verificadas ao cisalhamento, como vigas, se a distância livre entre elas for superior a 50cm e como laje em caso contrário.

#### Item 6.1.1.3 -

- a) espaçamento das nervuras  $t \leq 100$ cm
- b) espessura da nervura  $b' > 4$  cm.

$$\text{espessura da mesa } d' > \begin{cases} 4 \text{ cm} \\ 1/15 t \end{cases}$$

- c) o apoio das lajes deve ser feitos ao longo de uma nervura.
- d) nas lajes armadas numa só direção, são necessárias nervuras transversais sempre que haja cargas concentradas a distribuir ou quando o vão teórico for superior a 4m, exigindo-se duas nervuras no mínimo se esse vão ultrapassar a 6m:
- e) nas nervuras com espessura inferior a 8cm não é permitido colocar armadura de compressão no lado oposto da mesa.

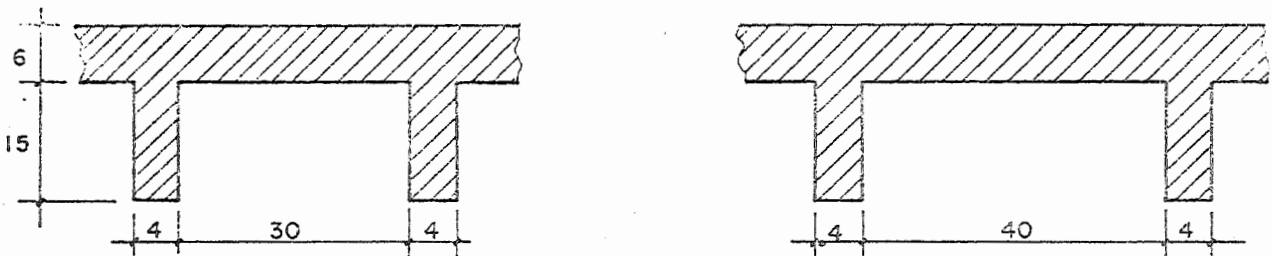
O funcionamento das lajes nervuradas, com o espaçamento máximo de nervuras previsto na NB-1, é muito semelhante ao das lajes maciças e assim podem ser calculadas com o uso das tabelas de Marcus.

O prof. Aderson M. Rocha recomenda o cálculo como laje maciça (teoria de Marcus) quando o espaçamento das nervuras é menor que 50cm e o cálculo como grelha (da NB-1) quando o espaçamento ultrapassar este limite.

#### 5.8.4 - Exemplos de laje nervurada

1 - Para a laje L10 de vãos livres 4,88x7,58m usaremos painéis retangulares de 0,30x0,40 e nervuras com 4cm de espessura. De acordo com a prescrição da NB-1, a laje apoia-se nas vigas de contorno através de uma nervura.

Adotando-se a altura útil da laje igual a 21cm, pode-se ter as seções das nervuras dispostas abaixo correspondentes ao menor e maior vão, respectivamente.



O peso próprio resultou em 320 kg tendo sido computados o peso da forma de madeira ( $\gamma=600 \text{ kg/m}^3$ ) e o peso do forro falso.

As cargas atuantes são

peso próprio.....	320 kg/m <sup>2</sup>
carga acidental.....	150 kg/m <sup>2</sup>
revestimento.....	50 kg/m <sup>2</sup>
Total..	520 kg/m <sup>2</sup>

Os momentos serão calculados usando a tabela de Marcus para lajes simplesmente apoiada nas quatro bordas.

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} = \frac{770}{504} = 1,53$$

$$m_x = 13,6 \quad m_y = 31,8 \quad k_x = 0,842$$

$$q l_x^2 = 520 \times 5,04^2 = 13.200$$

$$M_y = q \frac{l_x^2}{m_y} = \frac{13200}{31,8} = 415 \text{ kgm}$$

$$M_x = q \frac{l_x^2}{m_x} = 970 \text{ kgm}$$

O dimensionamento da secção será feito no Est. III com  $f_{ck} = 135 \text{ kg/cm}^2$  e aço CA60B. Para o momento  $M_x$  temos (supondo que a linha neutra não corte a nervura)

$$k_6 = \frac{bd^2}{M} = \frac{100 \times 10^2}{97} = 410$$

pela tabela

$$k_y = 0,40$$

$$y = 0,04 \times 10 = 0,4 \text{ cm}$$

portanto a hipótese feita está correta.

Tiramos então da tabela

$$k_3 = 0,27$$

$$A_s = k_3 \frac{M}{d} = 0,27 \times \frac{97}{20} = 1,31 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_s = 0,34 \times 1,36 = 0,45 \text{ cm}^2/\text{nervura}$$

Para o momento  $M_y$

$$k_6 = \frac{bd^2}{M} = 100 \times \frac{20^2}{42} = 950$$

$$k_y = 0,02 \text{ e } y = 0,02 \times 20 = 0,4 \text{ cm}$$

$$k_3 = 0,27$$

$$A_s = 0,27 \times \frac{42}{20} = 0,58 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_s = 0,44 \times 0,58 = 0,26 \text{ cm}^2/\text{nervura}$$

2 - Seja uma laje nervurada com painéis retangulares de dimensões  $0,65 \times 0,85 \text{ m}$  (vãos entre nervuras); separados por nervuras de 6 cm de espessura, sendo dez o número de painéis em cada direção. Sendo os vãos livres 7,16 m e 9,16 m, adotando-se 25 cm para a altura útil da laje.

Para a determinação dos momentos adota-se agora o cálculo como grelha.

Este cálculo baseia-se na igualdade das flechas máximas

das vigas centrais. O valor do momento de inércia a considerar na expressão das flechas, em cada direção, será o da secção formada pela nervura e uma parte da mesa que se considera fazendo parte da viga.

De acordo com a NB-1 - 3.2.2.2, a largura da mesa a ser considerada no cálculo, medida para cada lado do eixo da nervura não deve ultrapassar

$$\frac{b_w}{2} + (0,10a, 8h_f \text{ ou } 0,5h_2)$$

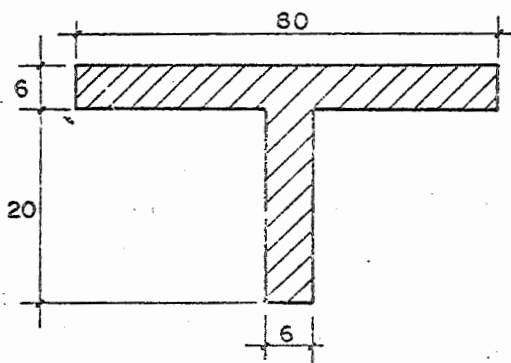
onde

$b_w$  é a largura da nervura

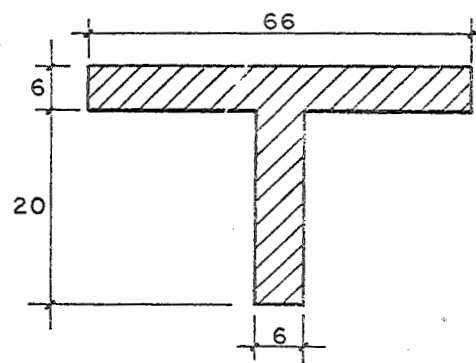
$a = \ell$  para vigas simplesmente

$h_f$  = espessura da mesa

$b_2$  = distancia entre mísulas



secção na direção y



secção na direção x

A flecha na direção x (ou do menor vão) é dada por

$$f_x = \frac{5}{384} p \frac{\ell_x^4}{E J_x}$$

onde

$$p = 0,71 q_x, \ell_x = 7,41m, J_x = 20840cm^4$$

e na direção y por

$$f_y = \frac{.5}{384} p \frac{l_y^4}{E J_y}$$

onde

$$p = 0,91 q_y, l_y = 9,41m, J_y = 21.680cm^4$$

Igualando  $f_x$  e  $f_y$  resulta

$$q_y = 0,31 q_x$$

Como

$$q_x + q_y = q$$

vem

$$q_x = 0,76 \cdot q$$

$$q_y = 0,24 \cdot q$$

O momento na direção x vale

$$M_x = q_x \frac{l_x^2}{8} = 0,76 q \frac{l_x^2}{8} = q \frac{l_x^2}{10,53}$$

e na direção y

$$M_y = q_y \frac{l_y^2}{8} = 0,24q \frac{(l_y/l_x)^2}{8} l_x^2 = q \frac{l_x^2}{20,67}$$

Do cálculo como laje maciça, usando as tabelas de Marcus, resultam os momentos

$$M_x = q \frac{l_x^2}{17,7}, M_y = q \frac{l_x^2}{28,6}$$

e as cargas

$$q_x = 0,72q \quad e \quad q_y = 0,28 q.$$

Pelo exame dos resultados conclui-se que a tabela de Marcus fornece valores muito próximos para a carga em cada direção, entretanto os momentos obtidos por Marcus estão francamente contra a segurança.

Tabelas de Marcus para o cálculo de  
lajes armadas em cruz

TABELA 1  
CÁLCULO DAS LAJES EM CRUZ



$$M_x = \frac{q l^2}{8 m_x}$$

$$M_y = \frac{q l^2}{8 m_y}$$

$$q_x = k_x q$$

$l_y/l_x$	$m_x$	$m_y$	$k_x$	$l_y/l_x$	$m_x$	$m_y$	$k_x$
1,00	2,74	2,74	0,500	1,50	1,99	3,13	0,055
1,01	2,70	2,74	509	1,51	1,98	3,14	0,088
1,02	2,65	2,74	519	1,52	1,97	3,16	0,12
1,03	2,60	2,74	520	1,53	1,96	3,18	0,15
1,04	2,56	2,75	538	1,54	1,95	3,19	0,18
1,05	2,51	2,75	547	1,55	1,94	3,21	0,21
1,06	2,46	2,75	556	1,56	1,93	3,23	0,25
1,07	2,42	2,75	566	1,57	1,92	3,24	0,28
1,08	2,37	2,75	575	1,58	1,91	3,26	0,31
1,09	2,32	2,76	585	1,59	1,90	3,28	0,35
1,10	2,28	2,76	594	1,60	1,89	3,30	0,38
1,11	2,24	2,76	602	1,61	1,88	3,32	0,40
1,12	2,21	2,77	610	1,62	1,87	3,34	0,43
1,13	2,18	2,77	618	1,63	1,86	3,36	0,45
1,14	2,14	2,78	626	1,64	1,85	3,38	0,48
1,15	2,11	2,78	634	1,65	1,84	3,40	0,50
1,16	2,08	2,78	643	1,66	1,84	3,42	0,53
1,17	2,04	2,79	651	1,67	1,83	3,44	0,55
1,18	2,01	2,79	659	1,68	1,82	3,46	0,58
1,19	1,98	2,79	667	1,69	1,81	3,48	0,60
1,20	1,94	2,80	675	1,70	1,80	3,50	0,63
1,21	1,92	2,81	682	1,71	1,80	3,52	0,65
1,22	1,90	2,82	689	1,72	1,79	3,55	0,67
1,23	1,87	2,83	695	1,73	1,78	3,57	0,69
1,24	1,85	2,84	701	1,74	1,77	3,59	0,71
1,25	1,82	2,84	708	1,75	1,77	3,62	0,73
1,26	1,80	2,85	715	1,76	1,76	3,64	0,75
1,27	1,77	2,86	721	1,77	1,75	3,67	0,77
1,28	1,75	2,87	728	1,78	1,75	3,69	0,79
1,29	1,72	2,88	734	1,79	1,74	3,71	0,81
1,30	1,70	2,88	741	1,80	1,74	3,74	0,83
1,31	1,68	2,89	746	1,81	1,74	3,76	0,85
1,32	1,67	2,90	752	1,82	1,73	3,78	0,86
1,33	1,65	2,91	757	1,83	1,73	3,81	0,88
1,34	1,63	2,92	762	1,84	1,72	3,83	0,90
1,35	1,61	2,93	767	1,85	1,72	3,85	0,91
1,36	1,60	2,95	773	1,86	1,71	3,88	0,93
1,37	1,58	2,96	778	1,87	1,71	3,90	0,94
1,38	1,56	2,97	783	1,88	1,70	3,92	0,95
1,39	1,54	2,98	789	1,89	1,70	3,95	0,97
1,40	1,52	2,99	794	1,90	1,70	3,97	0,98
1,41	1,51	3,00	798	1,91	1,69	4,00	0,99
1,42	1,49	3,02	802	1,92	1,69	4,02	0,99
1,43	1,48	3,03	806	1,93	1,68	4,05	0,99
1,44	1,47	3,03	810	1,94	1,68	4,08	0,99
1,45	1,45	3,05	814	1,95	1,68	4,10	0,99
1,46	1,44	3,07	819	1,96	1,67	4,13	0,99
1,47	1,43	3,09	823	1,97	1,67	4,16	0,99
1,48	1,41	3,10	827	1,98	1,66	4,18	0,99
1,49	1,40	3,12	831	1,99	1,66	4,21	0,99
1,50	1,39	3,13	835	2,00	1,66	4,23	0,99
$l_x/l_y$	$m_y$	$m_x$	$k_y$	$l_x/l_y$	$m_y$	$m_x$	$k_y$

TABELA 1A  
CÁLCULO DAS LAJES EM CRUZ



$$M_x = \frac{q l_x^2}{m_x}$$

$$M_y = \frac{q l_x^2}{m_y}$$

$$q_x = k_x q$$

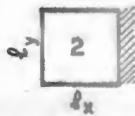
$l_y/l_x$	$m_x$	$m_y$	$k_x$	$l_y/l_x$	$m_x$	$m_y$	$k_x$
0,50	169,20	42,28	0,059	0,75	51,69	24,09	0,240
0,51	160,30	41,26	0,063	0,76	50,15	23,90	0,230
0,52	151,50	40,29	0,068	0,77	48,60	23,68	0,220
0,53	142,70	39,28	0,073	0,78	47,06	23,51	0,210
0,54	133,90	38,32	0,077	0,79	45,51	23,31	0,200
0,55	125,10	37,58	0,084	0,80	43,97	23,14	0,190
0,56	119,07	36,75	0,090	0,81	42,83	23,13	0,180
0,57	113,04	36,09	0,097	0,82	41,70	23,06	0,172
0,58	107,00	35,47	0,102	0,83	40,56	22,99	0,162
0,59	100,97	34,79	0,108	0,84	39,43	22,91	0,152
0,60	94,94	34,16	0,115	0,85	38,29	22,90	0,143
0,61	88,91	33,68	0,122	0,86	37,48	22,82	0,134
0,62	82,88	33,22	0,129	0,87	36,68	22,79	0,126
0,63	76,85	32,86	0,136	0,88	35,87	22,75	0,117
0,64	70,82	32,22	0,144	0,89	35,07	22,68	0,108
0,65	64,79	31,77	0,152	0,90	34,26	22,60	0,099
0,66	58,76	31,44	0,159	0,91	33,50	22,59	0,090
0,67	52,73	31,18	0,168	0,92	32,73	22,57	0,081
0,68	46,70	30,84	0,176	0,93	31,97	22,53	0,072
0,69	40,67	30,50	0,183	0,94	31,20	22,48	0,063
0,70	34,64	30,18	0,194	0,95	30,44	22,48	0,054
0,71	28,61	29,96	0,203	0,96	29,64	22,48	0,045
0,72	22,58	29,71	0,212	0,97	29,24	22,46	0,036
0,73	16,55	29,51	0,221	0,98	28,63	22,46	0,027
0,74	10,52	29,32	0,230	0,99	28,03	22,44	0,018
0,75	4,49	29,09	0,240	1,00	27,43	22,43	0,009

Observação: A tabela 1-A é usada apenas no caso de lajes apoiadas nos quatro lados, quando se toma para  $l_x$  o vão maior, em vez do menor vão. Este caso aparece no cálculo das lajes contínuas, quando é estudada a situação mais desfavorável da sobrecarga.

Com efeito, para a carga  $q'$  a existência de engastes pode dar lugar a adoção de  $l_x$  e  $l_y$ , sendo necessário, neste caso, usar a tabela 1-A no cálculo dos momentos correspondentes à carga  $q''$ .



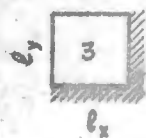
TABELA 2  
CÁLCULO DAS LAJES EM CRUZ



$$M_x = \frac{q l_x^2}{m_x} \quad M_y = \frac{q l_y^2}{m_y} \quad n_x = \frac{l_x^2}{n_x} \quad n_y = \frac{l_y^2}{n_y}$$

$l_y/l_x$	$m_x$	$m_y$	$n_x$	$n_y$	$l_y/l_x$	$m_x$	$m_y$	$n_x$	$n_y$
0,50	140,9	45,1	50,2	0,125	1,00	29,9	36,7	11,2	0,714
0,51	134,2	44,3	58,2	145	1,02	29,1	37,2	11,0	728
0,52	127,5	43,4	51,0	153	1,04	28,3	37,7	10,8	742
0,53	120,8	42,6	48,2	166	1,06	27,5	38,2	10,6	756
0,54	114,1	41,8	45,3	176	1,08	26,7	38,7	10,4	770
0,55	107,4	41,0	42,5	186	1,10	26,0	39,2	10,2	785
0,56	100,7	40,2	39,6	198	1,12	25,2	39,7	10,1	799
0,57	94,0	39,4	36,7	210	1,14	24,5	40,2	9,9	806
0,58	87,3	38,6	33,8	221	1,16	23,7	40,7	9,8	817
0,59	80,6	37,8	30,9	232	1,18	23,0	41,2	9,6	827
0,60	74,0	37,1	28,0	245	1,20	22,2	41,7	9,5	838
0,61	67,3	36,3	25,1	257	1,22	21,5	42,2	9,4	846
0,62	60,6	35,5	22,2	270	1,24	20,7	42,7	9,3	853
0,63	54,0	34,7	19,3	282	1,26	20,0	43,2	9,2	861
0,64	47,3	33,9	16,4	295	1,28	19,2	43,7	9,1	869
0,65	40,6	33,1	13,5	308	1,30	18,5	44,2	9,0	877
0,66	34,0	32,3	10,6	321	1,32	17,7	44,7	8,9	883
0,67	27,3	31,5	7,7	335	1,34	17,0	45,2	8,8	889
0,68	20,6	30,7	4,8	348	1,36	16,2	45,7	8,7	895
0,69	14,0	29,9	1,9	362	1,38	15,5	46,2	8,6	901
0,70	7,3	29,1	0,0	375	1,40	14,7	46,7	8,5	906
0,71	0,6	28,3	0,0	388	1,42	14,0	47,2	8,4	910
0,72	0,0	27,5	0,0	401	1,44	13,2	47,7	8,3	914
0,73	0,0	26,7	0,0	415	1,46	12,5	48,2	8,2	918
0,74	0,0	25,9	0,0	428	1,48	11,7	48,7	8,1	922
0,75	0,0	25,1	0,0	442	1,50	11,0	49,2	8,0	926
0,76	0,0	24,3	0,0	455	1,52	10,2	49,7	7,9	929
0,77	0,0	23,5	0,0	468	1,54	9,5	50,2	7,8	932
0,78	0,0	22,7	0,0	481	1,56	8,7	50,7	7,7	935
0,79	0,0	21,9	0,0	494	1,58	8,0	51,2	7,6	938
0,80	0,0	21,1	0,0	508	1,60	7,2	51,7	7,5	943
0,81	0,0	20,3	0,0	521	1,62	6,5	52,2	7,4	945
0,82	0,0	19,5	0,0	535	1,64	5,7	52,7	7,3	947
0,83	0,0	18,7	0,0	548	1,66	5,0	53,2	7,2	949
0,84	0,0	17,9	0,0	562	1,68	4,2	53,7	7,1	952
0,85	0,0	17,1	0,0	575	1,70	3,5	54,2	7,0	954
0,86	0,0	16,3	0,0	588	1,72	2,7	54,7	6,9	956
0,87	0,0	15,5	0,0	601	1,74	2,0	55,2	6,8	958
0,88	0,0	14,7	0,0	615	1,76	1,2	55,7	6,7	959
0,89	0,0	13,9	0,0	628	1,78	0,5	56,2	6,6	961
0,90	0,0	13,1	0,0	642	1,80	0,0	56,7	6,5	963
0,91	0,0	12,3	0,0	655	1,82	0,0	57,2	6,4	964
0,92	0,0	11,5	0,0	668	1,84	0,0	57,7	6,3	966
0,93	0,0	10,7	0,0	681	1,86	0,0	58,2	6,2	967
0,94	0,0	9,9	0,0	694	1,88	0,0	58,7	6,1	968
0,95	0,0	9,1	0,0	708	1,90	0,0	59,2	6,0	970
0,96	0,0	8,3	0,0	721	1,92	0,0	59,7	5,9	971
0,97	0,0	7,5	0,0	735	1,94	0,0	60,2	5,8	972
0,98	0,0	6,7	0,0	748	1,96	0,0	60,7	5,7	973
0,99	0,0	5,9	0,0	762	1,98	0,0	61,2	5,6	974
1,00	0,0	5,1	0,0	775	2,00	0,0	61,7	5,5	976

TABELA 3  
CÁLCULO DAS LAJES EM CRUZ



$$M_x = \frac{q l_x^2}{m_x}$$

$$M_y = \frac{q l_y^2}{m_y}$$

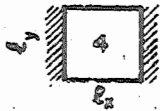
$$n_x = \frac{q l_x^2}{n_x}$$

$$n_y = \frac{q l_y^2}{n_y}$$

$$k_x = k_x q$$

$l_y/l_x$	$m_x$	$m_y$	$n_x$	$n_y$	$k_x$	$l_y/l_x$	$m_x$	$m_y$	$n_x$	$n_y$	$k_x$
1,0 0	3 7,1	3 7,1	1 6,0	1 6,0	0,5 0 0	1,5 0	2 0,6	4 6,4	9,6	2 1,6	0,8 3 5
1,0 1	3 6,5	3 7,2	1 5,7	1 6,0	5 0 9	1,5 1	2 0,5	4 6,8	9,5	2 1,8	8 3 8
1,0 2	3 5,9	3 7,2	1 5,4	1 6,0	5 1 9	1,5 2	2 0,4	4 7,1	9,5	2 2,0	8 4 2
1,0 3	3 5,3	3 7,3	1 5,1	1 6,1	5 2 8	1,5 3	2 0,3	4 7,5	9,4	2 2,2	8 4 5
1,0 4	3 4,7	3 7,3	1 4,9	1 6,1	5 3 8	1,5 4	2 0,2	4 7,8	9,4	2 2,4	8 4 8
1,0 5	3 4,1	3 7,4	1 4,8	1 6,1	5 4 7	1,5 5	2 0,0	4 8,2	9,4	2 2,6	8 5 1
1,0 6	3 3,5	3 7,4	1 4,4	1 6,2	5 5 6	1,5 6	1 9,9	4 8,5	9,3	2 2,8	8 5 5
1,0 7	3 2,9	3 7,5	1 4,1	1 6,2	5 6 6	1,5 7	1 9,8	4 8,9	9,3	2 3,0	8 5 8
1,0 8	3 2,3	3 7,5	1 3,9	1 6,2	5 7 5	1,5 8	1 9,7	4 9,2	9,2	2 3,2	8 6 1
1,0 9	3 1,7	3 7,6	1 3,7	1 6,3	5 8 5	1,5 9	1 9,6	4 9,6	9,2	2 3,4	8 6 5
1,1 0	3 1,1	3 7,6	1 3,5	1 6,3	5 9 4	1,6 0	1 9,5	4 9,9	9,2	2 3,7	8 6 8
1,1 1	3 0,6	3 7,7	1 3,3	1 6,3	6 0 2	1,6 1	1 9,4	5 0,3	9,2	2 3,9	8 7 0
1,1 2	3 0,2	3 7,8	1 3,1	1 6,4	6 1 0	1,6 2	1 9,3	5 0,7	9,1	2 4,1	8 7 3
1,1 3	2 9,8	3 8,0	1 2,9	1 6,5	6 1 8	1,6 3	1 9,2	5 1,0	9,1	2 4,3	8 7 5
1,1 4	2 9,4	3 8,1	1 2,8	1 6,6	6 2 6	1,6 4	1 9,1	5 1,4	9,1	2 4,5	8 7 8
1,1 5	2 9,0	3 8,2	1 2,6	1 6,7	6 3 4	1,6 5	1 9,0	5 1,8	9,1	2 4,8	8 8 0
1,1 6	2 8,6	3 8,4	1 2,4	1 6,7	6 4 3	1,6 6	1 9,0	5 2,2	9,0	2 5,0	8 8 3
1,1 7	2 8,2	3 8,5	1 2,3	1 6,8	6 5 1	1,6 7	1 8,9	5 2,6	9,0	2 5,2	8 8 5
1,1 8	2 7,8	3 8,6	1 2,2	1 6,9	6 5 9	1,6 8	1 8,8	5 3,0	9,0	2 5,4	8 8 8
1,1 9	2 7,4	3 8,8	1 2,0	1 7,0	6 6 7	1,6 9	1 8,7	5 3,4	9,0	2 5,6	8 9 0
1,2 0	2 7,0	3 8,9	1 1,9	1 7,1	6 7 5	1,7 0	1 8,6	5 3,8	8,9	2 5,9	8 9 3
1,2 1	2 6,7	3 9,1	1 1,8	1 7,2	6 8 2	1,7 1	1 8,5	5 4,2	8,9	2 6,1	8 9 5
1,2 2	2 6,4	3 9,3	1 1,6	1 7,3	6 8 8	1,7 2	1 8,4	5 4,7	8,9	2 6,4	8 9 7
1,2 3	2 6,1	3 9,5	1 1,5	1 7,4	6 9 5	1,7 3	1 8,4	5 5,1	8,9	2 6,6	8 9 9
1,2 4	2 5,9	3 9,7	1 1,4	1 7,6	7 0 1	1,7 4	1 8,3	5 5,6	8,9	2 6,9	9 0 1
1,2 5	2 5,7	3 9,9	1 1,3	1 7,7	7 0 8	1,7 5	1 8,2	5 6,0	8,8	2 7,1	9 0 3
1,2 6	2 5,4	4 0,0	1 1,2	1 7,8	7 1 5	1,7 6	1 8,2	5 6,5	8,8	2 7,4	9 0 5
1,2 7	2 5,1	4 0,2	1 1,1	1 7,9	7 2 1	1,7 7	1 8,1	5 6,9	8,8	2 7,6	9 0 7
1,2 8	2 4,8	4 0,4	1 1,0	1 8,0	7 2 8	1,7 8	1 8,0	5 7,4	8,8	2 7,9	9 0 9
1,2 9	2 4,5	4 0,6	1 0,9	1 8,1	7 3 4	1,7 9	1 8,0	5 7,8	8,8	2 8,1	9 1 1
1,3 0	2 4,2	4 0,8	1 0,8	1 8,3	7 4 1	1,8 0	1 7,9	5 8,2	8,8	2 8,4	9 1 3
1,3 1	2 4,0	4 1,0	1 0,7	1 8,4	7 4 6	1,8 1	1 7,8	5 8,7	8,8	2 8,6	9 1 5
1,3 2	2 3,8	4 1,3	1 0,6	1 8,6	7 5 2	1,8 2	1 7,8	5 9,2	8,7	2 8,9	9 1 6
1,3 3	2 3,6	4 1,5	1 0,6	1 8,7	7 5 7	1,8 3	1 7,7	5 9,6	8,7	2 9,2	9 1 8
1,3 4	2 3,4	4 1,8	1 0,5	1 8,9	7 6 2	1,8 4	1 7,7	6 0,1	8,7	2 9,5	9 1 9
1,3 5	2 3,2	4 2,0	1 0,4	1 9,0	7 6,7	1,8 5	1 7,6	6 0,6	8,7	2 9,7	9 2 1
1,3 6	2 3,0	4 2,3	1 0,4	1 9,2	7 7 3	1,8 6	1 7,6	6 1,0	8,7	3 0,0	9 2 3
1,3 7	2 2,8	4 2,5	1 0,3	1 9,3	7 7 8	1,8 7	1 7,5	6 1,5	8,7	3 0,3	9 2 4
1,3 8	2 2,6	4 2,8	1 0,2	1 9,5	7 8 3	1,8 8	1 7,5	6 2,0	8,6	3 0,6	9 2 6
1,3 9	2 2,3	4 3,0	1 0,1	1 9,6	7 8 9	1,8 9	1 7,4	6 2,4	8,6	3 0,9	9 2 7
1,4 0	2 2,1	4 3,3	1 0,1	1 9,8	7 9 4	1,9 0	1 7,4	6 2,9	8,6	3 1,2	9 2 9
1,4 1	2 2,0	4 3,6	1 0,0	1 9,9	7 9 8	1,9 1	1 7,3	6 3,4	8,6	3 1,4	9 3 0
1,4 2	2 1,8	4 3,9	1 0,0	2 0,1	8 0 2	1,9 2	1 7,3	6 3,9	8,6	3 1,7	9 3 2
1,4 3	2 1,7	4 4,2	9,9	2 0,3	8 0 6	1,9 3	1 7,3	6 4,4	8,6	3 2,0	9 3 3
1,4 4	2 1,5	4 4,5	9,9	2 0,5	8 1 0	1,9 4	1 7,2	6 4,9	8,6	3 2,2	9 3 4
1,4 5	2 1,4	4 4,8	9,8	2 0,6	8 1 4	1,9 5	1 7,2	6 5,4	8,6	3 2,5	9 3 5
1,4 6	2 1,2	4 5,1	9,8	2 0,8	8 1 9	1,9 6	1 7,1	6 5,9	8,5	3 2,8	9 3 6
1,4 7	2 1,1	4 5,4	9,7	2 1,0	8 2 3	1,9 7	1 7,1	6 6,4	8,5	3 3,0	9 3 7
1,4 8	2 0,9	4 5,7	9,7	2 1,2	8 2 7	1,9 8	1 7,0	6 6,9	8,5	3 3,3	9 3 9
1,4 9	2 0,8	4 6,0	9,6	2 1,4	8 3 1	1,9 9	1 7,0	6 7,4	8,5	3 3,6	9 4 0
1,5 0	2 0,6	4 6,4	9,6	2 1,6	8 3 5	2,0 0	1 7,0	6 7,9	8,5	3 3,9	9 4 1

TABELA 4  
CÁLCULO DAS LAJES CRUZ



$$M_x = \frac{q \ell_x^2}{m_x}$$

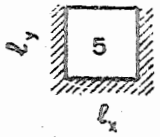
$$M_y = \frac{q \ell_y^2}{m_y}$$

$$K_x = -\frac{q \ell_x^2}{n_x}$$

$$K_y = R_x q$$

$\ell_y/\ell_x$	$m_x$	$m_y$	$n_x$	$K_x$	$\ell_y/\ell_x$	$m_x$	$m_y$	$K_x$	$K_y$
0,50	136,1	49,9	50,4	0,230	1,00	37,5	55,7	14,4	0,833
0,51	130,4	49,3	47,4	253	1,02	36,8	57,0	14,2	843
0,52	124,6	48,6	44,7	260	1,04	36,2	58,3	14,1	852
0,53	118,9	48,0	42,4	283	1,06	35,5	59,6	14,0	861
0,54	113,1	47,3	40,3	298	1,08	34,8	60,9	13,8	871
0,55	107,4	46,6	38,2	314	1,10	34,2	62,2	13,6	880
0,56	103,4	46,3	36,3	330	1,12	33,7	63,3	13,5	886
0,57	99,5	45,9	34,8	345	1,14	33,2	64,6	13,5	892
0,58	95,5	45,6	33,2	361	1,16	32,8	67,2	13,4	899
0,59	91,6	45,2	31,8	377	1,18	32,3	68,9	13,3	906
0,60	87,6	44,8	30,5	393	1,20	31,9	70,6	13,2	912
0,61	84,8	44,6	29,4	409	1,22	31,6	72,4	13,1	916
0,62	82,0	44,5	28,2	425	1,24	31,3	74,3	13,0	921
0,63	79,3	44,3	27,3	440	1,26	31,0	76,0	13,0	926
0,64	76,6	44,2	26,3	456	1,28	30,7	77,8	12,9	930
0,65	73,8	44,0	25,4	472	1,30	30,3	79,7	12,9	935
0,66	71,8	44,0	24,7	487	1,32	30,1	81,7	12,8	938
0,67	69,8	44,0	23,9	502	1,34	29,9	83,7	12,8	941
0,68	67,7	44,1	23,2	517	1,36	29,7	85,7	12,7	944
0,69	65,7	44,1	22,6	532	1,38	29,5	87,7	12,6	947
0,70	63,7	44,1	22,0	546	1,40	29,2	89,7	12,6	950
0,71	62,2	44,3	21,4	560	1,42	29,1	91,9	12,6	952
0,72	60,7	44,4	21,0	573	1,44	28,9	94,1	12,6	954
0,73	59,2	44,6	20,4	587	1,46	28,7	96,3	12,5	957
0,74	57,7	44,7	20,0	600	1,48	28,5	98,5	12,5	959
0,75	56,2	44,9	19,6	613	1,50	28,3	100,7	12,5	962
0,76	55,0	45,1	19,2	625	1,52	28,1	103,1	12,5	964
0,77	53,8	45,4	18,9	636	1,54	28,0	105,5	12,4	966
0,78	52,6	45,6	18,5	646	1,56	27,9	107,9	12,4	967
0,79	51,5	45,9	18,2	659	1,58	27,7	110,3	12,4	969
0,80	50,4	46,2	17,0	671	1,60	27,6	112,6	12,4	970
0,81	49,5	46,5	17,6	681	1,62	27,5	115,2	12,4	972
0,82	48,6	46,9	17,3	692	1,64	27,4	117,8	12,3	973
0,83	47,8	47,2	17,1	702	1,66	27,3	120,4	12,3	975
0,84	46,9	47,6	16,8	713	1,68	27,2	122,9	12,3	976
0,85	46,0	48,0	16,6	723	1,70	27,1	125,4	12,3	977
0,86	45,3	48,4	16,4	731	1,72	27,0	128,1	12,3	978
0,87	44,6	48,9	16,2	740	1,74	27,0	130,8	12,3	979
0,88	43,9	49,3	16,0	748	1,76	26,9	133,5	12,3	980
0,89	43,2	49,8	15,9	757	1,78	26,8	136,3	12,3	980
0,90	42,5	50,2	15,7	766	1,80	26,7	139,1	12,2	981
0,91	42,0	50,7	15,5	773	1,82	26,6	142,0	12,2	982
0,92	41,4	51,2	15,4	780	1,84	26,5	145,9	12,2	983
0,93	40,9	51,7	15,2	788	1,86	26,5	148,8	12,2	983
0,94	40,3	52,2	15,1	795	1,88	26,4	151,7	12,2	984
0,95	39,7	52,8	14,9	803	1,90	26,4	154,6	12,2	985
0,96	39,2	53,3	14,8	809	1,92	26,3	156,7	12,2	986
0,97	38,8	53,9	14,7	815	1,94	26,3	159,7	12,2	986
0,98	38,3	54,6	14,6	821	1,96	26,2	162,8	12,2	987
0,99	37,9	55,1	14,5	827	1,98	26,2	165,8	12,2	988
1,00	37,5	55,7	14,4	833	2,00	26,1	168,9	12,1	988

TABELA 5  
CÁLCULO DAS LAJES EM CRUZ



$$M_x = \frac{q l_x^2}{m_x}$$

$$M_y = \frac{q l_y^2}{m_y}$$

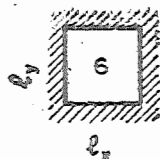
$$x_x = -\frac{q l_x^2}{n_x}$$

$$x_y = -\frac{q l_y^2}{n_y}$$

$$q_x = k_x q$$

$l_y/l_x$	$m_y$	$m_x$	$n_x$	$n_y$	$k_x$	$l_y/l_x$	$m_x$	$m_y$	$n_x$	$n_y$	$k_x$
0,50	246,6	71,5	100,1	35,6	0,111	1,00	44,2	50,6	18,0	24,0	0,667
0,51	234,5	69,0	100,8	34,7	119	1,02	43,1	51,3	17,6	24,3	683
0,52	222,6	66,1	94,4	33,8	127	1,04	42,0	52,0	17,2	24,7	699
0,53	210,7	66,4	88,2	32,9	136	1,06	40,9	52,7	16,8	25,1	714
0,54	198,8	64,7	82,7	32,1	145	1,08	39,9	53,4	16,4	25,5	730
0,55	187,0	63,0	77,3	31,3	155	1,10	38,9	54,0	16,1	25,9	745
0,56	177,3	61,8	72,6	30,6	165	1,12	38,1	54,9	15,9	26,4	757
0,57	167,6	60,6	68,5	29,9	175	1,14	37,4	55,8	15,6	26,9	770
0,58	157,9	59,4	64,8	29,2	185	1,16	36,7	56,7	15,4	27,4	782
0,59	148,2	58,2	61,5	28,6	195	1,18	36,0	57,6	15,1	28,0	794
0,60	138,6	57,1	58,2	28,0	206	1,20	35,3	58,5	14,9	28,6	806
0,61	132,9	56,4	55,3	27,5	217	1,22	34,8	59,7	14,7	29,2	815
0,62	127,2	55,8	52,3	27,0	229	1,24	34,3	60,0	14,5	29,8	824
0,63	121,5	55,1	49,9	26,5	240	1,26	33,8	61,9	14,4	30,4	833
0,64	115,9	54,3	47,6	26,1	252	1,28	33,3	63,1	14,3	31,1	842
0,65	110,3	53,5	45,6	25,7	263	1,30	32,8	64,2	14,1	31,8	851
0,66	106,3	52,9	43,6	25,3	275	1,32	32,4	65,4	14,0	32,5	858
0,67	102,3	52,4	41,7	25,0	287	1,34	32,0	66,7	13,9	33,2	865
0,68	98,4	52,0	40,0	24,7	300	1,36	31,6	68,0	13,8	34,0	872
0,69	94,5	51,4	38,5	24,4	312	1,38	31,3	69,3	13,7	34,7	879
0,70	90,6	50,9	37,0	24,1	324	1,40	31,0	70,5	13,6	35,5	885
0,71	87,8	50,6	35,7	23,9	336	1,42	30,7	71,9	13,5	36,3	890
0,72	85,0	50,2	34,4	23,7	349	1,44	30,4	73,3	13,4	37,1	895
0,73	82,2	49,9	33,2	23,5	361	1,46	30,1	74,8	13,3	37,9	900
0,74	79,4	49,5	32,0	23,3	375	1,48	29,9	76,2	13,3	38,7	905
0,75	76,6	49,2	30,9	23,2	388	1,50	29,7	77,7	13,2	39,5	910
0,76	74,5	49,1	30,0	23,1	400	1,52	29,5	79,3	13,1	40,4	914
0,77	72,4	48,9	29,0	23,0	412	1,54	29,3	80,9	13,1	41,3	918
0,78	70,3	48,8	28,2	22,9	425	1,56	29,1	82,5	13,0	42,2	921
0,79	68,2	48,6	27,4	22,8	438	1,58	28,9	84,1	13,0	43,1	925
0,80	66,2	48,4	26,7	22,7	450	1,60	28,7	85,7	12,9	44,0	929
0,81	64,6	48,4	26,0	22,6	462	1,62	28,5	87,4	12,9	44,9	932
0,82	63,0	48,3	25,3	22,6	474	1,64	28,3	89,1	12,8	45,8	935
0,83	61,5	48,3	24,7	22,6	486	1,66	28,2	90,8	12,8	46,7	938
0,84	60,0	48,2	24,0	22,6	498	1,68	28,1	92,5	12,8	47,6	940
0,85	58,5	48,2	23,5	22,6	511	1,70	28,0	94,3	12,7	48,5	943
0,86	57,3	48,3	23,0	22,7	522	1,72	27,8	96,2	12,7	49,5	945
0,87	56,1	48,3	22,5	22,7	534	1,74	27,7	98,1	12,7	50,5	947
0,88	54,9	48,4	22,0	22,8	545	1,76	27,6	100,0	12,7	51,5	949
0,89	53,7	48,4	21,6	22,8	557	1,78	27,5	101,9	12,6	52,6	952
0,90	52,5	48,5	21,1	22,8	568	1,80	27,4	103,7	12,6	53,7	954
0,91	51,5	48,7	20,7	22,9	578	1,82	27,3	105,6	12,5	54,9	956
0,92	50,6	48,9	20,4	23,0	589	1,84	27,2	107,7	12,5	56,1	958
0,93	49,7	49,0	20,0	23,1	599	1,86	27,1	109,7	12,5	57,3	960
0,94	48,8	49,2	19,7	23,2	611	1,88	27,0	111,7	12,5	58,5	961
0,95	47,9	49,4	19,4	23,3	620	1,90	26,9	113,7	12,5	59,8	963
0,96	47,1	49,6	19,1	23,5	630	1,92	26,8	115,9	12,4	61,1	965
0,97	46,3	49,9	18,8	23,6	639	1,94	26,7	118,1	12,4	62,5	966
0,98	45,6	50,1	18,5	23,8	649	1,96	26,6	120,2	12,4	63,9	967
0,99	44,9	50,4	18,2	23,9	658	1,98	26,5	122,3	12,4	65,3	969
1,00	44,2	50,6	18,0	24,0	667	2,00	26,5	124,4	12,4	66,7	970

TABELA 6  
CÁLCULO DAS LAJES EM CRUZ



$$M_x = \frac{q l_x^2}{m_x}$$

$$M_y = \frac{q l_y^2}{m_y}$$

$$r_x = \frac{q l_x^2}{r_x}$$

$$r_y = \frac{q l_y^2}{r_y}$$

$$r_x + r_y = q$$

$l_y/l_x$	$m_x$	$m_y$	$r_x$	$r_y$	$\mu_x$	$l_y/l_x$	$m_x$	$m_y$	$r_x$	$r_y$	$\mu_x$
1,00	55,7	55,7	24,0	24,0	0,500	1,50	92,0	72,2	14,6	92,3	0,835
1,01	54,8	55,8	23,6	24,0	509	1,51	91,9	72,8	14,5	92,6	0,838
1,02	53,9	55,9	23,1	24,0	919	1,52	91,7	73,4	14,5	92,9	0,841
1,03	53,0	56,0	22,7	24,1	520	1,53	91,6	74,0	14,2	93,2	0,845
1,04	52,1	56,0	22,3	24,1	598	1,54	91,4	74,6	14,2	93,6	0,848
1,05	51,2	56,1	21,9	24,2	597	1,55	91,3	75,2	14,1	93,9	0,851
1,06	50,3	56,2	21,7	24,2	596	1,56	91,1	75,8	14,0	94,2	0,855
1,07	49,4	56,3	21,2	24,3	566	1,57	91,0	76,4	14,0	94,5	0,858
1,08	48,5	56,4	20,9	24,3	575	1,58	90,8	77,0	14,0	94,9	0,861
1,09	47,6	56,5	20,5	24,4	585	1,59	90,6	77,6	13,9	95,2	0,865
1,10	46,8	56,6	20,2	24,4	594	1,60	90,5	78,2	13,8	95,5	0,868
1,11	46,2	56,8	20,0	24,5	602	1,61	90,4	78,8	13,8	95,8	0,870
1,12	45,6	57,0	19,7	24,6	610	1,62	90,3	79,3	13,7	96,1	0,873
1,13	45,0	57,3	19,4	24,7	618	1,63	90,2	80,2	13,7	96,5	0,875
1,14	44,4	57,5	19,2	24,8	626	1,64	90,1	80,8	13,7	96,8	0,878
1,15	43,8	57,7	18,9	25,0	634	1,65	90,0	81,5	13,6	97,1	0,880
1,16	43,2	58,0	18,7	25,1	643	1,66	29,9	82,2	13,6	97,5	0,883
1,17	42,6	58,2	18,4	25,2	651	1,67	29,8	82,8	13,6	97,8	0,885
1,18	42,0	58,4	18,2	25,3	659	1,68	29,7	83,5	13,5	98,1	0,888
1,19	41,4	58,7	18,0	25,4	667	1,69	29,6	84,2	13,5	98,5	0,890
1,20	40,9	58,9	17,8	25,6	675	1,70	29,4	84,9	13,5	98,8	0,893
1,21	40,5	59,2	17,6	25,7	682	1,71	29,3	85,6	13,4	99,1	0,895
1,22	40,1	59,6	17,4	25,9	688	1,72	29,2	86,4	13,4	99,5	0,897
1,23	39,7	59,9	17,3	26,0	695	1,73	29,1	87,1	13,4	99,9	0,899
1,24	39,3	60,3	17,1	26,2	701	1,74	29,0	87,9	13,3	100,2	0,901
1,25	38,9	60,6	16,9	26,4	708	1,75	29,0	88,6	13,3	100,6	0,903
1,26	38,5	61,0	16,8	26,6	715	1,76	28,9	89,4	13,3	101,0	0,905
1,27	38,1	61,3	16,6	26,8	721	1,77	28,8	90,1	13,2	101,3	0,907
1,28	37,7	61,7	16,5	27,0	728	1,78	28,7	90,9	13,2	101,7	0,909
1,29	37,3	62,0	16,4	27,2	734	1,79	28,6	91,6	13,2	102,1	0,911
1,30	36,9	62,4	16,2	27,4	741	1,80	28,5	92,5	13,1	102,5	0,913
1,31	36,6	62,8	16,1	27,6	746	1,81	28,4	93,2	13,1	102,9	0,915
1,32	36,3	63,3	16,0	27,8	752	1,82	28,3	94,0	13,1	103,3	0,916
1,33	36,0	63,7	15,9	28,0	757	1,83	28,2	94,7	13,1	103,8	0,918
1,34	35,7	64,2	15,8	28,3	762	1,84	28,1	95,5	13,0	104,2	0,919
1,35	35,5	64,6	15,6	28,5	767	1,85	28,0	96,2	13,0	104,6	0,921
1,36	35,2	65,0	15,5	28,7	773	1,86	28,0	97,0	13,0	105,1	0,923
1,37	34,9	65,5	15,4	29,0	778	1,87	27,9	97,7	13,0	105,5	0,924
1,38	34,6	65,9	15,3	29,3	783	1,88	27,8	98,5	13,0	105,9	0,926
1,39	34,3	66,4	15,2	29,5	789	1,89	27,7	99,2	12,9	106,4	0,927
1,40	34,1	66,8	15,1	29,7	797	1,90	27,7	100,0	12,9	106,8	0,929
1,41	33,9	67,3	15,0	30,0	798	1,91	27,6	100,9	12,9	107,2	0,930
1,42	33,7	67,9	15,0	30,2	802	1,92	27,6	101,8	12,9	107,6	0,932
1,43	33,5	68,4	14,9	30,5	806	1,93	27,5	102,7	12,9	108,0	0,933
1,44	33,3	69,0	14,8	30,7	810	1,94	27,5	103,6	12,9	108,4	0,934
1,45	33,1	69,5	14,8	31,0	814	1,95	27,5	104,5	12,8	108,8	0,935
1,46	32,9	70,0	14,7	31,3	819	1,96	27,4	105,4	12,8	109,2	0,936
1,47	32,7	70,6	14,6	31,5	823	1,97	27,4	106,3	12,8	109,6	0,937
1,48	32,5	71,1	14,5	31,8	827	1,98	27,3	107,3	12,8	110,0	0,939
1,49	32,0	71,7	14,5	32,0	831	1,99	27,3	108,1	12,8	110,4	0,940
1,50	32,0	72,2	14,4	32,3	835	2,00	27,3	109,1	12,7	110,8	0,941